



Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Fakultät für Mathematik und Informatik
Im Neuenheimer Feld 288, D-69120 Heidelberg

HOMOGENISIERUNG ALTERNIERENDER
RANDBEDINGUNGEN
BEI DER POISSONGLEICHUNG

Diplomarbeit

vorgelegt von

Sven-Joachim Kimmerle

aus Filderstadt

Betreuung:

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Willi Jäger

6. MAI 2004

Sicher ist, dass für uns die Zeit der großen Mathematiker vorüber ist. Es ist heute dieselbe Arbeit des Erhaltens, Abrundens, Verfeinerns, Auswählens, die talentvolle Kleinarbeit an Stelle der großen Schöpfungen im Gange, wie sie auch die alexandrinische Mathematik des späteren Hellenismus kennzeichnet.

Oswald Spengler

in "Der Untergang des Abendlandes" (1922)

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	2
1	Einordnung und Struktur der Arbeit	2
1.1	Bisherige Resultate.	2
1.2	Aufbau der Arbeit	2
2	Eine kurze Einführung in die Homogenisierung	4
2.1	Motivation effektiver Gleichungen	4
2.2	Periodisches Verhalten auf der mikroskopischen Skala	5
2.3	Ein Beispiel eines Homogenisierungs-Resultats	5
2.4	Die Energie-Methode nach Tartar	7
2.5	Die Methode der 2-Skalen-Konvergenz nach Allaire und Nguetseng	8
2.6	Überblick über andere Zugänge zur Homogenisierung	13
II	Homogenisierung periodischer Randbedingungen	14
3	Der Entwicklungsterm nullter Ordnung	14
3.1	Problem A	14
4	Der Entwicklungsterm erster Ordnung	20
4.1	Problem B*	20
4.2	Problem B	20
4.3	Problem C	25
4.4	Problem D und das Zellproblem	25
4.5	Verhalten der Zelllösung auf Γ	31
5	Die effektive Randbedingung	34
5.1	Herleitung mit der Energie-Methode	34
5.2	Herleitung mit 2-Skalen-Konvergenz und Problem E.	37
6	Der Zusammenhang zu Problem B*	45
7	Rechtfertigung der asymptotischen Entwicklung	48
7.1	Fehlerabschätzung	48
7.2	<i>Corrector Result</i>	48
III	Diskussion	54
8	Beispiele für Anwendungen	55
8.1	Elektromagnetismus	55
8.2	Wärmelehre.	55
8.3	Strömungsmechanik	55

9	Ausblick	57
IV	Anhang	58
A	Verwendete Sätze und Lemmata	58
	A.1 Standardresultate aus der Homogenisierung	58
	A.2 Einige Resultate aus der Funktionalanalysis	65
B	Referenzen und Formales	68
	B.1 Literaturverzeichnis	68
	B.2 Symbolverzeichnis	71
	B.3 Danksagung	74
	B.4 Erklärung der selbstständigen Anfertigung	75

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit betrachte ich die Poisson-Gleichung $\Delta u^\varepsilon = f$ auf dem Einheitsquadrat Ω , wobei auf der unteren Kante Γ des Quadrats Ω sich Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen mit der Periode ε abwechseln.

Das Problem wird homogenisiert und in der ersten und zweiten Ordnung der asymptotischen Entwicklung findet man $u^\varepsilon \rightarrow u_0 \in H^1(\Omega)$ bzw. $v^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(u^\varepsilon - u_0) \rightarrow \tilde{v}_0 \in L^2(\Omega)$. Mit der Methode der 2-Skalen-Konvergenz mit Parametern erhält man $v^\varepsilon(x_1; \varepsilon y_2) \xrightarrow{2} v_0(x_1, y) = \partial_2 u_0(x_1, 0) \tilde{\chi}_0(y) \in L^2((0, 1) \times Y)$, wobei $\tilde{\chi}_0$ die Zelllösung in der Periodizitätszelle $Y := (0, 1) \times \mathbb{R}^+$ ist.

Insbesondere bekommt man als effektive Randbedingung im zweiten Entwicklungsterm $\tilde{v}_0|_\Gamma = a_0 \partial_2 u_0$, wobei sich die Zahl a_0 unabhängig von f aus dem Zellproblem bestimmen läßt. Eine Fehlerabschätzung $\|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ und unter verbesserten Regularitätsannahmen ein *Corrector Result* für die asymptotische Entwicklung $u_0(x) + \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})$ werden gezeigt.

Unser Resultat ermöglicht eine praktikable numerische Lösung des Problems. Anwendungen für unser Ergebnis finden sich in der Elektro- und Magnetostatik, desweiteren bei der stationären Wärmeleitungsgleichung oder in der Strömungsmechanik und dort insbesondere in der Bodenphysik.

In this diploma thesis I consider the Poisson equation $\Delta u^\varepsilon = f$ on the unit square Ω , where on the lower boundary Γ of the square Ω , we have Dirichlet and Neumann boundary conditions, alternating with period ε .

The problem is homogenized and in the first and second order of the asymptotic expansion we find $u^\varepsilon \rightarrow u_0 \in H^1(\Omega)$, $v^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(u^\varepsilon - u_0) \rightarrow \tilde{v}_0 \in L^2(\Omega)$ respectively. By using the method of two scale convergence with parameters we get $v^\varepsilon(x_1; \varepsilon y_2) \xrightarrow{2} v_0(x_1, y) = \partial_2 u_0(x_1, 0) \tilde{\chi}_0(y) \in L^2((0, 1) \times Y)$, where $\tilde{\chi}_0$ is the cell solution in the periodicity cell $Y := (0, 1) \times \mathbb{R}^+$.

In particular, we get as an effective boundary condition in the second order term of the asymptotic expansion $\tilde{v}_0|_\Gamma = a_0 \partial_2 u_0$, where we can determine the number a_0 out of the cell problem, independently from f . We show an error estimate $\|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ and under further regularity assumptions a corrector result for the asymptotic development $u_0(x) + \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})$.

Our result enables a practically feasible numerical treatment of the problem. Applications for our result can be found in electro- and magnetostatics, further by considering the stationary heat equation or in fluid mechanics and there particularly in soil physics.

Teil I

Einleitung

1 Einordnung und Struktur der Arbeit

1.1 Bisherige Resultate

In diesem Abschnitt soll zuerst ein kurzer Überblick über andere Arbeiten mit ähnlichen Problemstellungen und eine Einordnung dieser Arbeit gegeben werden.

Seit Einführung der Methode der Homogenisierung 1970 durch Sanchez-Palencia im Rahmen der Theoretischen Physik ist eine große Anzahl von Artikeln und Büchern erschienen, die sich mit der Homogenisierung verschiedenster Gleichungen befassen haben. Darunter auch zahlreiche Arbeiten, die perforierte Gebiete (siehe z.B. [JOS94], [OS95]) bzw. schnell oszillierende Ränder zum Thema haben (siehe z.B. [BMS92], [Sar98]).

Perforierte Ränder und periodisch abwechselnde Dirichlet- und Fourier-Randbedingungen wurden von Chechkin und Gadyl'schin in [CG99] für elliptische Randwertprobleme gelöst. Zufällig abwechselnde Randbedingungen wurden in [BC99] betrachtet. Die Homogenisierung einer periodischen Randbedingung für die Wärmeleitungsgleichung in \mathbb{R}^3 erfolgte durch Filo und Luckhaus (siehe [FL95], [Fil98], [FL00]). Ein verwandtes, zeitabhängiges Problem mit freiem Rand wurde von Schweizer gelöst (siehe [Sch02]). Alle diese Artikel verwendeten dabei Tartar's Energie-Methode.

In dieser Arbeit homogenisieren wir die Poissongleichung $\Delta u^\varepsilon = f$, $f \in L^2(\Omega)$ in \mathbb{R}^2 zu oszillierenden Randbedingungen auf einem Teil Γ des Randes. Dabei wechseln sich Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen periodisch ab. Der Beweis wird dabei zuerst einmal mit der Energie-Methode geführt und noch einmal unabhängig davon mit 2-Skalen-Konvergenz mit Parametern. Letztere Methode gibt zusätzlich Aufschluss über das mikroskopische Verhalten. Nach Kenntnis des Autors wurde dieses Problem mit der Methode der 2-Skalen-Konvergenz bisher noch nicht betrachtet.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 geben wir eine kurze Einführung in die in dieser Arbeit verwendeten Methoden. Dabei werden die wichtigsten Standardresultate zusammengestellt und die im Weiteren dieser Arbeit verwendeten Aussagen auch bewiesen.

Dann leiten wir in 3.1 die homogenisierte Lösung u_0 des Ausgangsproblems, Problem A, her. Danach betrachten wir den Entwicklungsterm erster Ordnung in ε ,

$$v^\varepsilon := \frac{u^\varepsilon - u_0}{\varepsilon},$$

wobei ε die Periodizitätslänge ist. Wir ersetzen zuerst noch die homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf den seitlichen Rändern durch periodische Randbedingungen. Unser Hauptresultat ist dann der folgende Satz, den wir bereits hier formulieren wollen. Außerdem erhält man wie schon in Problem A ein homogenisiertes Problem, bei dem nur Dirichlet-Randbedingungen vorliegen, während das ε -Problem gemischte Randbedingungen hat.

Haupttheorem (Theorem II.2)

a) Es existiert eine eindeutige Lösung v^ε in $H^1(\Omega)$ des folgenden Problems B zu $g := \partial_2 u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ für alle $\varepsilon > 0$:

$$\Delta v^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$v^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^\varepsilon \cup \Pi, \quad (1.2)$$

$$\partial_n v^\varepsilon = \varepsilon^{-1} g \quad \forall x \in \Gamma_2^\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$v^\varepsilon \quad 1\text{-periodisch in } x_1. \quad (1.4)$$

b) Für ε gegen Null konvergiert $v^\varepsilon \rightharpoonup \tilde{v}_0$ schwach in $L^2(\Omega)$.

c) Für ein $a_0 \in \mathbb{R}$, welches nicht von u_0 abhängt, ist \tilde{v}_0 die eindeutige schwache Lösung von:

$$\Delta \tilde{v}_0 = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$\tilde{v}_0 = 0 \quad \forall x \in \Pi, \quad (1.6)$$

$$\tilde{v}_0 = a_0 g \quad \forall x \in \Gamma, \quad (1.7)$$

$$\tilde{v}_0 \quad 1\text{-periodisch in } x_1. \quad (1.8)$$

Der Beweis erfolgt in drei größeren Schritten. Zuerst zeigen wir Theorem II.2 a), b) und (1.5), (1.6) sowie (1.8) in Abschnitt 4.2. Als nächstes betrachtet man dann das Zellproblem in 4.4 mit der Lösung $\tilde{\chi}_0$. Drittens zeigen wir unabhängig voneinander die effektive Randbedingung (1.7) mit der Energie-Methode und der Methode der 2-Skalen-Konvergenz.

Die Zahl a_0 stellt sich dabei als Mittelwert der Zelllösung $\tilde{\chi}_0$ heraus. Wir geben noch numerisch gefundene Ergebnisse für $\tilde{\chi}_0$ auf Γ und für a_0 an. Mit der zweiten Methode bekommen wir auch Information über das mikroskopische Verhalten. Für den 2-Skalen-Limes mit Parameter y_2 , v_0 , gilt $v_0(x_1, y_1, y_2) = \partial_2 u_0(x_1, 0) \tilde{\chi}_0(y_1, y_2)$.

In Kapitel 6 kehren wir wieder von periodischen zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen zurück, um dann in Kapitel 7.1 die Güte der homogenisierten Lösung u_0 mit der ursprünglichen Lösung u^ε zu vergleichen und durch eine Korrektur mit \tilde{v}_0 bzw. $v_0(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon})$ zu verbessern.

Anschließend folgt eine Diskussion, wie die Resultate dieser Arbeit weiter untersucht

werden könnten und es werden einige Anwendungen aufgeführt. Insbesondere wird auf ein Beispiel aus der Bodenphysik eingegangen.

Der Anhang enthält den Beweis einiger Standardresultate aus der Theorie der Homogenisierung und eine Zusammenstellung verschiedener Poincaré-Ungleichungen.

2 Eine kurze Einführung in die Homogenisierung

2.1 Motivation effektiver Gleichungen

In vielen Anwendungen trifft man auf Gleichungen, die zugleich von Variablen abhängen, die auf einer makroskopischen Skala liegen, wie auch von Variablen, die auf einer mikroskopischen Skala liegen. Meistens interessiert man sich nur für das makroskopische Verhalten der Lösungen und möchte die mikroskopischen Variablen eliminieren, indem man über diese mittelt. Man sucht also “effektive” Gleichungen.

Eine solche Situation liegt z.B. bei einem Gemisch zweier Werkstoffe vor, für das man die Wärmeleitungsgleichung betrachtet, wobei man sich für die effektive Leitfähigkeit des Gemisches interessiert (siehe z.B. [Hum99], [Hum00]).

Ein Beispiel aus dem Bereich der Medizin wäre der Blutfluss durch ein Netzwerk feiner Äderchen.

Ein Beispiel aus dem Bereich der Bodenphysik sind poröse Medien. Man interessiert sich z.B. für den effektiven Druck und betrachtet die Navier-Stokes-Gleichung. Dabei möchte man über umströmtes festes Material (z.B. Sandkörner) von mikroskopischer Größe oder aller kleinste wasserdurchlässige Poren hinweg mitteln. Als asymptotische Gleichung erhält man das schon 1856 von Henry Darcy experimentell gefundene und nach ihm benannte Darcy-Gesetz. Eine mathematische Herleitung des Darcy-Gesetzes in porösen Medien findet sich in [All97a].

In der Praxis erweist es sich auch numerisch oft als nicht praktikabel, die Ausgangsgleichungen zu einer gegebenen kleinen Periodenlänge ε zu lösen oder man benötigt Penalty-Methoden (siehe z.B. [AL98]). Dies motiviert neben dem eigentlichen Interesse am makroskopischen Verhalten, die Idee die Ausgangsgleichungen zu “homogenisieren”. Unter **Homogenisierung** versteht man das Vorgehen, nicht die exakten Lösungen der ursprünglichen Gleichungen für ein festes ε zu suchen, sondern es werden die asymptotischen Gleichungen für $\varepsilon \downarrow 0$ bestimmt und dann diese gelöst. Die mikroskopischen Variablen, typischerweise von der Form $x\varepsilon^{-1}$, werden dabei als unabhängige Variablen y aufgefasst und die homogenisierten Gleichungen sind nur noch von den makroskopischen Variablen abhängig. Die Homogenisierung ist gerechtfertigt, wenn man nachher für ε gegen Null eine Konvergenz der exakten Lösung gegen die asymptotische Lösung in einem geeigneten Banachraum zeigen kann.

Das Prinzip der Homogenisierung lässt sich auch auf Mehrskalensysteme verallgemeinern, in dem man sukzessive bezüglich der jeweils kleinste Skala homogenisiert und die restlichen Skalen dabei festhält und dann das Verfahren iteriert (siehe z.B. in [All97b])¹.

2.2 Periodisches Verhalten auf der mikroskopischen Skala

Der mathematisch am einfachsten behandelbare Fall ist der des periodischen Verhaltens auf der kleinen Skala. Bei einem elliptischen Randwertproblem kann es sich dabei etwa um eine periodische Abhängigkeit der Koeffizienten des Operators handeln oder um periodisch alternierende Randbedingungen.

Oft bietet sich als Ansatz eine asymptotische Entwicklung der Form $u^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$ an, wobei u^ε die Lösung des Ausgangsproblems ist und u_0 die Lösung des homogenisierten Problems. Die u_j , $j \in \mathbb{N}^*$, seien Y -periodisch. Dabei sei $Y = (0, l_1) \times \dots \times (0, l_N)$ mit $l_i \in \mathbb{R}^+$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ die Periodizitätszelle. Leider ist diese Entwicklung zunächst nur formal und lässt sich *a posteriori* nicht immer mathematisch rechtfertigen. Mit dieser Methode kann man jedoch oft die Form des homogenisierten Problems erraten.

Die Annahme der Periodizität scheint in der Natur eher unrealistisch, aber man bekommt oft brauchbare Modelle. Wenn zum Beispiel maschinelle Fertigungsprozessen betrachtet werden, kann dagegen das periodische Setting gerechtfertigt sein.

Desweiteren existieren Methoden für die Homogenisierung für quasi-periodische und fast quasi-periodische Situationen. Ebenso gibt es in einigen Fällen auch bei speziellem stochastischem Verhalten auf der mikroskopischen Skala Homogenisierungs-Resultate, wenn etwa das zufällige Verhalten ergodisch ist (siehe z.B. [Koz78], [BMW94]). Ergodizität heißt anschaulich, dass jede zufällige Kombination an irgendeinem Ort oder zu irgendeinem Zeitpunkt auch einmal realisiert wird. Dies erlaubt dann die Mittelung über die Elementarzellen.

Eine Einführung und ein Überblick in die Theorie der Homogenisierung findet sich auf mathematischem Niveau u.a. in [Hor97] oder [JKO94]. Desweiteren sei auf [SP80] als eines der ersten Lehrbücher über die Homogenisierung verwiesen, allerdings wendet es sich an theoretische Physiker und Ingenieure und bietet z.T. keine mathematisch rigorosen Beweise.

2.3 Ein Beispiel eines Homogenisierungs-Resultats

Der folgende Abschnitt bringt als Beispiel das zentrale Homogenisierungs-Resultat für elliptische Randwertprobleme mit einer Koeffizientenmatrix A , deren Einträge periodisch oszillieren. Er orientiert sich dabei im wesentlichen an [CD99]. Dieses Beispiel

¹Man bezeichnet dieses Verfahren als Reiterierte Homogenisierung.

soll nur das allgemeine Vorgehen und die dazu entwickelten Methoden illustrieren. Im Teil II der Arbeit werden wir dagegen ein Homogenisierungs-Resultat für periodisch oszillierende Randbedingungen zeigen.

Zuerst machen wir die folgende Konvention, dass x_i für alle $i \in \mathbb{N}^*$ makroskopische Variablen bezeichne, während die $y_i = \varepsilon^{-1}x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}^*$ mikroskopische Variablen² sind. Desweiteren sei $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}^*$.

Das Standard-Beispiel ist das eines elliptischen Randwertproblems

$$\nabla \cdot A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.2)$$

wobei wir $A^\varepsilon(x) := A(\frac{x}{\varepsilon})$ definieren und $A \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N}$ eine Y -periodische, elliptische Matrix sei. $Y \subset \mathbb{R}^N$, offen, bezeichne dabei die Periodizitätszelle. Man möchte das asymptotische Verhalten der Lösung u^ε für $\varepsilon \downarrow 0$ zu gegebenem $f \in H^{-1}(\Omega)$ bestimmen.

Die Zellprobleme Um dieses Problem zu homogenisieren, konstruieren wir zuerst Hilfsfunktionen $\hat{\chi}_i, i \in \{1, \dots, N\}$ und $\chi_i, i \in \{1, \dots, N\}$, die man als Lösungen periodischer Randwertprobleme in der Periodizitätszelle bestimmt. Diese $2N$ Probleme bezeichnet man als Zellprobleme. Wir untersuchen für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ das jeweilige Problem

$$\nabla_y \cdot A(y) \nabla_y \hat{\chi}_i = \nabla_y \cdot A(y) e_i \quad \text{in } Y,$$

$$\hat{\chi}_i \quad Y\text{-periodisch,}$$

$$\int_Y \hat{\chi}_i = 0$$

bzw. die Probleme zur transponierten Matrix A^T

$$\nabla_y \cdot A^T(y) \nabla_y \chi_i = \nabla_y \cdot A^T(y) e_i \quad \text{in } Y, \quad (2.3)$$

$$\chi_i \quad Y\text{-periodisch,} \quad (2.4)$$

$$\int_Y \chi_i = 0. \quad (2.5)$$

Damit lässt sich nun das Hauptresultat der Homogenisierung formulieren. Das Resultat geht auf Sanchez-Palencia zurück (siehe z.B. [SP80]).

Theorem I.1 (Homogenisierung eines elliptischen Operators) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ und u^ε Lösung des Problems (2.1) und (2.2), dann gilt für $\varepsilon \downarrow 0$, dass

$$i) \quad u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega),$$

$$ii) \quad A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup A_0 \nabla u_0 \in L^2(\Omega)^N,$$

²Da die mikroskopischen Variablen schnell oszillieren, werden sie oft auch als schnelle Variablen bezeichnet.

wobei u_0 das homogenisierte Randwertproblem

$$\nabla \cdot A_0 \nabla u_0 = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.6)$$

$$u_0 = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.7)$$

eindeutig löst. Die Matrix A_0 ist konstant und für die Koeffizienten von A_0 gilt

$$a_{i,j}^0 = e_i \cdot \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y) (e_j - \nabla_y \hat{\chi}_j(y)) dy \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$$

bzw. äquivalent dazu gilt

$$a_{i,j}^0 = e_j \cdot \frac{1}{|Y|} \int_Y A^T(y) (e_i - \nabla_y \chi_i(y)) dy \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2.$$

Die homogenisierte Matrix lässt sich also durch die Hilfsfunktionen $\hat{\chi}_i$ oder χ_i ausdrücken. Außerdem kann man zeigen, dass auch A_0 elliptisch ist. Desweiteren stellt man fest, dass aus der Symmetrie von A auch die Symmetrie von A_0 folgt. Im Allgemeinen ist aber A_0 nicht diagonal, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

Es sei im Weiteren vereinbart, dass Lösungen der von ε abhängigen Ausgangsprobleme rechts oben mit dem Index ε gekennzeichnet werden, während an die homogenisierten Lösungen rechts unten ein Index 0 angehängt wird³.

Beweis Für den Beweis dieses Satzes gibt es verschiedene Zugänge. Insbesondere kann man das Resultat mit der Methode der oszillierenden Testfunktionen nach Tartar (siehe [Tar78]) und mit der Methode der 2-Skalen-Konvergenz nach Allaire (siehe [All92]) zeigen. Wir beweisen dieses Theorem im Anhang A.1 mit beiden Methoden unabhängig voneinander. Auf die Energie-Methode und die 2-Skalen-Konvergenz werden wir jetzt näher eingehen.

2.4 Die Energie-Methode nach Tartar

Die Idee der Methode besteht darin, mit schnell oszillierenden Testfunktionen der Form $\phi w_i^\varepsilon, i \in \{1, \dots, N\}$ zu arbeiten, wobei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig ist. Die w_i^ε konstruiert man sich aus den Zelllösungen. Man definiert

$$w_i(y) := e_i \cdot y - \chi_i(y)$$

und $w_i^\varepsilon(x) := \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = e_i \cdot x - \varepsilon \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$

³Diese Konvention motiviert sich durch die asymptotische Entwicklung $u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 \dots$, in der u_0 der Entwicklungsterm nullter Ordnung in ε ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft oszillierender Funktionen (Lemma A.1) folgt dann $\phi w_i^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \phi x_i$. Durch Testen des Problems (2.1) und (2.2) mit ϕw_i^ε lässt sich dann Theorem I.1 beweisen (siehe Anhang A.1).

Insbesondere bekommt man einen expliziten Ausdruck für den homogenisierten Operator. Die Energie-Methode setzt nicht die Symmetrie der Koeffizienten voraus.

Der Name der Methode kommt daher, dass man damit die Konvergenz der “Energie” $\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \rightarrow \int_\Omega A_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_0$ zeigen kann. Eine auch auf nicht-periodische Situationen verallgemeinerte Form der Energie-Methode ist die H-Konvergenz, H wie Homogenisierung.

2.5 Die Methode der 2-Skalen-Konvergenz nach Allaire und Nguetseng

Die 2-Skalen-Konvergenz wurde von Nguetseng eingeführt (siehe [Ngu89]) und von Allaire weiterentwickelt. Für die Darstellung der 2-Skalen-Konvergenz folgen wir meist dem Artikel “Homogenization and two-scale convergence” von G. Allaire, [All92]. Ähnlich wie bei Tartar’s Energie-Methode betrachtet man glatte oszillierende Testfunktionen $\phi(x, y)$, die in y periodisch sind. Der Unterschied besteht darin, dass bei Tartar’s Energie-Methode die Testfunktionen ϕw_i^ε speziell zur Matrix A konstruiert wurden, während bei der 2-Skalen-Konvergenz allgemeinere oszillierende Testfunktionen erlaubt sind, dafür muss man aber spezielle Funktionenräume einführen.

Mit Hilfe der 2-Skalen-Konvergenz lassen sich außerdem Korrekturresultate zeigen, die den Ansatz einer asymptotischen Entwicklung $u^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$ rechtfertigen.

Definition I.1 (2-Skalen-Konvergenz) Eine Folge von Funktionen u^ε in $L^2(\Omega)$ heisst 2-Skalen-konvergent gegen $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, wenn für alle $\phi(x, y) \in C_0^\infty[\Omega; C_\#^\infty(Y)]$ gilt, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\Omega u^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dy dx.$$

Wir benutzen dafür im folgenden die Notation $u^\varepsilon \xrightarrow{2} u_0$.

Definition I.2 (Zulässige Testfunktionen) Eine Funktion $\phi(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, Y -periodisch in y , heißt zulässige Testfunktion genau dann wenn gilt, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\Omega \phi(x, \frac{x}{\varepsilon})^2 dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y \phi(x, y)^2 dy dx. \quad (2.8)$$

Alle Funktionen aus $C_0^\infty[\Omega; C_\#^\infty(Y)]$ sind zulässige Testfunktionen. Genauso gilt dies für die Funktionenräume $L^p[\Omega; C_\#^0(Y)]$ und $L_\#^p[Y; C^0(\bar{\Omega})]$. Aber nicht alle Funktionen aus $L^2(\Omega \times Y)$, sind zulässige Testfunktionen.⁴

Es stellt sich die Frage, wann zu einer Folge von L^2 -Funktionen u^ε ein 2-Skalen-Limes existiert. Die Antwort, dass dies für alle gleichmäßig in ε in $L^2(\Omega)$ beschränkten Funktionen, zumindest für eine geeignete Teilfolge der Fall ist, liefert der folgende Satz.

Theorem I.2 (Kompaktheitssatz) Aus allen beschränkten Folgen $u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, können wir eine Teilfolge auswählen und es existiert ein 2-Skalen-Limes $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, so dass diese Teilfolge gegen u_0 im Sinne von Definition I.1 konvergiert.

Beweis Sei $\phi \in L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]$. Für diese Testfunktionen gilt

$$\|\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi(x, y)\|_{L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]} \quad (2.9)$$

und damit $\phi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \in L^2(\Omega)$ und insbesondere sind die ϕ 's zulässige Testfunktionen, d.h. (2.8) ist erfüllt. (Der Beweis von (2.9) erfolgt durch Approximation mit Treppenfunktionen, siehe ([All92], Lemma 1.3)).

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt daraus

$$|\int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx| \leq const \quad (2.10)$$

mit einer positiven, von ε unabhängigen Konstanten. Deswegen kann man für festes ε dann u^ε als stetige Linearform U^ε auf $L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]$ auffassen, d. h.

$$\langle U^\varepsilon, \phi \rangle_{L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]', L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]} = \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx, \quad (2.11)$$

wobei die Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Dualitätsprodukt bezeichnet. Nach (2.10) ist U^ε gleichmäßig in ε beschränkt, d.h. $\|U^\varepsilon\|_{[L^2(\Omega); C_\#^0(Y)]'} \leq const$.

Außerdem weiß man, dass $L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]$ separabel ist, denn $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist bzgl. des Lebesgue-Maß meßbar und $L^2(\Omega)$ ist separabel. Also kann man aus jeder beschränkten Folge aus $L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]$ eine Teilfolge, wiederum mit U^ε bezeichnet, auswählen, so dass $U^\varepsilon \rightharpoonup^* U_0$ (Satz über die schwache Folgenkompaktheit, vgl. [Alt99], 6.5, S. 213). Damit gilt einerseits

$$\begin{aligned} \langle U_0, \phi \rangle_{L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]', L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle U^\varepsilon, \phi \rangle_{L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]', L^2[\Omega; C_\#^0(Y)]} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx, \end{aligned} \quad (2.12)$$

⁴Nach Kenntnis des Autors sind die minimalen Voraussetzungen, die an zulässige Testfunktionen zu stellen sind, nicht bekannt. So kann man für $L^\infty[\Omega; L_\#^2(Y)] \subset L^2(\Omega \times Y)$ ein Gegenbeispiel konstruieren, siehe [CD99], p.175/176

andererseits ist die rechte Seite im letzten Ausdruck nach (2.10) gleichmäßig in ε beschränkt und damit folgt

$$| \langle U_0, \phi \rangle_{L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)], L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)]} | \leq \text{const} \quad \forall \phi \in L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)]. \quad (2.13)$$

Da $L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)]$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$ ist, lässt sich U_0 stetig auf $L^2(\Omega \times Y)$ fortsetzen. Im Hilbertraum $L^2(\Omega \times Y)$ gilt der Riesz'sche Darstellungssatz, d.h. es existiert ein eindeutiges Element $u \in L^2(\Omega \times Y)$, so dass

$$\langle U_0, \phi \rangle = \int_{\Omega \times Y} u(x, y) \phi(x, y) dx dy. \quad (2.14)$$

Kombiniert man die letzte Gleichung mit (2.12), so erhält man

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega \times Y} u(x, y) \phi(x, y) dx dy \quad (2.15)$$

und dies ist, wenn man $u_0 = |Y|u$ setzt, gerade die Definition von $u^{\varepsilon} \xrightarrow{2} u_0$. \square

Im Folgenden werden nun einige Aussagen über den Zusammenhang zwischen 2-Skalen-Konvergenz und schwacher bzw. starker Konvergenz zusammengestellt.

Lemma I.1 Sei u^{ε} eine Folge in $L^2(\Omega)$, so dass $u^{\varepsilon} \xrightarrow{2} u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$. Dann gilt:

a) Mittelwerteigenschaft

$$u^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \tilde{u}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y u_0(x, y) dy, \quad (2.16)$$

b)

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{|Y|} \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Beweis

a) Um die erste Aussage zu beweisen, genügt es beliebige Testfunktionen aus $L^2(\Omega)$ zu betrachten, die nur von x abhängen. Denn dann gilt $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \phi(x) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) dy \phi(x) dx$ für beliebiges $\phi \in L^2(\Omega)$, also $u^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{1}{|Y|} \int_Y u_0(x, y) dy$. Der Mittelwert \tilde{u} ist eindeutig, somit ist (2.16) unabhängig von der Wahl einer Teilfolge.

b) Die erste Ungleichung in (2.17) folgt aus der Jensen'schen Ungleichung. Um das zweite " \leq " zu zeigen, betrachtet man für beliebiges $\phi \in L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)]$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} (u^{\varepsilon}(x) - \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}))^2 dx \\ &\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x)^2 dx - \frac{2}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dy dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \phi(x, y)^2 dy dx. \end{aligned}$$

Wir approximieren $u_0(x, y)$ durch Testfunktionen aus $L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)]$. Dies ist möglich, da $L^2[\Omega; C_{\#}^0(Y)]$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$ ist. Es folgt

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y |u_0(x, y)|^2 dy dx \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x)^2 dx. \quad \square$$

Die Ungleichungen (2.17) kann man anschaulich so interpretieren, dass im starken Grenzwert am meisten Information erhalten ist, am wenigsten im schwachen. Der 2-Skalen-Limes u_0 "misst" dabei die Oszillationen von u^{ε} mit "Geschwindigkeit" $\frac{x}{\varepsilon}$, die in "Resonanz" mit den Oszillationen der Testfunktionen sind. \tilde{u} mittelt hingegen über alle Oszillationen hinweg.

Als Nächstes folgen einige Aussagen über die 2-Skalen-Konvergenz von beschränkten Folgen in $H^1(\Omega)$.

Lemma I.2 (2-Skalen-Limiten des Gradienten)

i) Seien u^{ε} und ∇u^{ε} beschränkt in $L^2(\Omega)$. Dann existiert ein $u \in H^1(\Omega)$, schwacher Limes von u in $H^1(\Omega)$, und ein $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$, so dass für eine geeignete Teilfolge gilt:

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}(x) &\rightharpoonup u(x), \\ \nabla u^{\varepsilon}(x) &\rightharpoonup \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y). \end{aligned}$$

ii) Seien u^{ε} und $\varepsilon \nabla u^{\varepsilon}$ beschränkt in $L^2(\Omega)$. Dann existiert ein $u_0 \in L^2[\Omega; H_{\#}^1(Y)]$, 2-Skalen-Limes von u^{ε} , so dass für eine geeignete Teilfolge gilt:

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}(x) &\rightharpoonup u_0(x, y), \\ \varepsilon \nabla u^{\varepsilon}(x) &\rightharpoonup \nabla_y u_0(x, y). \end{aligned}$$

Beweis i) Nach dem Kompaktheitssatz (Theorem I.2) existiert sowohl ein $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, so dass für eine Teilfolge, wiederum mit u^{ε} bezeichnet, $u^{\varepsilon} \rightharpoonup u_0$, als auch ein $\mu_0 \in (L^2(\Omega \times Y))^N$, so dass für eine Teilfolge, ebenfalls mit ∇u^{ε} bezeichnet, $\nabla u^{\varepsilon} \rightharpoonup \mu_0$. Für alle $\phi \in C_0^{\infty}[\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)]$ bzw. $\psi \in (C_0^{\infty}[\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)])^N$ gilt dann

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dy dx \quad (2.18)$$

$$\text{bzw. } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \mu_0(x, y) \psi(x, y) dy dx. \quad (2.19)$$

Durch partielle Integration des Integrals auf der linken Seite von (2.19), folgt

$$- \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \left\{ \nabla_x \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} dx = \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx$$

und nach Multiplikation mit ε , bekommt man für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \nabla_y \cdot \psi(x, y) dy dx = 0. \quad (2.20)$$

Wir integrieren (2.20) noch einmal partiell und bekommen $\nabla_y u_0 = 0$, da $\psi \in (C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y)))^N$ beliebig gewählt werden kann. Damit ist u_0 unabhängig von y und nach Lemma I.1 a) folgt $u_0(x, y) = u(x)$, wobei u der schwache Limes von u^ε in $H^1(\Omega)$ ist.

Wir wählen jetzt eine y -divergenzfreie Testfunktion ψ und betrachten in (2.19) den Term der Ordnung ε^0 :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u(x) \nabla_x \cdot \psi(x, y) dy dx.$$

Daher folgt nach partieller Integration auf der rechten Seite der letzten Gleichung

$$\int_{\Omega} \int_Y \{\mu_0(x, y) - \nabla u(x)\} \cdot \psi(x, y) dy dx = 0$$

für alle $\psi \in (C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y)))^N$ mit $\nabla_y \cdot \psi = 0$. Nach der Helmholtz-Zerlegung in H^1 sind die Funktionen, die bzgl. des L^2 -Skalarprodukts orthogonal zu den divergenzfreien Funktionen sind, genau die Gradienten (siehe [Tem84]). Also existiert ein eindeutiges $u_1 \in L^2[\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}]$, so dass

$$\mu_0(x, y) - \nabla u(x) = \nabla_y u_1(x, y)$$

und damit ist (i) gezeigt.

ii) Nach dem Kompaktheitssatz (Theorem I.2) existiert sowohl ein $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, so dass für eine Teilfolge, wiederum mit u^ε bezeichnet, $u^\varepsilon \xrightarrow{2} u_0$, als auch ein $\nu_0 \in (L^2(\Omega \times Y))^N$, so dass für eine Teilfolge, ebenfalls mit $\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ bezeichnet, $\varepsilon \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{2} \nu_0$. Für alle $\phi \in C_0^\infty[\Omega; C_\#^\infty(Y)]$ bzw. $\psi \in (C_0^\infty[\Omega; C_\#^\infty(Y)])^N$ gilt dann (2.18) bzw.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \nu_0(x, y) \cdot \psi(x, y) dy dx. \quad (2.21)$$

Durch partielle Integration auf der linken Seite von (2.21) folgt

$$-\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \{ \varepsilon \nabla_x \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \} dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \nu_0(x, y) \cdot \psi(x, y) dy dx$$

und mit (2.18) haben wir

$$- \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \nabla_y \cdot \psi(x, y) dy dx = \int_{\Omega} \int_Y \nu_0(x, y) \cdot \psi(x, y) dy dx.$$

Durch partielle Integration auf der linken Seite folgt (ii). \square

Im Allgemeinen ist der Limes von Produkten zweier 2-Skalen konvergenter Folgen nicht das Produkt der beiden 2-Skalen-Limiten. Unter gewissen zusätzlichen Annahmen gilt jedoch der folgende Satz. Ein Beweis findet sich unter [All92], Theorem 1.8.

Theorem I.3 Sei $u^\varepsilon \xrightarrow{2} u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, so dass zusätzlich

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (2.22)$$

erfüllt ist, dann gilt für ein beliebiges $v^\varepsilon \xrightarrow{2} v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$:

$$u^\varepsilon(x) v^\varepsilon(x) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{1}{|Y|} \int u_0(x, y) v_0(x, y) dy. \quad (2.23)$$

Die Bedingung (2.22) ist insbesondere für zulässige Testfunktionen erfüllt.

Damit sind wir in der Lage mit der Methode der 2-Skalen-Konvergenz Theorem I.1 zu beweisen. Ein Beweis von Theorem I.1 mit 2-Skalen-Konvergenz befindet sich im Anhang A.1.

2.6 Überblick über andere Zugänge zur Homogenisierung

Zur Lösung von Homogenisierungsproblemen existieren noch weitere Methoden, u.a. die Γ -Konvergenz nach de Giorgi und dal Maso oder die G-Konvergenz nach Spagnolo. Eine gute Übersicht über die diversen Zugänge zur Homogenisierung befindet sich in G. Allaire: *Mathematical approaches and methods [of homogenization]* [All97b].

Die Γ -Konvergenz ist auf allgemeinere Situationen anwendbar als die beiden oben ausgeführten Methoden und wird nicht nur zur Homogenisierung, sondern z.B. auch für die Störungsrechnung verwendet. Man betrachtet die Konvergenz eines von ε abhängenden minimierenden Funktionals $F^\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F_0$, allerdings bekommt man kein Verfahren, um F_0 konstruktiv berechnen zu können.

Die Methode der G-Konvergenz ist ähnlich zur H-Konvergenz, mit dem Unterschied, dass sie auf symmetrische elliptische Operatoren beschränkt ist. Dafür muß im Gegensatz zur Energie-Methode die Konvergenz der Flüsse nicht gesondert untersucht werden.

Teil II

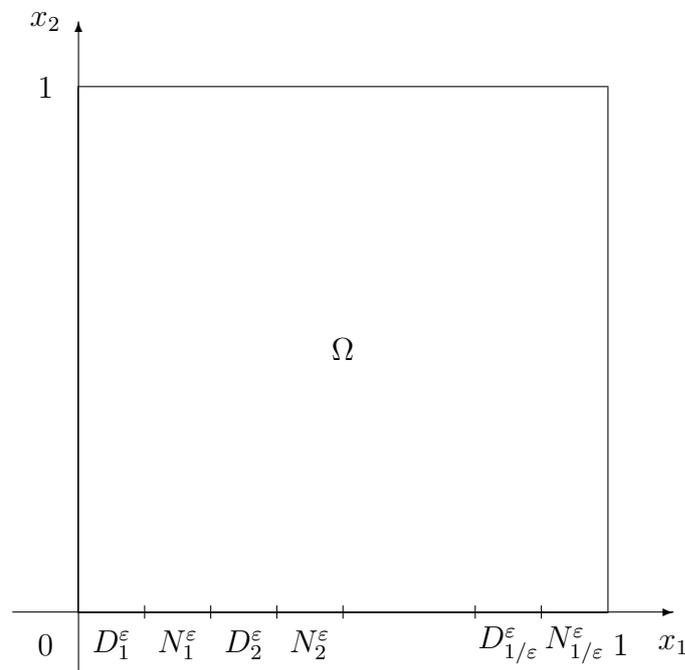
Homogenisierung periodischer Randbedingungen

Wir untersuchen ein Problem mit oszillierenden Randbedingungen. Ein ähnliches Problem wurde in einem Artikel von Filo und Luckhaus betrachtet. In [FL95] wurde jedoch die Diffusionsgleichung anstatt eines elliptischen Problems betrachtet und ohne Verwendung der Methode der 2-Skalen-Konvergenz. Unser Ziel ist die Herleitung einer effektiven Randbedingung und ein *Corrector Result*.

3 Der Entwicklungsterm nullter Ordnung

3.1 Problem A

Uns interessiert folgende Situation (Skizze mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$):



Dabei ist das betrachtete Gebiet $\Omega := (0,1)^2$. Auf dem unteren Rand $\Gamma := (0,1) \times \{0\}$ betrachten wir Randbedingungen, die sich periodisch abwechseln. Der Rand mit Dirichlet-Randbedingungen sei

$$\Gamma_1^\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{1/\varepsilon} D_i^\varepsilon,$$

wobei

$$D_i^\varepsilon := \left(\varepsilon(i-1), \varepsilon\left(i - \frac{1}{2}\right)\right] \times \{0\} \quad \forall i \in \{1; \dots; \varepsilon^{-1}\} \subset \mathbb{N} \quad (3.1)$$

bzw. der Rand mit Neumann-Randbedingungen

$$\Gamma_2^\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{1/\varepsilon} N_i^\varepsilon,$$

wobei

$$N_i^\varepsilon := \left(\varepsilon\left(i - \frac{1}{2}\right), \varepsilon i\right] \times \{0\} \quad \forall i \in \{1; \dots; \varepsilon^{-1} - 1\} \subset \mathbb{N} \quad (3.2)$$

und

$$N_{\varepsilon^{-1}}^\varepsilon := \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \times \{0\}. \quad (3.3)$$

Dabei sei immer $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Es gilt somit $\Gamma = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$ für alle ε . Ist der obere Index $\varepsilon = 1$, unterdrücken wir diesen aufgrund der besseren Übersichtlichkeit und benutzen anstatt Γ_j^1 die Notation $\Gamma_j, j \in \{1; 2\}$. Desweiteren bezeichne $\Pi := (0, 1) \times \{1\} \subset \partial\Omega$ den oberen Rand.

Wir betrachten die Lösung $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ des folgenden Problems A zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$:

$$\Delta u^\varepsilon = f \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.4)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_2^\varepsilon, \quad (3.5)$$

$$\partial_2 u^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2^\varepsilon. \quad (3.6)$$

Theorem II.1 Es existiert eine eindeutige Lösung u^ε zu Problem A. Es gibt eine Teilfolge, wiederum mit u^ε bezeichnet, so dass für $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\text{a) } u^\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ in } L^2(\Omega), \quad u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ in } H^1(\Omega)$$

b) Es gilt folgender verbesserter Spursatz

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (3.7)$$

für eine nur von f abhängige Konstante C .

c) $u_0 \in H^1(\Omega)$ ist die eindeutige Lösung von

$$\Delta u_0 = f \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.8)$$

$$u_0 = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (3.9)$$

und in a) konvergiert jeweils die ganze Folge u^ε und nicht nur eine Teilfolge.

Beweis

a) Das Problem A hat für alle $\varepsilon > 0$ nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige Lösung im Hilbertraum $H^1(\Omega)$, denn die Bilinearform $a(\varphi, \phi) = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\phi$ ist stetig und koerziv, wobei letztere Aussage aus der allgemeinen Poincaré-Ungleichung folgt.

Nach Testen von Gleichung (3.4) mit u^ε und anschließender Integration über Ω erhält man

$$\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \int_\Omega |f u^\varepsilon| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.10)$$

Daraus folgt mit der allgemeinen Poincaré-Ungleichung, dass $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ bzw. wiederum mit Poincaré

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C}(1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.11)$$

Aus (3.11) folgt: $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ ist gleichmäßig beschränkt, also existiert eine Teilfolge $u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ in $H^1(\Omega)$. Nach der Rellich-Einbettung ([Alt99], A 6.4, S. 244) gilt dann für eine Teilfolge auch $u^\varepsilon \rightarrow u_0$ in $L^2(\Omega)$.

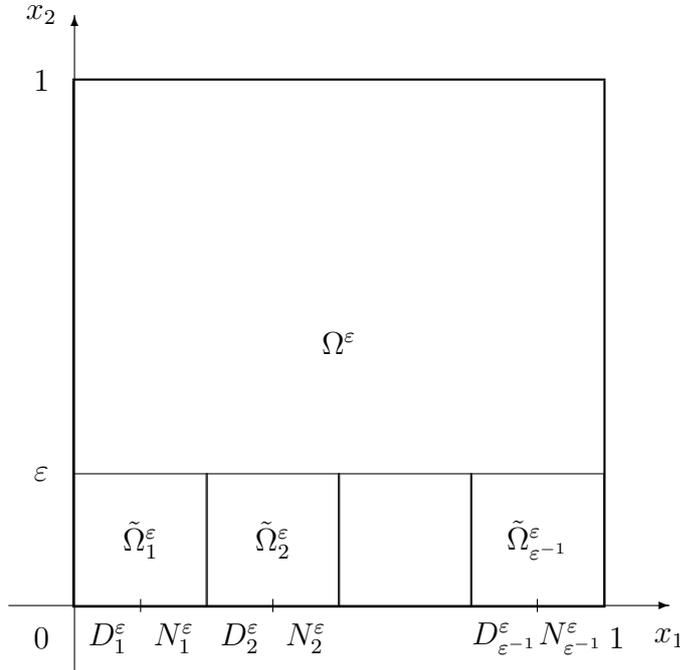
b) Auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ folgt die Aussage direkt aus $u^\varepsilon|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Um die Behauptung auch für Γ zu beweisen, überdecken wir eine Schicht des unteren Randes Γ mit Quadraten

$$\tilde{\Omega}_i^\varepsilon := (D_i^\varepsilon \cup N_i^\varepsilon) \times (0, \varepsilon) \quad \forall i \in \{1, \dots, \varepsilon^{-1}\} \subset \mathbb{N},$$

wobei D_i^ε und N_i^ε für alle $i \in \{1, \dots, \varepsilon^{-1}\}$ wie in (3.1) - (3.3) definiert sind.

Skizze (mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$):



Wir nehmen uns ein beliebiges dieser Quadrate $\tilde{\Omega}_i$ heraus, und reskalieren es mit $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) := (x_1\varepsilon^{-1} - (i-1), x_2\varepsilon^{-1})$. Damit betrachten wir also wieder das Gebiet $\Omega = (0, 1)^2$. Dabei ist Γ_1 der untere Rand mit Dirchlet-Randbedingung bzw. Γ_2 der untere Rand mit Neumann-Randbedingung. Desweiteren bezeichne

$$U_i^\varepsilon(y_1, y_2) := u^\varepsilon(\varepsilon(y_1 + i - 1), \varepsilon y_2).$$

Man bekommt für jedes $y_2 \in [0, 1]$ die Abschätzung

$$\|U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2 \left(\int_0^1 |U_i^\varepsilon(y_1, 0) - U_i^\varepsilon(y_1, y_2)|^2 dy_1 + \int_0^1 |U_i^\varepsilon(y_1, y_2)|^2 dy_1 \right).$$

Durch Integration über y_2 folgt

$$\|U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2 \int_0^1 \int_0^1 |U_i^\varepsilon(y_1, 0) - U_i^\varepsilon(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 + 2 \|U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.12)$$

Wir betrachten den ersten Term auf der rechten Seite näher und definieren $F_i^\varepsilon(y_1, y_2) := U_i^\varepsilon(y_1, 0) - U_i^\varepsilon(y_1, y_2)$. Insbesondere gilt dann $F_i^\varepsilon(y_1, 0) = 0$.

$$2 \int_0^1 \int_0^1 |U_i^\varepsilon(y_1, 0) - U_i^\varepsilon(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 = 2 \int_0^1 \int_0^1 |F_i^\varepsilon(y_1, y_2) - F_i^\varepsilon(y_1, 0)|^2 dy_1 dy_2$$

Weil $F_i^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ ist, folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in Sobolev-Räumen, zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \int_0^1 |U_i^\varepsilon(y_1, 0) - U_i^\varepsilon(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^{y_2} \partial_t F_i^\varepsilon(y_1, t) dt \right|^2 dy_1 dy_2 \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 y_2 \int_0^1 |\partial_t U_i^\varepsilon(y_1, t)|^2 dt dy_1 dy_2 \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{\leq} \|\nabla_y U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Wir nutzen jetzt aus, dass wir auf einem Teil von $\partial\tilde{\Omega}_i^\varepsilon$ Dirichlet-Randbedingungen haben und deswegen lässt sich die allgemeine Poincaré-Ungleichung anwenden. Damit folgt für den zweiten Term der rechten Seite in (3.12):

$$2\|U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \text{const} \|\nabla_y U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.13)$$

Also erhält man für eine geeignete Konstante $C > 0$

$$\|U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C \|\nabla_y U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.14)$$

Wir summieren jetzt über die $\tilde{\Omega}_i^\varepsilon$ auf:

$$\sum_{i=1}^{1/\varepsilon} \|U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 \stackrel{(3.14)}{\leq} C \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} \|\nabla_y U_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Bei der Reskalierung $(y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2) := (\varepsilon(y_1 + i - 1), \varepsilon y_2)$ kürzen sich die ε aus $dy = \varepsilon^{-2} dx$ und aus $\nabla_y = \varepsilon \nabla_x$, also folgt

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_{L^2(D_i^\varepsilon \cup N_i^\varepsilon)}^2 \leq C \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\tilde{\Omega}_i^\varepsilon)}^2$$

und daraus

$$\frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.15)$$

für eine geeignete Konstante C gilt. Aus der *a priori* Abschätzung (3.11) folgt dann

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq \tilde{C}\sqrt{\varepsilon}(1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}).$$

c) Gleichung (3.9) für die Randbedingung folgt direkt aus b). Betrachte für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ die schwache Formulierung des Problems A:

$$-\int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi.$$

Auf der linken Seite konvergiert nach a) für eine geeignete Teilfolge $\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla u_0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int_{\Omega} \Delta u_0 \phi = \int_{\Omega} f \phi.$$

Die Randintegrale verschwanden, da ϕ mit kompaktem Träger gewählt wurde und es folgt (3.8), da die letzte Gleichung für beliebiges ϕ gilt. Als Lösung der Poisson-Gleichung ist u_0 eindeutig.

Aus der Eindeutigkeit der Lösung u_0 schließt man *a posteriori*, dass die Konvergenzen in a) nicht nur für eine Teilfolge von u^ε , sondern für die ganze Folge u^ε gelten. \square

4 Der Entwicklungsterm erster Ordnung

4.1 Problem B*

Unser Ziel ist ein *Corrector Result*, d.h. $\|u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^r)$ für ein geeignetes v_0 und ein $r \in \mathbb{R}^+$. Dazu betrachten wir den nächsten Entwicklungsterm $v_*^\varepsilon := \frac{u^\varepsilon - u_0}{\varepsilon}$, also die Lösung $v_*^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ des folgenden Problems B*:

$$\Delta v_*^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$v_*^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_2^\varepsilon, \quad (4.2)$$

$$\partial_n v_*^\varepsilon = \frac{g}{\varepsilon} \quad \forall x \in \Gamma_2^\varepsilon, \quad (4.3)$$

wobei $\partial_n = n \cdot \nabla$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normale n ist und wir

$$g(x_1) := -\partial_n u_0(x_1, 0) = \partial_2 u_0(x_1, 0) \in H^{1/2}(\Gamma)$$

definiert haben.

Dass $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ ist, sieht man wie folgt ein: Nach der Regularitätstheorie von Friedrichs (siehe [Alt99], A 10.3, S. 398) gilt $u_0 \in H^2(\Omega)$, da Ω Lipschitz-Rand hat und $f \in L^2(\Omega)$ ist. Nach dem Spursatz ist $\partial_2 u_0$ in $H^{1/2}(\Gamma)$, denn es gilt $\|\partial_2 u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^2(\Omega)}$. Nach dem Sobolev-Einbettungssatz in Hölder-Räume (siehe [Alt99], 8.13, S. 319) folgt $u_0 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $0 \leq \alpha < 1$ und damit auch die Stetigkeit der Lösung des homogenisierten Problems A.

Um mit Fourierreihen auf Γ arbeiten zu können, betrachtet man statt Problem B* das folgende Problem B, bei dem man auf dem linken und rechten Rand die Dirichlet-Randbedingungen durch periodische Randbedingungen ersetzt hat. Den Fehler, den wir dabei in Kauf nehmen, untersuchen wir in Kapitel 6.

4.2 Problem B

Wir betrachten also die Lösung $v^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ des folgenden Problems B, zu gegebenem $g \in H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\Delta v^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.4)$$

$$v^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^\varepsilon \cup \Pi, \quad (4.5)$$

$$\partial_n v^\varepsilon = \frac{g}{\varepsilon} \quad \forall x \in \Gamma_2^\varepsilon, \quad (4.6)$$

$$v^\varepsilon \quad 1\text{-periodisch in } x_1. \quad (4.7)$$

Theorem II.2

a) Das Problem (4.4) - (4.7) hat eine eindeutige Lösung v^ε für festes ε .

b) Für ε gegen Null konvergiert $v^\varepsilon \rightharpoonup \tilde{v}_0$ schwach in $L^2(\Omega)$.

c) \tilde{v}_0 ist die eindeutige schwache Lösung⁵ für ein von g unabhängiges $a_0 \in \mathbb{R}$:

$$\Delta \tilde{v}_0 = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.8)$$

$$\tilde{v}_0 = 0 \quad \forall x \in \Pi, \quad (4.9)$$

$$\tilde{v}_0 = a_0 g \quad \forall x \in \Gamma, \quad (4.10)$$

$$\tilde{v}_0 \quad 1\text{-periodisch in } x_1. \quad (4.11)$$

Dabei versteht man unter einer schwachen Lösung \tilde{v}_0 dieses Problems, dass

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_0 \Delta \phi = \int_{\Gamma} a_0 g \partial_2 \phi \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^2(\Omega)}$$

erfüllt ist.

Wie man später sieht, ist a_0 der nullte Fourierkoeffizient von $\tilde{\chi}_0|_{\Gamma}$, das heisst der Mittelwert auf Γ der Zelllösung $\tilde{\chi}_0$, die wir in Problem D untersuchen werden.

d) \tilde{v}_0 läßt sich explizit angeben:

$$\tilde{v}_0(x_1, x_2) = a_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} g_k \exp(2\pi i k x_1) \frac{\sinh(2\pi k(1 - x_2))}{\sinh(2\pi k)} + a_0 g_0(1 - x_2), \quad (4.12)$$

wobei $g_k, k \in \mathbb{Z}$ die Koeffizienten der Fourierreihe von g auf Γ sind.

Beweis

a) Für festes $\varepsilon > 0$ ist $\frac{g}{\varepsilon} \in L^2(\Gamma)$ und nach dem Satz von Lax-Milgram hat Problem B eine eindeutige Lösung.

b) Wir zeigen zuerst die Existenz eines schwachen Limes \tilde{v}_0 in $L^2(\Gamma)$. Sei $V^\varepsilon(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Pi} = 0, \phi \text{ 1-periodisch in } x_1\}$ der Raum der Testfunktionen. Aus der schwachen Formulierung folgt nun mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\int_{\Omega} \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \phi = \int_{\Gamma_2^\varepsilon} \frac{g}{\varepsilon} \phi \quad \forall \phi \in V^\varepsilon(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla v^\varepsilon|^2 \leq \int_{\Gamma_2^\varepsilon} \left| \frac{g}{\varepsilon} v^\varepsilon \right| \leq \varepsilon^{-1} \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.13)$$

⁵Wir treffen die Konvention, dass wir schwache Limiten mit einer Tilde kennzeichnen, um sie von 2-Skalen-Limiten oder starken Limiten zu unterscheiden.

Genauso wie man in Theorem II.1 b) Gleichung (3.15) gezeigt hat, beweist man die folgende Abschätzung der Spur von v^ε mit einer von ε und v^ε unabhängigen Konstanten C_1

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.14)$$

Setzt man (4.14) auf der rechten Seite der *a priori* Abschätzung (4.13) ein, dann folgt

$$\|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}} \|g\|_{L^2(\Gamma)} \quad (4.15)$$

und mit der allgemeinen Poincaré-Ungleichung erhält man

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon}} \|g\|_{L^2(\Gamma)}, \quad (4.16)$$

wobei die Konstante C_2 von ε und v^ε unabhängig ist.

Man bekommt also keine Schranke, gleichmäßig in ε , für v^ε . Nutzen wir den verbesserten Spursatz (3.15) noch einmal auf der linken Seite von (4.15) aus, dann erhalten wir allerdings, dass v^ε gleichmäßig in ε in $L^2(\Gamma)$ beschränkt ist:

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|g\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.17)$$

Also existiert eine Teilfolge $v^\varepsilon|_\Gamma \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{v}_0 \in L^2(\Gamma)$. Da wir in c) zeigen werden, dass die Lösung v_0 eindeutig ist, gilt dann, dass die ganze Folge v^ε schwach gegen \tilde{v}_0 konvergiert.

Für Theorem II.2 b) ist noch zu zeigen, dass ein schwacher Limes \tilde{v}_0 in ganz $L^2(\Omega)$ existiert. Da $v^\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ und 1-periodisch in x_1 ist, können wir v^ε auf Γ in eine Fourierreihe

$$v^\varepsilon(x_1, 0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^\varepsilon \exp(2\pi i k x_1) \quad (4.18)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k^\varepsilon = \int_0^1 \exp(-2\pi i k x_1) v^\varepsilon(x_1, 0) dx_1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

entwickeln. Dabei verwenden wir bei Skalarprodukten die Konvention, dass das linke Argument transponiert und komplex konjugiert wird.

Nach der Parseval-Gleichung gilt

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^\varepsilon|^2.$$

Um die Fourierreihe von $v^\varepsilon|_\Gamma$ auf Ω harmonisch fortzusetzen, machen wir folgenden Ansatz

$$v^\varepsilon(x_1, x_2) = c_0^\varepsilon + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \exp(2\pi i k x_1) [\beta_k^\varepsilon \exp(-2\pi k x_2) + \gamma_k^\varepsilon \exp(2\pi k x_2)] + \alpha_0^\varepsilon x_2$$

mit α_0^ε , β_k^ε und $\gamma_k^\varepsilon \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^*$.

Wir müssen noch sicherstellen, dass v^ε dann auf Π die Dirichlet-Randbedingung (4.5) erfüllt. Daraus folgt mit der folgenden Bedingung $c_k^\varepsilon = \beta_k^\varepsilon + \gamma_k^\varepsilon$, die sich aus (4.18) ergibt:

$$\alpha_0^\varepsilon = -c_0^\varepsilon, \quad \beta_k^\varepsilon = \frac{c_k^\varepsilon}{1 - \exp(-4\pi k)}, \quad \gamma_k^\varepsilon = \frac{c_k^\varepsilon}{1 - \exp(4\pi k)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Also haben wir für v^ε in Ω die Entwicklung

$$v^\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k^\varepsilon \exp(2\pi i k x_1) \frac{\sinh(2\pi k(1 - x_2))}{\sinh(2\pi k)} + c_0^\varepsilon(1 - x_2). \quad (4.19)$$

Die formal nach x_1 abgeleitete Fourierreihe von v^ε konvergiert gleichmäßig auf $\Gamma^{(\rho)} := (0, 1) \times \{\rho\}$ für alle $\rho \in (0, 1]$, denn für $n \in \mathbb{N}^*$ groß genug gilt:

$$\begin{aligned} & \sup_{x_1 \in \Gamma^{(\rho)}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \partial_{x_1} c_k^\varepsilon \exp(2\pi i k x_1) \frac{\sinh(2\pi k(1 - \rho))}{\sinh(2\pi k)} \right| \\ & \leq 2\pi \sup_{x_1 \in \Gamma^{(\rho)}} \sum_{k=n+1}^{\infty} k |c_k^\varepsilon| \frac{1 - \exp(-4\pi k(1 - \rho))}{1 - \exp(-4\pi k)} \exp(-2\pi k \rho) \\ & \leq 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} k |c_k^\varepsilon| \exp(-2\pi k \rho) \\ & \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} 2\pi \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} (n+1) \exp(-2\pi(n+1)\rho) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Um die gleichmäßige Konvergenz für $n \rightarrow -\infty$ zu zeigen, benutzt man $\sinh(z) = -\sinh(-z)$ und argumentiert wie oben.

Weil der Term $\exp(-2\pi k x_2) - \exp(-4\pi k) \exp(2\pi k x_2)$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ in x_2 streng monoton fallend ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz der formal abgeleiteten Reihe in $\{x \in \Omega \mid x_2 > \rho\}$ aus der auf $\Gamma^{(\rho)}$, $\rho \in (0, 1]$. Die nach x_1 formal abgeleitete Reihe ist z.B. im Punkt $(x_1, \frac{1}{2})$ für alle $x_1 \in (0, 1)$ absolut konvergent. Also darf man die Summation und die Ableitung nach x_1 vertauschen. Analog bekommt man, dass man den Laplace-Operator und die Reihenbildung vertauschen darf, denn $(1 + k^2) \exp(-2\pi k \rho)$ bzw. $(1 + k^2) \exp(-2\pi k \rho) / \tanh(2\pi k)$ ist summierbar für $k \in \mathbb{N}^*$.

Also gilt $\Delta v^\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und unser Ansatz für v^ε löst Problem B, da man $v^\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ auf Γ vorgeben kann.

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz dürfen wir Summation und Integration vertauschen:

$$\begin{aligned}
& \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma^{(\rho)})}^2 = \\
&= \int_0^1 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^*} \bar{c}_k^\varepsilon c_l^\varepsilon \exp(2\pi i(l-k)x_1) dx_1 \frac{\sinh(2\pi k(1-\rho))}{\sinh(2\pi k)} \frac{\sinh(2\pi l(1-\rho))}{\sinh(2\pi l)} + \\
&+ 2 \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} (\bar{c}_k^\varepsilon \exp(-2\pi i k x_1) + c_k^\varepsilon \exp(2\pi i k x_1)) dx_1 \frac{\sinh(2\pi k(1-\rho))}{\sinh(2\pi k)} c_0^\varepsilon (1-\rho) + \\
&+ \int_0^1 |c_0^\varepsilon|^2 (1-\rho)^2 dx_1 \\
&= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^*} \bar{c}_k^\varepsilon c_l^\varepsilon \delta_{l,k} \frac{\sinh(2\pi k(1-\rho))}{\sinh(2\pi k)} \frac{\sinh(2\pi l(1-\rho))}{\sinh(2\pi l)} + |c_0^\varepsilon|^2 (1-\rho)^2 \stackrel{\text{Parseval}}{\leq} \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

für alle $\rho \in [0, 1]$ wobei die Ungleichung in der letzten Zeile aus der strengen Monotonie des Sinus Hyperbolicus folgt.

Wir integrieren die L^2 -Abschätzung für die Schnitte $\Gamma^{(\rho)}$ über ρ auf:

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma^{(\rho)})}^2 d\rho \leq \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Damit haben wir die gesuchte L^2 -Abschätzung für v^ε in ganz Ω bewiesen:

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Gamma)} \tag{4.22}$$

und es folgt die Existenz einer Teilfolge $v^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{v}_0 \in L^2(\Omega)$. $\square_{\text{Th. II.2 a), b)}$

c) Wegen $\Delta v^\varepsilon = 0$ in Ω für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\Delta \tilde{v}_0 = 0$. Ebenso folgen die Randbedingungen auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Als Lösung der Laplace-Gleichung ist \tilde{v}_0 eindeutig.

Bleibt noch die effektive Randbedingung auf Γ zu zeigen, um Theorem II.2 c) zu beweisen. Dies erfolgt unter Betrachtung der Probleme C und D in den Abschnitten 4.3 und 4.4. Dazu muss man wie im Artikel [FL95] das Gebiet Ω reskalieren.

d) Wir können $g \in L^2(\Gamma)$ 1-periodisch in x_1 fortsetzen und somit in eine Fourierreihe $g(x_1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \exp(2\pi i k x_1)$ mit Fourierkoeffizienten $g_k = \int_0^1 \exp(-2\pi i k x_1) g(x_1) dx_1$, $k \in \mathbb{Z}$ entwickeln. Man rechnet dann nach, dass die Reihe (4.12) Problem D erfüllt.

$\square_{\text{Th. II.2 d)}$

4.3 Problem C

Hier sind beide Variablen reskaliert. Man definiert

$$\begin{aligned}\Omega^\varepsilon &:= (0, 1/\varepsilon)^2, \\ \gamma^\varepsilon &:= (0, 1/\varepsilon) \times \{0\}, \\ P^\varepsilon &:= (0, 1/\varepsilon) \times \{1/\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Analog wie oben Γ_1^ε und Γ_2^ε definiert man:

$$\begin{aligned}\gamma_1^\varepsilon &:= \{y_1 \in \gamma^\varepsilon \mid \varepsilon y_1 \in \Gamma_1^\varepsilon\}, \\ \gamma_2^\varepsilon &:= \gamma^\varepsilon \setminus \gamma_1^\varepsilon.\end{aligned}$$

$w^\varepsilon(y) := v^\varepsilon(\varepsilon y) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ löst die gegenüber Problem B reskalierte Partielle Differentialgleichung

$$\Delta_y w^\varepsilon(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega^\varepsilon \quad (4.23)$$

$$w^\varepsilon(y) = 0 \quad \forall y \in \gamma_1^\varepsilon \cup P^\varepsilon, \quad (4.24)$$

$$\partial_{n_y} w^\varepsilon(y) = g(\varepsilon y_1) \quad \forall y \in \gamma_2^\varepsilon, \quad (4.25)$$

$$w^\varepsilon(y) \quad \frac{1}{\varepsilon} \text{- periodisch in } y_1, \quad (4.26)$$

wobei $\partial_{n_y} = n \cdot \nabla_y$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normale n_y bezeichnet.

Wegen $\nabla_y = \varepsilon \nabla_x$ verschwindet der Faktor ε^{-1} , der noch in (4.6) auftauchte, in (4.25).

Die Existenz einer Lösung w^ε und eines schwachen Limes $w_0 := v_0(\varepsilon y) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ ist äquivalent zur Existenz von v^ε bzw. \tilde{v}_0 in Problem B.

4.4 Problem D und das Zellproblem

Wir nehmen aus dem Gebiet Ω^ε vertikale Streifen

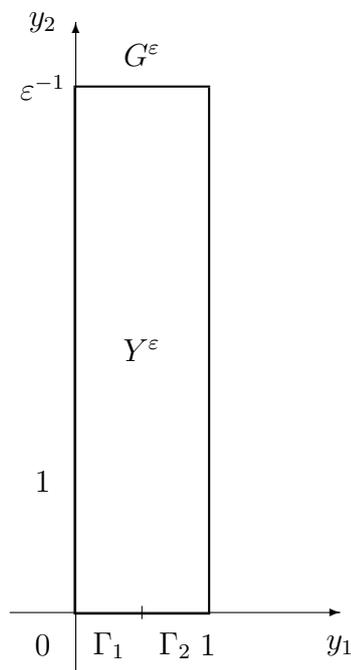
$$Y_i^\varepsilon := (i-1, i) \times (0, 1/\varepsilon) \quad \forall i \in \{1; \dots; \varepsilon^{-1}\} \subset \mathbb{N}$$

der Breite 1 heraus und substituieren $(y_1, y_2) \mapsto (y_1 - i + 1, y_2)$ für ein beliebiges i und betrachten somit

$$Y^\varepsilon := Y_1^\varepsilon = (0, 1) \times (0, 1/\varepsilon).$$

Desweiteren definieren wir $G^\varepsilon := (0, 1) \times \{1/\varepsilon\}$.

Skizze von Y^ε (mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$):



Aus Problem C bekäme man somit durch Einschränken auf Y ein Problem, das noch von $g(\varepsilon y_1)$ als Neumann-Randbedingung und von i abhängig wäre. Wir setzen im folgenden $\partial_{n_y} \chi_i^\varepsilon = \text{const}$ auf Γ , so dass wir die Streifen unabhängig voneinander betrachten können. Dabei ist $\chi^\varepsilon \in H^1(Y^\varepsilon)$ die Lösung des folgenden Problems D:

$$\Delta_y \chi^\varepsilon(y) = 0 \quad \forall y \in Y^\varepsilon, \quad (4.27)$$

$$\chi^\varepsilon(y) = 0 \quad \forall y \in \Gamma_1, \quad (4.28)$$

$$\partial_{n_y} \chi^\varepsilon(y) = 1 \quad \forall y \in \Gamma_2, \quad (4.29)$$

$$\chi^\varepsilon(y) = 0 \quad \forall y \in G^\varepsilon, \quad (4.30)$$

$$\chi^\varepsilon(y) \quad 1\text{-periodisch in } y_1. \quad (4.31)$$

Theorem II.3

a) Es existiert eine eindeutige Lösung χ^ε von Problem D und für χ^ε gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|\nabla_y \chi^\varepsilon\|_{L^2(Y^\varepsilon)} \leq C, \quad (4.32)$$

$$\|\chi^\varepsilon\|_{L^2(Y^\varepsilon)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (4.33)$$

$$\|\chi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C. \quad (4.34)$$

b) χ^ε konvergiert schwach gegen $\tilde{\chi}_0$ und dieses $\tilde{\chi}_0$ ist die eindeutige Lösung des **Zellproblems**:

$$\Delta_y \tilde{\chi}_0(y) = 0 \quad \forall y \in Y, \quad (4.35)$$

$$\tilde{\chi}_0(y) = 0 \quad \forall y \in \Gamma_1, \quad (4.36)$$

$$\partial_{n_y} \tilde{\chi}_0(y) = 1 \quad \forall y \in \Gamma_2, \quad (4.37)$$

$$\tilde{\chi}_0(y) \xrightarrow{y_2 \rightarrow \infty} a_0, \quad (4.38)$$

$$\tilde{\chi}_0(y) \quad 1\text{-periodisch in } y_1. \quad (4.39)$$

Man hat die folgenden Abschätzungen:

$$\|\nabla_y \tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y)} \leq C, \quad (4.40)$$

$$\|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y^\varepsilon)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (4.41)$$

$$\|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)} \leq C. \quad (4.42)$$

Beweis

a) Die Existenz einer eindeutigen Lösung χ^ε folgt mit dem Satz von Lax-Milgram. Man findet jedoch keine in ε gleichmäßige $L^2(Y^\varepsilon)$ -Schranke.

Wenn man in die schwache Formulierung von Problem D ((4.27)-(4.31)) χ^ε als Testfunktion einsetzt, erhält man

$$\int_{Y^\varepsilon} \nabla_y \chi^\varepsilon \cdot \nabla_y \chi^\varepsilon = \int_{\Gamma_2} \chi^\varepsilon$$

und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|\nabla_y \chi^\varepsilon\|_{L^2(Y^\varepsilon)}^2 \leq \|\chi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.43)$$

Nach Definition von Y sind wir somit in der Situation des Beweises von Theorem II.1 b). Dort hatten wir die Abschätzung (3.14) gezeigt gehabt. Es folgt mit einer von ε unabhängigen Konstanten C

$$\|\chi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|\nabla_y \chi^\varepsilon\|_{L^2((0,1)^2)} \leq C \|\nabla_y \chi^\varepsilon\|_{L^2(Y^\varepsilon)}. \quad (4.44)$$

Wir setzen (4.44) auf der rechten Seite von (4.43) ein und bekommen somit

$$\|\nabla_y \chi^\varepsilon\|_{L^2(Y^\varepsilon)} \leq C. \quad (4.45)$$

Also gilt (4.32) und mit (4.44) ist auch (4.34) bewiesen.

Wir können die 1-periodische Funktion $\chi^\varepsilon \in L^2(\Gamma)$ in eine Fourierreihe entwickeln. Da χ^ε achsensymmetrisch bzgl. $y_1 = \frac{1}{4}$ ist, reicht es die Fourierreihe nach Basisfunktionen des Typs $\cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4}))$ zu entwickeln:

$$\chi^\varepsilon(y_1, 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^\varepsilon \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4}))$$

mit Fourierkoeffizienten

$$a_k^\varepsilon = 4 \int_{1/4}^{3/4} \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \chi^\varepsilon(y_1, 0) dy_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{bzw. } a_0^\varepsilon = \bar{\chi}^\varepsilon := 2 \int_{1/2}^{3/4} \chi^\varepsilon(y_1, 0) dy_1.$$

Da χ^ε (4.30) erfüllt, folgt für die Fortsetzung der Fourierreihe auf das ganze Gebiet Y^ε

$$\chi^\varepsilon(y) = a_0^\varepsilon(1 - \varepsilon y_2) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k^\varepsilon \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \frac{\sinh(2\pi k(\frac{1}{\varepsilon} - y_2))}{\sinh(2\pi k \frac{1}{\varepsilon})}. \quad (4.46)$$

Ebenso wie in Theorem II.2 b) bekommt man, dass man die Summation und den Laplace-Operator vertauschen kann. Dies zeigt, dass das oben konstruierte χ^ε Problem D löst.

(4.33) rechnet man mit Hilfe der Reihenentwicklung nach. Da wir diese Abschätzung im Weiteren nicht mehr verwenden werden, verzichten wir darauf, diese Schritte hier auszuführen.

b) Wir definieren den Funktionenraum $W(Y^\varepsilon) = \{\phi \mid \phi \in L^2(\Gamma), \nabla_y \phi \in L^2(Y^\varepsilon)\} \supset H^1(Y^\varepsilon)$, versehen mit der Norm $\|\phi\|_{W(Y^\varepsilon)} := \|\phi\|_{L^2(\Gamma)} + \|\nabla_y \phi\|_{L^2(Y^\varepsilon)}$.

Wir haben nach a) eine in ε gleichmäßige Schranke in $W(Y^\varepsilon)$ für χ^ε gefunden. Sei $\eta := \{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige monoton fallende Nullfolge mit $\eta_k^{-1} \in \mathbb{N}$. Sei η_1 fest, dann hat man auch eine Teilfolge $\chi^{\varepsilon, \eta_1} := \chi^\varepsilon|_{Y^{\eta_1}}$ die gegen die eindeutige Lösung $\chi^{0, \eta_1} \in W(Y^{\eta_1})$ konvergiert. Betrachten wir jetzt η_2 . Dann existiert eine Teilfolge $\chi^{\varepsilon, \eta_2}$ von $\chi^{\varepsilon, \eta_1}$, so dass $\chi^{\varepsilon, \eta_2} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \chi^{0, \eta_2} \in W(Y^{\eta_2})$. Nach Konstruktion gilt $\chi^{0, \eta_1} = \chi^{0, \eta_2}$ in Y^{η_1} . So findet man induktiv eine Familie von Folgen $\chi^{\varepsilon, \eta}$. Wählt man aus dieser Familie von Folgen die Diagonalfolge $\chi^{\varepsilon, \varepsilon}$ aus, dann konvergiert diese für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen ein $\tilde{\chi}_0 \in W(Y)$. Damit sind (4.40) und (4.42) bewiesen.

Aus (4.27) - (4.29) bekommt man $\Delta_y \tilde{\chi}_0 = 0$ in Y sowie $\partial_{y_2} \tilde{\chi}_0 = 1$ auf Γ_2 bzw. $\tilde{\chi}_0 = 0$ auf Γ_1 . Auch die Periodizität in y_1 bleibt erhalten.

Untersuchen wir das asymptotische Verhalten der Zelllösung $\tilde{\chi}_0$ für $y_2 \rightarrow \infty$.

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz kann man in (4.46) Reihen- und Grenzwertbildung vertauschen und es folgt

$$\tilde{\chi}_0(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \exp(-2\pi k y_2) \quad (4.47)$$

mit Fourierkoeffizienten

$$a_k = 4 \int_{1/4}^{3/4} \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \tilde{\chi}_0(y_1, 0) dy_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{bzw. } a_0 = \tilde{\chi}_0 := 2 \int_{1/2}^{3/4} \chi^\varepsilon(y_1, 0) dy_1.$$

und mit der gleichen Begründung wie im letzten Schritt folgt daraus

$$\lim_{y_2 \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_0(y) = a_0.$$

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Zelllösung $\tilde{\chi}_0$. Sei \tilde{X}_0 eine weitere Zelllösung, $\tilde{X}_0 \neq \tilde{\chi}_0$ und $\delta := \tilde{\chi}_0 - \tilde{X}_0$.

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$j_m(y_2) := \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq y_2 < m \\ m+1-y_2 & ; \quad m \leq y_2 < m+1 \\ 0 & ; \quad m+1 \leq y_2 \end{cases} .$$

Aus dem Zellproblem folgt

$$\int_Y \nabla_y \delta \cdot \nabla_y (\delta_c j_m) = 0$$

und daraus

$$0 \leq \int_{Y^{1/(m+1)}} |\nabla_y \delta|^2 j_m = \int_0^1 \int_m^{m+1} \partial_{y_2} \delta(y) \delta(y) dy_2 dy_1$$

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 [|\delta(y_1, y_2)|^2]_{y_2=m}^{m+1} dy_1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Daraus schließt man, wenn wir $m \rightarrow \infty$ gehen lassen, dass $\int_Y |\nabla_y \delta|^2 = 0$ ist und man findet mit der Dirichlet-Randbedingung auf Γ_1 , dass $\delta = 0$ gilt und somit ist die Eindeutigkeit der Zelllösung gezeigt.

Aus der Eindeutigkeit der Zelllösung folgt wiederum, dass nicht nur eine Teilfolge von χ^ε schwach gegen $\tilde{\chi}_0$ konvergiert, sondern dass dies für die ganze Folge χ^ε gilt.

Zu zeigen ist noch die Abschätzung (4.41). Man rechnet nach, dass

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma(\rho))}^2 = \\
& = a_0^2 + 2a_0 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \int_0^1 \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) dy_1 \exp(-2\pi k\rho) + \\
& \quad + \sum_{k, l \in \mathbb{N}^*} a_k a_l \int_0^1 \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \cos(2\pi l(y_1 - \frac{1}{4})) dy_1 \exp(-2\pi(k+l)\rho) \\
& = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, l \in \mathbb{N}^*} a_k a_l \delta_{k, l} \exp(-2\pi(k+l)\rho) \stackrel{\text{Parseval}}{\leq} \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned} \tag{4.48}$$

für alle $\rho \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]$ und daraus folgt die gesuchte Abschätzung

$$\|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y^\varepsilon)}^2 = \int_0^{1/\varepsilon} \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma(\rho))}^2 d\rho \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

□_{Th. II.3}

Bemerkung II.1 Regularität der Zelllösung Wie in [FL95], Proposition 2 läßt sich eine verbesserte Regularität von $\tilde{\chi}_0$ zeigen:

$$\tilde{\chi}_0 \in C^0(\bar{Y}) \cap C^\infty(\{(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)\} \times \mathbb{R}_0^+).$$

Nur auf den Geraden $y_1 = 0$ und $y_1 = \frac{1}{2}$, an deren Schnittpunkten mit Γ die Randbedingungen wechseln, ist $\tilde{\chi}_0$ also keine C^∞ -Funktion. $\tilde{\chi}_0$ ist dort immerhin noch stetig.

Wir werden die letztere Aussage im weiteren jedoch nicht mehr gebrauchen und verzichten daher auf einen Beweis.

4.5 Verhalten der Zelllösung auf Γ

Wir untersuchen jetzt noch etwas genauer, wie die Spur von $\tilde{\chi}_0$ auf Γ aussieht. Wir konstruieren uns dazu eine Oberlösung Θ für alle χ^ε , die wir explizit auf Γ als Fourierreihe entwickeln können und so graphisch zumindest approximativ darstellen können. Wir zeigen damit außerdem eine obere und eine untere Schranke für a_0 .

Wir betrachten zuerst ein 1-periodisches h mit Mittelwert Null,

$$h(y_1) := \begin{cases} -1 & ; \quad 0 \leq y_1 < \frac{1}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} \leq y_1 < 1 \end{cases},$$

das wir auf Γ in eine Fourierreihe entwickeln

$$h(y_1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})),$$

mit Fourierkoeffizienten:

$$h_k := \begin{cases} 0 & ; \quad k \bmod 2 = 0 \\ -\frac{4}{\pi k} & ; \quad k \bmod 4 = 1 \\ \frac{4}{\pi k} & ; \quad k \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

Für die Oberlösung machen wir den Ansatz

$$\Theta(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_k^\varepsilon \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \exp(-2\pi k y_2)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$t_k = \frac{h_k}{2\pi k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ bzw.}$$

$$t_0 = - \inf_{y_1 \in (0,1)} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{h_k}{2\pi k} \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) \right\}.$$

Setzen wir die Fourierkoeffizienten h_k in Θ ein, so haben wir

$$\begin{aligned} \Theta(y) &= t_0 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{4l+1} \cos(2\pi(4l+1)(y_1 - \frac{1}{4})) \exp(-2\pi(4l+1)y_2) \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{4l+3} \cos(2\pi(4l+3)(y_1 - \frac{1}{4})) \exp(-2\pi(4l+3)y_2). \end{aligned}$$

Somit gilt nach Konstruktion $\Theta \geq a_0$. h ist stückweise stetig differenzierbar, und damit folgt, dass die Fourierreihe zu h_k auf jedem kompakten Teilintervall von Γ , das keine der

Unstetigkeitsstellen $\{0\}$ und $\{1\}$ enthält, gleichmäßig konvergiert (siehe [Heu91], 137.2, S. 148). Man kann somit für alle $y_1 \in \Gamma_2$ Summation und Differentiation vertauschen:

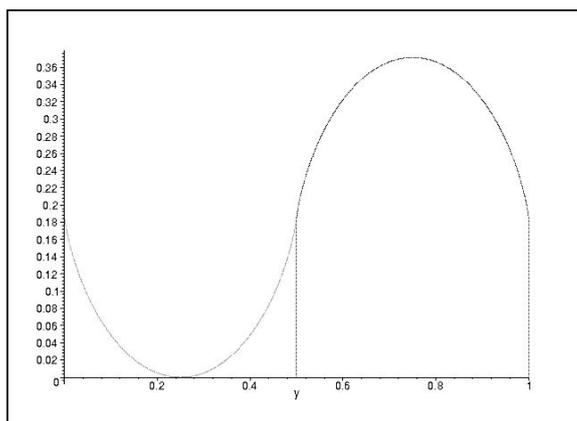
$$-\partial_2 \Theta(y_1, 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} h_k^\varepsilon \cos(2\pi k(y_1 - \frac{1}{4})) = 1.$$

Ebenfalls kann man wegen der gleichmäßigen Konvergenz den Laplace-Operator in die Reihe hineinziehen. Θ ist also eine Oberlösung von χ^ε :

$$\begin{aligned} \Delta_y \Theta(y) &= \Delta_y \chi^\varepsilon(y) = 0 & \forall y \in Y^\varepsilon, \\ \Theta(y) &\geq \chi^\varepsilon(y) = 0 & \forall y \in \Gamma_1, \\ \partial_{n_y} \Theta(y) &= \partial_{n_y} \chi^\varepsilon(y) = 1 & \forall y \in \Gamma_2, \\ \Theta(y) &\geq \chi^\varepsilon(y) = 0 & \forall y \in G^\varepsilon, \\ \Theta(y), \chi^\varepsilon(y) & & 1\text{-periodisch in } y_1. \end{aligned}$$

Die Nullfunktion ist eine Unterlösung von χ^ε . Wir können das Vergleichsprinzip (siehe Anhang Lemma A.4) anwenden und es folgt $\Theta \geq \chi^\varepsilon \geq 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

$\Theta(y_1, 0)$ kann man graphisch darstellen. Wir definieren $\vartheta(y_1) = \mathbb{I}_{\Gamma_2}(y_1)\Theta(y_1, 0)$. Da wir zusätzlich wissen, dass $\tilde{\chi}_0 = 0$ auf Γ_1 , bekommen wir, dass das ‘Profil’ von $\tilde{\chi}_0$ zwischen dem Graphen von ϑ und der y_1 -Achse liegt, achsensymmetrisch zu $y = \frac{3}{4}$. Die Skizze wurde erstellt mit Maple V R.5 und berücksichtigt 100 Summanden und zeigt Θ und ϑ .



Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz können wir in der Reihenentwicklung für Θ Summation und Integration vertauschen. Dies ermöglicht es, eine Schranke für a_0 anzugeben:

$$\begin{aligned}
0 \leq a_0 &\leq \int_{1/2}^1 \Theta(y_1, 0) dy_1 = \\
&= \frac{t_0}{2} + \\
&\quad + \frac{2}{\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \int_{1/2}^1 \frac{1}{4l+1} \cos(2\pi(4l+1)(y_1 - \frac{1}{4})) \exp(-2\pi(4l+1)y_2) - \\
&\quad - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \int_{1/2}^1 \frac{1}{4l+3} \cos(2\pi(4l+3)(y_1 - \frac{1}{4})) \exp(-2\pi(4l+3)y_2) \\
&= \frac{t_0}{2}.
\end{aligned}$$

Man erhält das Infimum in t_0 für $y_1 = \frac{1}{4}$:

$$0 \leq a_0 \leq \frac{2}{\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{4l+1} - \frac{1}{4l+3} \right\} = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \Psi(1, \frac{1}{4}) - \Psi(1, \frac{3}{4}) \right\} \leq 0.186, \quad (4.49)$$

wobei $\Psi(x) = \partial \left\{ \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)} \right\}$ die Polygamma-Funktion und Γ die Gamma-Funktion bezeichnet.

5 Die effektive Randbedingung

5.1 Herleitung mit der Energie-Methode

Im nächsten Schritt muß man diese untere Randbedingung, die man in Problem D erhalten hat, wieder zu Problem B zurück skalieren, um den Beweis von Theorem II.2 zu beenden.

Man bezeichne mit ω^* die 1-periodische Fortsetzung von $\tilde{\chi}_0$ auf Ω^ε . Desweiteren bezeichne $\omega^\varepsilon(x) := \omega^*(y(x)) = \omega^*(\frac{x}{\varepsilon})$ die Rückskalierung auf Ω . Man beachte, dass im allgemeinen $\omega^* \neq w_0$ bzw. $\omega^\varepsilon \neq v_0$. Aus Theorem II.3 b) folgen die Abschätzungen:

$$\|\nabla\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla\omega^*\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\nabla\tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y^\varepsilon)} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\nabla\tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y)} \leq \frac{const}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (5.1)$$

$$\|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \varepsilon\|\omega^*\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon}\|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y^\varepsilon)} \leq const, \quad (5.2)$$

$$\|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} = \sqrt{\varepsilon}\|\omega^*\|_{L^2(\gamma^\varepsilon)} = \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)} \leq const. \quad (5.3)$$

Desweiteren gilt $\omega^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} a_0 \in L^2(\Gamma)$, denn man hat $\tilde{\chi}_0 \in L^2(\Gamma)$ und 1-periodisch in y_1 mit

$$\tilde{\chi}_0(y_1, 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos(2\pi k(y_1 + \frac{1}{4})).$$

Ersetzt man jetzt y durch $\frac{x}{\varepsilon}$ und lässt dann ε gegen Null laufen, dann folgt aus der Mittelwertegenschaft oszillierender Funktionen (siehe Lemma A.1 oder Lemma I.1 a):

$$\omega^\varepsilon(x_1, 0) = \omega^*(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma} \tilde{\chi}_0 = a_0. \quad (5.4)$$

Lemma II.1

$$\partial_n \omega^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall x \in \Gamma_2^\varepsilon, \quad (5.5)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \omega^\varepsilon \cdot \nabla \xi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \xi \quad \forall \xi \in V^\varepsilon(\Omega). \quad (5.6)$$

Dabei ist wieder $V^\varepsilon(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Pi} = 0, \phi \text{ 1-periodisch in } x_1\}$ wie in Theorem II.2 b) der Raum der Testfunktionen.

Beweis ω^* löst

$$\Delta_y \omega^*(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega^\varepsilon, \quad (5.7)$$

$$\omega^*(y) = 0 \quad \forall y \in \gamma_1^\varepsilon, \quad (5.8)$$

$$\partial_{n_y} \omega^*(y) = 1 \quad \forall y \in \gamma_2^\varepsilon, \quad (5.9)$$

$$\omega^*(y) = \tilde{\chi}_0(y_1, \frac{1}{\varepsilon}) \quad \forall y \in P^\varepsilon, \quad (5.10)$$

$$\omega^* \quad \frac{1}{\varepsilon} \text{ - periodisch in } y_1. \quad (5.11)$$

(5.5) folgt direkt durch Zurückskalieren aus (5.9).

Das Problem für ω^* lautet in der schwachen Formulierung mit einer Testfunktion $\zeta \in \{\phi \in H^1(\Omega^\varepsilon) \mid \phi|_{\gamma_1^\varepsilon \cup P^\varepsilon} = 0, \varepsilon^{-1} \text{ - periodisch in } y_1\}$:

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla_y \omega^* \cdot \nabla_y \zeta = \int_{\gamma_2^\varepsilon} \zeta$$

und da $\zeta|_{\gamma_1^\varepsilon} = 0$ gilt

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla_y \omega^* \cdot \nabla_y \zeta = \int_{\gamma^\varepsilon} \zeta.$$

Wir setzen $\xi(x) := \zeta(\varepsilon x)$ für alle $x \in \Omega^\varepsilon$. Substituiert man wieder $y = \varepsilon x$, so folgt die zweite Aussage. $\square_{\text{Lemma II.1}}$

Beweis von Theorem II.2 b) Um die effektive Randbedingung zu erhalten und damit den Beweis von Theorem II.2 b) abzuschließen, gehen wir vor wie im Beweis von Theorem I.1 mit Tartar's Energie-Methode (siehe Anhang A.1).

Vergleichen wir unsere Situation mit der eines elliptischen Randwertproblems, wie es in der Einleitung betrachtet wurde. Dort wurde der allgemeine Fall einer elliptischen Matrix A betrachtet, während wir hier $A = \mathbf{1}_2$ untersuchen. Da die Einheitsmatrix symmetrisch ist, fallen die Lösungen der Zellprobleme und der adjungierten Zellprobleme (2.3) - (2.5) zusammen: $\chi_i = \hat{\chi}_i$ für $i \in 1, 2$. Außerdem hängen die Zellprobleme nicht mehr von e_i ab und man findet $\chi_i = \tilde{\chi}_0$, $i \in 1, 2$.

Man setzt in der schwachen Formulierung von Problem B die mit $\varepsilon\phi$ multiplizierte schnell oszillierende Testfunktion $\omega^\varepsilon(x) = \omega^*(\frac{x}{\varepsilon})$ ein, wobei $\phi(x) = \varphi(x_1)(1 - x_2)$ für ein $\varphi \in C^1(\bar{\Gamma})$:

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^\varepsilon \phi \cdot \nabla v^\varepsilon + \varepsilon \int_{\Omega} \omega^\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla v^\varepsilon = \int_{\Gamma_2^\varepsilon} \omega^\varepsilon \varphi g. \quad (5.12)$$

Als nächstes setzt man nun $\varepsilon v^\varepsilon \phi$ als Testfunktion in (5.6) ein. Diese Testfunktion $\varepsilon v^\varepsilon \phi$ liegt in $V^\varepsilon(\Omega)$, weil insbesondere $v^\varepsilon|_{\Gamma_1^\varepsilon} = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v^\varepsilon \varphi &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon \phi + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla \phi \\ &= \int_{\Gamma} \omega^\varepsilon \varphi g - \varepsilon \int_{\Omega} \omega^\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla v^\varepsilon + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla \phi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dabei wurde im letzten Schritt (5.12) eingesetzt. Mit den Abschätzungen (5.1) und (5.2) für ω^ε bzw. den Abschätzungen (4.15) und (4.16) für v^ε verschwinden der zweite und der dritte Term auf der rechten Seite, wenn wir ε gegen Null gehen lassen, denn

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla v^\varepsilon \cdot \omega^\varepsilon \nabla \phi \leq \varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (5.14)$$

bzw.

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \omega^\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla \phi \leq \varepsilon \|\nabla \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (5.15)$$

Nach (5.4) konvergiert ω^ε schwach gegen den Mittelwert a_0 . Es folgt also für eine geeignete Teilfolge, da nach (5.3) $\omega^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, dass

$$\int_{\Gamma} \tilde{v}_0 \varphi = \int_{\Gamma} a_0 g \varphi.$$

Die Funktion $\varphi \in C^1(\bar{\Gamma})$ war beliebig und es ergibt sich somit die effektive Randbedingung (4.10). $\square_{\text{Th. II.2}}$

5.2 Herleitung mit 2-Skalen-Konvergenz und Problem E

Wir leiten jetzt noch einmal unabhängig von Abschnitt 5.1 die effektive Randbedingung aus Problem B mit der Methode der 2-Skalen-Konvergenz her. Dabei bekommen wir zusätzlich noch das mikroskopische Aussehen von v^ε für ε gegen Null.

Wir hatten gezeigt, dass v^ε gleichmäßig in ε in $L^2(\Gamma)$ ist und daher existiert nach dem Kompaktheitssatz I.1 ein 2-Skalen-Limes $V_0(x_1, y_1; 0) \in L^2(\Gamma \times (0, 1))$, so dass

$$v^\varepsilon(x_1, 0) \xrightarrow{2} V_0(x_1, y_1; 0).$$

Wie hängt dieser 2-Skalen-Limes V_0 mit der schwachen Lösung des homogenisierten Problems B, \tilde{v}_0 , zusammen? Lässt sich v_0 auf ganz $\Omega \times Y$ fortsetzen und von welchen Variablen hängt v_0 dann ab?

Die Standard-Methode der 2-Skalen-Konvergenz, die wir in der Einleitung vorgestellt hatten, lässt sich auf unsere Situation nicht so einfach übertragen, da für die oben betrachtete Periodizitätszelle Y gilt, dass $|Y| = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} |Y^\varepsilon| = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$.

Wäre in unserer Situation v^ε nur von Oszillationen in der y_1 Koordinate abhängig, dann läge die Situation von 2-Skalen-Konvergenz in geschichteten Medien vor und man hätte als Periodizitätszelle $(0, 1)$.

Wir erweitern daher die Definition I.1 des 2-Skalen-Limes. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass der Parameterbereich von y_2 , $(0, 1/\varepsilon)$, auch von ε abhängt.

Wir betrachten \mathbb{R}^N . Dabei seien ohne Einschränkung die Koordinaten $x = (x_I, x_J, x_K)$ so nummeriert, so dass $I = \{1, \dots, i\}$, $J \subset \{i+1, \dots, j\}$ und $K \subset \{j+1, \dots, N\}$ mit $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{i+1, \dots, N\}$. Dabei haben wir $\Omega_I = \{x_I \mid (x_I, x_J, x_K) \in \Omega\}$ gesetzt, analog definiert man Ω_J .

Desweiteren sei $Y_K^\varepsilon = \{y_K \mid y = (y_I, y_K) \in Y^\varepsilon\}$ zu $Y^\varepsilon = (0, 1)^{|I|} \times (0, 1/\varepsilon)^{|K|}$ bzw. $Y_K = \{y_K \mid y = (y_I, y_K) \in Y\}$ zu $Y = (0, 1)^{|I|} \times (\mathbb{R}^+)^{|K|}$. Analog zu Y_K definiert man Y_I . Dabei bezeichne $|I|$ bzw. $|K|$ die Anzahl der Elemente der Indexmenge I bzw. K .

In unserem Fall, setzen wir dann $N = 2$, $I = \{1\}$ und entweder $J = \{2\}$, $K = \emptyset$ oder $J = \emptyset$, $K = \{2\}$.

Definition II.1 (2-Skalen-Konvergenz mit Parametern) Eine Folge von Funktionen $u^\varepsilon(x_I; x_J, \varepsilon y_K)$ in $L^2(\Omega_I \times \Omega_K \times Y_K^\varepsilon)$ heisst 2-Skalen-konvergent mit Parametern x_J und y_K gegen $u_0(x_I, y_I; x_J, y_K) \in L^2_{loc}(\Omega_I \times Y_I \times \Omega_J \times Y_K)$, d.h.

$$u^\varepsilon(x_I; x_J, \varepsilon y_K) \xrightarrow{2} u_0(x_I, y_I; x_J, y_K)$$

wenn für alle $\phi(x_I, y_I; x_J, y_K) \in C_0^\infty[\Omega_I \times \Omega_J \times Y_K; C_\#^\infty(Y_I)]$ gilt, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{|K|} \int_{\Omega_I \times \Omega_J} \int_{Y_K^\varepsilon} u^\varepsilon(x_I; x_J, \varepsilon y_K) \phi(x_I, \frac{x_I}{\varepsilon}; x_J, y_K) dx_I dx_J dy_K = \\ & = \frac{1}{|Y_I|} \int_{\Omega_I \times \Omega_J} \int_{Y_I \times Y_K} u_0(x_I, y_I; x_J, y_K) \phi(x_I, y_I; x_J, y_K) dy_I dy_K dx_I dx_J. \end{aligned}$$

Lemma II.2 Sei $u^\varepsilon(x_I; x_J, \varepsilon y_K)$ eine Folge in $L^2(\Omega_I \times \Omega_J \times Y_K^\varepsilon)$, so dass $u^\varepsilon(x_I; x_J, \varepsilon y_K) \xrightarrow{2} u_0(x_I, y_I; x_J, y_K) \in L_{loc}^2(\Omega_I \times Y_I \times \Omega_J \times Y_K)$. Dann gilt folgende Mittelwerteigenschaft:

$$\varepsilon^{|K|} u^\varepsilon(x_I; x_J, \varepsilon y_K^\varepsilon) \xrightarrow{L_{loc}^2(\Omega_I \times \Omega_J \times Y_K)} \tilde{u}(x_I; x_J, y_K) := \frac{1}{|Y_I|} \int_{Y_I} u_0(x_I, y_I; x_J, y_K) dy_I.$$

Beweis Wie im Beweis von Lemma I.1 a) setzt man spezielle Testfunktionen ϕ ein, die nur von x_I , x_J und y_K abhängen. \square

Theorem II.4

i) Es existiert ein eindeutiger 2-Skalen-Limes Λ_0 von v^ε , der Lösung von Problem B, mit Parameter x_2 , d.h.

$$v^\varepsilon(x_1, x_2) \xrightarrow{2} \Lambda_0(x_1, y_1; x_2) \in L^2(\Omega \times (0, 1))$$

und man stellt fest, dass $\Lambda_0 = \tilde{v}_0$.

ii) Es existiert ein eindeutiger 2-Skalen-Limes v_0 von v^ε mit Parameter y_2 , d.h.

$$v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2) \xrightarrow{2} v_0(x_1, y_1, y_2) \in L^2((0, 1) \times Y).$$

iii) v_0 löst das folgende Problem E:

$$\Delta_y v_0(x_1, y_1, y_2) = 0 \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times Y, \quad (5.16)$$

$$v_0(x_1, y_1, 0) = 0 \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times \Gamma_1, \quad (5.17)$$

$$\partial_{n_y} v_0(x_1, y_1, 0) = g(x_1) \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times \Gamma_2, \quad (5.18)$$

$$\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_0(x_1, y_1, y_2) = a_0 g(x_1) \quad \forall (x_1, y_1) \in (0, 1)^2, \quad (5.19)$$

$$v_0(x_1, y_1, y_2) = 1\text{-periodisch in } y_1 \quad (5.20)$$

und es gilt $v_0(x_1, y_1, y_2) = g(x_1) \tilde{\chi}_0(y) \in L^2(\Gamma) \times H_{loc}^1(Y)$, wobei $\tilde{\chi}_0$ die Zelllösung aus dem homogenisierten Problem D ist.

iv) Der 2-Skalen-Limes von v^ε mit Parameter y_2 ist konsistent mit dem gewöhnlichen 2-Skalen-Limes V_0 auf Γ . Insbesondere gilt für die effektive Randbedingung

$$v^\varepsilon(x_1, 0) \xrightarrow{L^2(\Gamma)} \tilde{v}_0(x_1, 0) = \int_0^1 V_0(x_1, y_1) dy_1 = a_0 g(x_1).$$

v) Der Zusammenhang zwischen dem 2-Skalen-Limes mit Parameter y_2 und dem schwachen Limes \tilde{v}_0 ist der folgende:

$$\begin{array}{ccc} v^\varepsilon(x_1, x_2) & \xrightarrow{L^2(\Omega)} & \tilde{v}_0(x_1, x_2) \\ \varepsilon v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2) & \xrightarrow{L^2_{loc}((0,1) \times \mathbb{R}^+)} & g(x_1) \int_0^1 \tilde{\chi}_0(y_1, y_2) dy_1. \end{array}$$

Beweis Wir hatten die Abschätzung (4.17) gezeigt und daraus einen schwachen Limes $v^\varepsilon|_\Gamma \rightharpoonup \tilde{v}_0|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ erhalten. Andererseits folgt aus (4.17) nach Theorem I.2 die Existenz eines 2-Skalen-Limes $V_0(x_1, y_1; 0) \in L^2(\Gamma \times (0, 1))$.

Nach Lemma I.1 a) gilt

$$v^\varepsilon(x_1, 0) \rightharpoonup \tilde{V}_0(x_1; 0) = \int_0^1 V_0(x_1, y_1; 0) dy_1. \quad (5.21)$$

1. Schritt: $\tilde{v}_0|_\Gamma = \tilde{V}_0|_\Gamma$

Es sei darauf hingewiesen, dass dies nicht direkt aus (5.21) folgt, da der 2-Skalen-Limes V_0 von der Auswahl einer Teilfolge von v^ε abhängt.

Für eine beliebige Testfunktion $\phi \in \{\Phi \in C^2(\Omega) \mid \Phi|_{\Pi \cup \Gamma} = 0, \Phi \text{ 1-periodisch in } x_1\}$ folgt unter Verwendung von Problem B durch partielles Integrieren:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Delta v^\varepsilon \phi = - \int_\Omega \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \phi = \int_\Omega v^\varepsilon \Delta \phi - \int_\Gamma v^\varepsilon \partial_n \phi \\ &\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \int_\Omega \tilde{v}_0 \Delta \phi - \int_\Gamma \tilde{V}_0 \partial_n \phi = \int_\Omega \Delta \tilde{v}_0 \phi + \int_\Gamma (\tilde{v}_0 - \tilde{V}_0) \partial_n \phi = \int_\Gamma (\tilde{v}_0 - \tilde{V}_0) \partial_n \phi. \end{aligned}$$

Sei $\phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1)x_2(x_2 - 1)$ mit $\varphi \in C^2(\bar{\Gamma})$ beliebig, dann ist $\partial_n \phi(x_1, x_2)|_\Gamma = \varphi(x_1)$. $C^2(\bar{\Gamma})$ ist dicht in $L^2(\Gamma)$, also gilt auf dem unteren Rand $\tilde{v}_0|_\Gamma = \tilde{V}_0$, da wir in Theorem II.2 gezeigt hatten, dass $\Delta \tilde{v}_0 = 0$ in Ω . Insbesondere bestimmt damit V_0 die schwache Lösung \tilde{v}_0 .

Als Ansatz um den 2-Skalen-Limes V_0 auf ganz $\Omega \times Y$ fortsetzen, benutzen wir 2-Skalen-Konvergenz mit Parametern. Von welchen Variablen hängt der fortgesetzte 2-Skalen-Limes, den wir mit v_0 bezeichnen, dann ab, von $(x_1, y_1; x_2)$ mit x_2 als Parameter, oder von $(x_1, y_1; y_2)$ mit y_2 als Parameter?

2. Schritt: Existenz eines 2-Skalen-Limes mit Parameter x_2

Angenommen ein $\Lambda_0(x_1, y_1; x_2)$ sei die gesuchte Form des 2-Skalen-Limes auf Ω . Dabei sei x_2 ein fester Parameter.

Nach der Abschätzung (4.21) ist die Funktionenfolge

$$\Lambda^\varepsilon(x_1; \rho) := v^\varepsilon(x_1, \rho)$$

für festes $\rho \in [0, 1]$ gleichmäßig in ε beschränkt und damit existiert nach Theorem I.2 ein 2-Skalen-Limes $\Lambda_0 \in L^2(\Gamma^{(\rho)} \times (0, 1))$, d. h.

$$\Lambda^\varepsilon(x_1; \rho) \xrightarrow{2} \Lambda_0(x_1, y_1; \rho).$$

Da dies für alle $\rho \in [0, 1]$ gilt, existiert somit ein 2-Skalen-Limes $\Lambda_0(x_1, y_1; x_2) \in L^2(\Omega \times (0, 1))$ mit Parameter x_2 .

Insbesondere gilt

$$\Lambda_0(x_1, y_1; 0) = V_0(x_1, y_1; 0) \quad \forall (x_1, y_1) \in (0, 1)^2.$$

Mit Lemma I.1 a) folgt desweiteren für alle $x_2 \in [0, 1]$

$$v^\varepsilon(x_1, x_2) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \tilde{\Lambda}_0(x_1; x_2) := \int_0^1 \Lambda_0(x_1, y_1; x_2) dy_1. \quad (5.22)$$

3. Schritt: Das Problem für den 2-Skalen-Limes mit Parameter x_2

Als zulässige Testfunktion betrachten wir $\Psi: (x_1, y_1; x_2) \mapsto \Psi(x_1, y_1; x_2)$, $\Psi \in \{\phi \in C^2[\Omega; C^2_\#((0, 1))] \mid \phi \text{ 1-periodisch in } x_1 \text{ und } y_1, \phi|_{\Gamma \cup \Pi} = 0\}$.

Dass ein solches Ψ existiert, zeigt der folgende Ansatz: $\Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; x_2) := \varepsilon^2 \rho(\frac{x_1}{\varepsilon}) \sigma(x_1, x_2)$ mit $\rho \in C^2_\#((0, 1))$, $\sigma \in Z(\Omega) := \{\phi \in C^2(\Omega) \mid \phi \text{ 1-periodisch in } x_1, \phi|_{\Gamma \cup \Pi} = 0\}$ beliebig. Es gilt $\Psi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}; \cdot) \in Z(\Omega)$ und folglich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Delta v^\varepsilon(x_1, x_2) \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}, x_2) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla v^\varepsilon(x_1, x_2) \cdot \nabla \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; x_2) dx \\ &= \int_{\Omega} v^\varepsilon(x_1, x_2) \Delta \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; x_2) dx + \int_{\Gamma} v^\varepsilon(x_1, 0) \partial_2 \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; x_2) dx_1. \end{aligned}$$

Im 2. Schritt hatten wir die Existenz eines 2-Skalen-Limes mit Parameter x_2 gezeigt. Wir setzen den Ansatz $\Psi = \varepsilon^2 \rho \sigma$ ein. Die Terme höherer Ordnung in ε sind beschränkt und damit ergibt sich beim Übergang zu 2-Skalen-Limiten mit Parameter x_2

$$0 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Lambda_0(x_1, y_1; x_2) \partial_{y_1}^2 \rho(y_1) \sigma(x_1, x_2) dy_1 dx_1 dx_2.$$

σ ist eine beliebige Testfunktion, also gilt für alle $x \in \Omega$

$$0 = \int_0^1 \Lambda_0(x_1, y_1; x_2) \partial_{y_1}^2 \rho(y_1) dy_1 \stackrel{\text{Part. Int.}}{=} - \int_0^1 \partial_{y_1} \Lambda_0(x_1, y_1; x_2) \partial_{y_1} \rho(y_1) dy_1,$$

denn Λ_0 ist periodisch in y_1 . Da $C_{\#}^2((0, 1))$ dicht in $L_{\#}^2((0, 1))$ ist, kann man auf der rechten Seite ρ durch $\Lambda_0(x_1, \cdot; x_2)$ für beliebiges $x \in \Omega$ ersetzen und so folgt, dass Λ_0 unabhängig von y_1 ist. Der 2-Skalen-Limes mit Parameter x_2 , Λ_0 , liefert also keine zusätzliche Information über das mikroskopische Verhalten. Es gilt $\Lambda_0 = \tilde{v}_0$ nach (5.22). Damit haben wir i) gezeigt.

4. Schritt: Existenz eines 2-Skalen-Limes mit Parameter y_2

Wiederum nach (4.21) ist die Funktionenfolge

$$\lambda^\varepsilon(x_1; y_2) := v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2)$$

für alle $y_2 \in [0, 1/\varepsilon]$ gleichmäßig in ε beschränkt und es existiert nach Theorem I.2 ein 2-Skalen-Limes $\lambda_0 \in L^2((0, 1) \times (0, 1) \times \{y_2\})$ für alle ε , d. h.

$$\lambda^\varepsilon(x_1; y_2) \xrightarrow{2} \lambda_0(x_1, y_1; y_2).$$

Insbesondere gilt

$$\lambda_0(x_1, y_1; 0) = V_0(x_1, y_1; 0) \quad \forall (x_1, y_1) \in (0, 1)^2 \quad (5.23)$$

und mit Lemma I.1 a) gilt für alle $y_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\lambda^\varepsilon(x_1; y_2) \stackrel{L^2((0,1))}{\rightharpoonup} \tilde{\lambda}_0(x_1; y_2) := \int_0^1 \lambda_0(x_1, y_1; y_2) dy_1.$$

Es gilt mit einer von ε unabhängigen Konstanten C

$$\varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \int_0^1 |\lambda^\varepsilon(x_1; y_2)| dx_1 dy_2 \leq \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} \|\lambda^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma(y_2))} dy_2 \leq C.$$

Wir definieren

$$v_0(x_1, y_1, y_2) := \lambda_0(x_1, y_1; y_2) \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times Y.$$

Die Konvergenz der Integrale in Definition II.1 ist punktweise in y_2 und diese Integrale sind beschränkt. Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt die Existenz eines 2-Skalen-Limes v_0 mit Parameter y_2 , d.h. $v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2) \xrightarrow{2} v_0(x_1, y_1, y_2) \in L^2_{loc}((0, 1) \times Y)$. Wir haben ii) gezeigt.

5. Schritt: Das Problem für den 2-Skalen-Limes mit Parameter y_2

Wir betrachten den 2-Skalen-Limes $v_0(x_1, y_1, y_2)$ mit festem Parameter y_2 . Als zulässige Testfunktion betrachten wir $\Psi: (x_1, y_1; y_2) \mapsto \Psi(x_1, y_1; y_2)$, $\Psi \in C^2_0((0, 1); Z^\varepsilon(Y^\varepsilon))$, wobei $Z^\varepsilon(Y^\varepsilon) = \{\phi \in C^2(Y) \mid \phi \text{ 1-periodisch in } y_1, \phi|_{\Gamma_1 \cup G^\varepsilon} = 0, \partial_{y_2} \phi|_{\Gamma_2} = 0\}$ ist.

Wir machen den Ansatz $\Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; \frac{x_2}{\varepsilon}) := \varepsilon \rho(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}) \sigma(x_1)$ mit $\rho \in Z^\varepsilon(Y^\varepsilon)$, $\sigma \in C^2_0((0, 1))$ beliebig. Es gilt $\Psi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \in \{\phi \in C^2(\Omega) \mid \phi \text{ 1-periodisch in } x_1, \phi|_{\Pi \cup \Gamma_1^\varepsilon} = 0, \partial_2 \phi|_{\Gamma_2^\varepsilon} = 0\}$ und aus Problem B folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Delta v^\varepsilon(x_1, x_2) \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; \frac{x_2}{\varepsilon}) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla v^\varepsilon(x_1, x_2) \cdot \nabla \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; \frac{x_2}{\varepsilon}) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_2^\varepsilon} g(x_1) \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; 0) dx_1 \\ &= \int_{\Omega} v^\varepsilon(x_1, x_2) \Delta \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; \frac{x_2}{\varepsilon}) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} g(x_1) \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; 0) dx_1 \end{aligned}$$

und durch die Substitution $x_2 \mapsto \varepsilon y_2$ folgt

$$0 = \varepsilon \int_0^1 \int_0^{1/\varepsilon} v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2) \Delta \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; y_2) dy_2 dx_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 g(x_1) \Psi(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}; 0) dx_1. \quad (5.24)$$

Wir setzen den Faktorisierungs-Ansatz für Ψ ein. Damit ergibt sich beim Übergang zu 2-Skalen-Limiten, wobei y_2 ein fester Parameter ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^1 v_0(x_1, y_1, y_2) \Delta_y \rho(y_1, y_2) \sigma(x_1) dy_1 dy_2 dx_1 \\ &\quad + \int_0^1 \int_{1/2}^1 g(x_1) \rho(y_1, 0) \sigma(x_1) dy_1 dx_1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wir setzen $\tilde{\rho}(0) := \int_{\Gamma_1} \rho(y_1, 0) dy_1$. Da σ eine beliebige Testfunktion aus $C^2_0((0, 1))$ ist, folgt aus (5.25)

$$0 = \int_0^\infty \int_0^1 v_0(x_1, y_1, y_2) \Delta_y \rho(y_1, y_2) dy_1 dy_2 + g(x_1) \tilde{\rho}(0). \quad (5.26)$$

Dies ist die schwache Formulierung des folgenden Problems E:

$$\Delta_y v_0(x_1, y_1, y_2) = 0 \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times Y, \quad (5.27)$$

$$\partial_{n_y} v_0(x_1, y_1, 0) = g(x_1) \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times \Gamma_2, \quad (5.28)$$

$$v_0(x_1, y_1, 0) = 0 \quad \forall (x_1, y) \in (0, 1) \times \Gamma_1, \quad (5.29)$$

$$\int_Y |\nabla_y v_0(x_1, y_1, y_2)|^2 dy < \infty \quad \forall x_1 \in (0, 1), \quad (5.30)$$

$$v_0(x_1, y_1, y_2) \quad 1\text{-periodisch in } y_1. \quad (5.31)$$

Insbesondere ist $\partial_{y_2} v_0(x_1, y_1, 0)$ auf Γ_1 von y_1 unabhängig.

Damit haben wir gezeigt, dass der 2-Skalen-Limes $x_1 \mapsto v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2) \xrightarrow{2} v_0(x_1, y_1, y_2)$ für alle $x_1 \in (0, 1)$ ein Zellproblem wie das homogenisierte Problem D erfüllt.

$\tilde{\chi}_0$ löst eindeutig zu Neumann-Randwerten $g = 1$ in der Periodizitätszelle Y das homogenisierte Problem E, also löst $v_0(x_1, y_1, y_2) := g(x_1) \tilde{\chi}_0(y_1, y_2)$ eindeutig das allgemeine Problem E.

Aus Theorem II.3 b) bekommt man dann, dass $v_0 \rightarrow ga_0$ für $y_2 \rightarrow \infty$ und damit ist iii) gezeigt.

6. Schritt: Die Herleitung der effektiven Randbedingung

Aus (4.34) folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\|v_0\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)} \leq \text{const}$. Damit gilt auf Γ

$$\tilde{v}_0(x_1, 0) \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} \tilde{V}_0(x_1, 0) \stackrel{(5.23)}{=} \int_0^1 v_0(x_1, y_1, 0) dy_1 = g(x_1) \int_0^1 \tilde{\chi}_0(y_1, 0) dy_1$$

und damit ist iv) bewiesen.

7. Schritt: Der Zusammenhang zwischen 2-Skalen-Limes v_0 und schwachem Limes \tilde{v}_0

Aus Lemma II.2 folgt die ‘‘Mittelwerteigenschaft’’:

$$\varepsilon v^\varepsilon(x_1, \varepsilon y_2) \rightharpoonup g(x_1) \int_0^1 \tilde{\chi}_0(y_1, y_2) dy_1$$

schwach in $L^2_{loc}((0, 1) \times \mathbb{R}^+)$ und damit ist v) gezeigt. \square .

Wir haben damit unabhängig vom Beweis von Theorem II.b in Abschnitt 5.1, der mit der Energie-Methode erfolgte, die effektive Randbedingung für \tilde{v}_0 auf Γ noch einmal hergeleitet.

Vergleichen wir das Resultat von Theorem II.4 mit der Situation eines geschichteten Mediums mit Längsschichten, in der man $v_0(x, y) = v_0(x_1, x_2, y_1)$ für den 2-Skalen-Limes erhält. Dass man in unserer Problemstellung auch eine y_2 -Abhängigkeit gefunden hat, liegt daran, dass die ε -Abhängigkeit von v^ε nicht nur auf die x_1 -Richtung beschränkt ist.

Wie im Beweis von Theorem II.4 untersucht, hat sich der 2-Skalen-Limes mit Parameter y_2 als richtiger Ansatz erwiesen. Dies ist so zu verstehen, dass der Einfluss der oszillierenden Randbedingungen in der vertikalen Richtung in gleichem Maße abfällt, wie die Oszillationen auf dem Rand eingehen.

Dass man eine x_1 -Abhängigkeit in Problem E im Vergleich zum Zellproblem bekommen hat, liegt daran, dass man auf makroskopischer Ebene noch in x_1 -Richtung den Einfluß der Randbedingung auf Γ hat, denn g hängt von x_1 ab.

Wir bekommen für $v_0(x_1, y_1, y_2)$ das "Profil", wie wir es für $\tilde{\chi}_0$ in Abschnitt 4.5 hergeleitet hatten, nur das die Höhe des Profils noch mit dem Faktor $g(x_1)$ multipliziert wird.

6 Der Zusammenhang zu Problem B*

Sei $\Sigma_l := \{0\} \times (0, 1)$ der linke Rand von Ω , $\Sigma_r := \{1\} \times (0, 1)$ der rechte Rand von Ω und $\Sigma := \Sigma_l \cup \Sigma_r$. In Problem B hatten wir periodische Randbedingungen auf Σ angenommen gehabt, obwohl eigentlich aus Problem A folgt, dass der Entwicklungsterm erster Ordnung, $v_*^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(u^\varepsilon - u_0)$, Dirichlet-Randbedingungen auf dem linken und rechten Rand von Ω erfüllt wie in Problem B*.

Wir suchen eine Fehlerabschätzung zwischen v^ε und v_*^ε , damit sich Problem A und Problem B miteinander “kombinieren” lassen, um im nächsten Kapitel eine Fehlerabschätzung für $u^\varepsilon - u_0$ herzuleiten.

Lemma II.3

a) Sei v_*^ε Lösung von Problem B* und v^ε Lösung von Problem B, dann bekommt man aus der asymptotischen Lösung \tilde{v}_0 von Problem B auch eine asymptotische Lösung \tilde{v}_0^* von Problem B* mit:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{v}_0^* &= 0 \quad \forall x \in \Omega, \\ \tilde{v}_0^* &= 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \tilde{v}_0^* &= a_0 g \quad \forall x \in \Gamma.\end{aligned}$$

Dabei verstehen wir unter einer schwachen Lösung \tilde{v}_0^* , dass

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_0^* \Delta \phi = a_0 \int_{\Sigma} g \partial_n \phi \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega)$$

erfüllt ist.

b) Es gilt $v_*^\varepsilon = v^\varepsilon$ bzw. $v_0^* = v_0$ fast überall in $L^2(\Omega)$.

Der Fehler, den wir durch das Abändern der Randbedingungen auf Σ bekommen haben, verschwindet. Dies läßt sich so verstehen, dass Dirichlet-Randbedingungen und Neumann-Randbedingungen äquivalent sind.

Beweis

a) Wir stauchen zuerst v^ε und v_*^ε in x_1 -Richtung um einen Faktor 2 und setzen anschließend durch Achsenspiegelung an der Geraden $x_1 = \frac{1}{2}$ auf $(\frac{1}{2}, 1] \times (0, 1)$ fort, d.h.

$$\begin{aligned}V^\varepsilon(x_1, x_2) &:= \begin{cases} v^\varepsilon(2x_1, x_2) & \forall x \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, 1) \\ v^\varepsilon(2(1-x_1), x_2) & \forall x \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1) \end{cases} \\ \text{bzw. } V_*^\varepsilon(x_1, x_2) &:= \begin{cases} v_*^\varepsilon(2x_1, x_2) & \forall x \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, 1) \\ v_*^\varepsilon(2(1-x_1), x_2) & \forall x \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1) \end{cases}.\end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} d^\varepsilon(x_1, x_2) &:= V^\varepsilon(x_1, x_2) - V_*^\varepsilon(x_1, x_2) \\ &= \begin{cases} v^\varepsilon(2x_1, x_2) - v_*^\varepsilon(2x_1, x_2) & \forall x \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, 1) \\ v^\varepsilon(2(1-x_1), x_2) - v_*^\varepsilon(2(1-x_1), x_2) & \forall x \in (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

und nach Konstruktion ist d^ε 1-periodisch in x_1 . d^ε löst also das Problem B für $g = 0$

$$\Delta d^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (6.2)$$

$$d^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^\varepsilon \cup \Pi, \quad (6.3)$$

$$\partial_n d^\varepsilon = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2^\varepsilon, \quad (6.4)$$

$$d^\varepsilon \quad \text{1-periodisch in } x_1. \quad (6.5)$$

Außerdem gilt $d^\varepsilon = v^\varepsilon$ auf Σ . Damit folgt aus Theorem II.2, dass $d^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{d}_0$, wobei $\tilde{d}_0 \in L^2(\Omega)$ die Lösung von

$$\Delta \tilde{d}_0 = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (6.6)$$

$$\tilde{d}_0 = 0 \quad \forall x \in \Gamma \cup \Pi, \quad (6.7)$$

$$\tilde{d}_0 = \tilde{v}_0 \quad \forall x \in \Sigma, \quad (6.8)$$

ist, in dem Sinne dass \tilde{d}_0 die folgende schwache Formulierung erfüllt:

$$\int_{\Omega} \tilde{d}_0 \Delta \phi = \int_{\Sigma} \tilde{v}_0 \partial_n \phi \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega).$$

Man setzt für alle $x \in \Omega$

$$\tilde{v}_0^*(x_1, x_2) := \tilde{v}_0(x_1, x_2) - \tilde{d}_0\left(\frac{x_1}{2}, x_2\right).$$

Das \tilde{v}_0^* leistet das Gewünschte, da $\tilde{d}_0(\frac{1}{2}, x_2) = \tilde{v}_0(1, x_2)$ für alle $x_2 \in (0, 1)$. \tilde{d}_0 ist also die gesuchte Funktion, die den Fehler durch periodische Randbedingungen korrigiert, und läßt sich aus Problem (6.6) - (6.8) bestimmen.

b) Wir schätzen jetzt den Fehler zwischen v^ε und v_*^ε ab. Nach (6.1) gilt

$$v^\varepsilon(x_1, x_2) - v_*^\varepsilon(x_1, x_2) = d^\varepsilon\left(\frac{x_1}{2}, x_2\right) \quad \forall x \in \Omega. \quad (6.9)$$

Da d^ε nach Konstruktion achsensymmetrisch zur Geraden $x = \frac{1}{2}$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(v^\varepsilon - v_*^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 |\nabla d^\varepsilon(\frac{x_1}{2}, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\
&\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 |\nabla_\xi d^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $(x_1, x_2) \mapsto (2\xi_1, \xi_2)$ substituiert haben. Durch partielle Integration folgt aus (6.2) - (6.5)

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(v^\varepsilon - v_*^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq -2 \int_0^1 \partial_{\xi_1} d^\varepsilon(0, \xi_2) d^\varepsilon(0, \xi_2) d\xi_2 + 2 \int_0^1 \partial_{\xi_1} d^\varepsilon(1, \xi_2) d^\varepsilon(1, \xi_2) d\xi_2 = 0 \quad (6.10)
\end{aligned}$$

und damit $d^\varepsilon = \text{const} = 0$ fast überall in $L^2(\Omega)$.

Analog zeigt man, dass für den Fehler zwischen \tilde{v}_0 und \tilde{v}_0^* gilt:

$$\|\nabla(\tilde{v}_0 - \tilde{v}_0^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

und damit $\tilde{d}_0 = 0$ fast überall in $L^2(\Omega)$. \square

7 Rechtfertigung der asymptotischen Entwicklung

7.1 Fehlerabschätzung

Schlussendlich sind wir an einer Fehlerabschätzung zwischen der eigentlichen Lösung u^ε von Problem A und der asymptotischen Entwicklung $u_0(x) + \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})$ interessiert. Das Ziel ist es, den Fehler explizit so abzuschätzen, dass man angeben kann, wie schnell er mit ε gegen Null geht d.h. $\|u^\varepsilon(x) - u_0(x) + \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^r)$, $r > 0$.

Zuerst untersuchen wir die Fehlerabschätzung ohne Korrekturterm: $\|\nabla(u^\varepsilon - u_0)\|_{H^1(\Omega)}$. Die Dreiecksungleichung liefert

$$\|\nabla(u^\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla(v^\varepsilon - v_*^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(6.10)}{=} \varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aus (4.15) folgt

$$\varepsilon \|\nabla v^\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \sqrt{\varepsilon}$$

und für die L^2 -Norm gilt nach (4.22)

$$\varepsilon \|v^\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \varepsilon.$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Theorem II.5: Fehlerabschätzung

$$u^\varepsilon - u_0 \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 \in H^1(\Omega) \tag{7.1}$$

und der Fehler $\|u^\varepsilon(x) - u_0(x)\|_{H^1(\Omega)}$ strebt in $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ gegen Null.

Damit haben wir unser Ergebnis aus Theorem II.1 a) verbessert, denn dort konnten wir nur die schwache Konvergenz $u^\varepsilon \rightarrow u_0$ in $H^1(\Omega)$ zeigen.

7.2 Corrector Result

Unter einem *Corrector Result* versteht man, dass für einen Korrekturterm θ^ε

$$\|u^\varepsilon - u_0 - \theta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$$

gilt, wobei man natürlich daran interessiert ist, dass sich dieser Korrekturterm θ^ε einfacher bestimmen lässt als u^ε . Die homogenisierten Probleme, die u_0 bzw. \tilde{v}_0

und v_0 erfüllen, lassen sich mit Standardverfahren numerisch lösen, während die Ausgangsprobleme für u^ε bzw. v^ε für numerische Lösungsverfahren meist schlecht geeignet sind.

Insbesondere wenn man keine Fehlerabschätzung hat, kann man oft ein Korrektur-Resultat zeigen. Man kann dann aber nicht immer Aussagen treffen, wie schnell der Fehler gegen Null geht. Wie wir im folgenden zeigen werden, kann man $\theta^\varepsilon(x) = \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})$ setzen, und damit bekommen wir eine Rechtfertigung der asymptotischen Entwicklung in der Form $u^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon v_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Benutzen wir erst einmal als Korrekturterm den schwachen Limes \tilde{v}_0 , so folgt unter einer zusätzlichen Voraussetzung an die Regularität des Quellterms f eine schnellere Konvergenz des Fehlers gegen Null:

Theorem II.6: Korrektur mit der Energie-Methode Sei $f \in H^1(\Omega)$, dann gilt

$$u^\varepsilon - (u_0 + \varepsilon \tilde{v}_0) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 \in H^1(\Omega) \quad (7.2)$$

und der Fehler $\|u^\varepsilon(x) - (u_0(x) + \varepsilon \tilde{v}_0)\|_{H^1(\Omega)}$ strebt in $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/4})$ gegen Null.

Beweis Aufgrund der Poincaré-Ungleichung genügt es $\|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon \tilde{v}_0(x))\|_{L^2(\Omega)}^2$ abzuschätzen. Wir berechnen explizit

$$\begin{aligned} \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x))\|_{L^2(\Omega)}^2 &\stackrel{(6.10)}{=} \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla v^\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\stackrel{part.Int.}{=} -\varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} v^\varepsilon(x_1, 0) g(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (7.3)$$

und folglich gilt

$$\begin{aligned} &\|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon \tilde{v}_0(x))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\stackrel{7.3}{=} -\varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} v^\varepsilon(x_1, 0) g(x_1) dx_1 + 2\varepsilon^2 \int_{\Omega} \nabla v^\varepsilon(x) \cdot \nabla \tilde{v}_0(x) dx + \varepsilon^2 \|\tilde{v}_0(x)\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Leider gilt nicht, dass ∇v^ε schwach gegen $\nabla \tilde{v}_0$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert.

Aus der zusätzlichen Regularität von f folgt nach Friedrichs, dass $u_0 \in H^3(\Omega)$ und damit gilt mit dem Sobolev-Einbettungssatz in Hölder-Räume $g \in H^{3/2}(\Gamma) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Gamma})$ für $0 \leq \alpha < 1$. Dann ist \tilde{v}_0 als Lösung des homogenisierten Problems B, (4.8) - (4.11), nach Regularitätstheorie eine $H^2(\Omega)$ -Funktion und damit folgt nach dem Spursatz $\partial_2 \tilde{v}_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Wir integrieren den gemischten Term einmal nach der einen und einmal nach der anderen Seite partiell:

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon\tilde{v}_0(x))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= -\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} v^\varepsilon(x_1, 0)g(x_1)dx_1 \\
&\quad -\varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta v^\varepsilon(x)\tilde{v}_0(x)dx + \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \tilde{v}_0(x)\partial_n v^\varepsilon(x)d\sigma(x) \\
&\quad -\varepsilon^2 \int_{\Omega} v^\varepsilon(x)\Delta\tilde{v}_0(x)dx + \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} v^\varepsilon(x)\partial_n\tilde{v}_0(x)d\sigma(x) \\
&\quad +\varepsilon^2 \int_{\Omega} \tilde{v}_0(x)\Delta\tilde{v}_0(x) + \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \tilde{v}_0(x)\partial_n\tilde{v}_0(x)d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Nutzt man nun das ε -Problem B (4.4) - (4.7) bzw. das homogenisierte Problem B (4.8) - (4.11), so folgt

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon\tilde{v}_0(x))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= -\varepsilon \int_{\Gamma} (v^\varepsilon(x_1, 0) - a_0g(x_1))(g(x_1) - \varepsilon\partial_2\tilde{v}_0(x_1, 0))dx_1. \tag{7.4}
\end{aligned}$$

Wir betrachten im ersten Faktor zunächst $\omega^\varepsilon g - a_0g$. Dabei gehen wir wie in [Alt99], Ü 6.7, S. 235 vor und definieren $h(t) := \int_0^t (\tilde{\chi}_0(y_1, 0) - a_0)dy_1$.

$\tilde{\chi}_0$ ist 1-periodisch in y_1 und nach den Überlegungen aus Abschnitt 4.5 ist $\tilde{\chi}_0$ beschränkt auf Γ . Somit ist $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ und es folgt durch die Substitution $x \mapsto \varepsilon y$

$$\int_0^1 (\tilde{\chi}_0(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0) - a_0)dx_1 = \varepsilon h(\frac{1}{\varepsilon}) \leq C\varepsilon.$$

Man hat $g\phi \in L^2(\Omega)$, denn $g \in C^{0,\alpha}(\bar{\Gamma})$, $0 \leq \alpha < 1$. Durch Approximation von $g\phi$ durch Treppenfunktionen bekommt man

$$\int_0^1 (\tilde{\chi}_0(\frac{x}{\varepsilon}) - a_0)g(x_1)\phi(x_1, 0)dx_1 \leq C\varepsilon.$$

Also gilt

$$\int_{\Gamma} (\omega^\varepsilon g - a_0g)\phi \leq C\varepsilon. \tag{7.5}$$

Aus (5.13) folgt zusammen mit (5.14) und (5.15) sowie der Dichtheit von $C^1(\bar{\Gamma})$ in $L^2(\Gamma)$, für alle $\phi \in L^2(\Gamma)$

$$\int_{\Gamma} (v^\varepsilon - \omega^\varepsilon g)\phi \leq C\varepsilon^{1/2}. \tag{7.6}$$

Wir setzen $\phi = g - \varepsilon\partial_2\tilde{v}_0$. Durch Kombinieren von (7.5) und (7.6) folgt aus (7.4) das gesuchte Korrektur-Resultat. \square

Dieses Resultat läßt sich noch verbessern, in dem wir statt \tilde{v}_0 den 2-Skalen-Limes v_0 als Korrekturterm verwenden. Dafür brauchen wir jedoch mehr Regularität.

Theorem II.7: Korrektur mit dem 2-Skalen-Limes

i) Unter der zusätzlichen Annahme, dass $g \in W^{2,\infty}(\Gamma)$ (d.h. $g \in C^{0,1}(\bar{\Gamma})$) gilt

$$\|u^\varepsilon(x) - (u_0(x) + \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{H^1(\Omega)} = \|u^\varepsilon(x) - (u_0(x) + \varepsilon g(x_1)\omega^\varepsilon(x))\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}).$$

ii) Falls g konstant ist, ergibt sich

$$\|u^\varepsilon(x) - (u_0(x) + \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Beweis Die zusätzliche Regularität in i) ist etwa für $f \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ gegeben, denn dann ist $u \in C^{3,1}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{4,\infty}(\Omega)$ (siehe [Alt99], 8.5.2, S.305) und somit $g \in W^{2,\infty}(\Gamma)$.

Wir multiplizieren $\|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2$ aus und integrieren den gemischten Term partiell, je einmal nach jeder Seite:

$$\begin{aligned} & \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2 = \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla(v^\varepsilon(x) - v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))|^2 dx \\ \stackrel{(7.3)}{=} & \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} v^\varepsilon(x_1, 0)g(x_1, 0)dx_1 \\ & + \varepsilon^2 \int_{\Omega} v^\varepsilon(x)\Delta v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx - \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} v^\varepsilon(x)\partial_n v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x) \\ & + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta v^\varepsilon(x)v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx - \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \partial_n v^\varepsilon(x)v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x) \\ & - \varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx + \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \partial_n v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x). \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel und der Partiellen Differentialgleichung für v^ε wird daraus

$$\begin{aligned} & \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \stackrel{Pb.B}{=} & \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} v^\varepsilon(x)g(x_1)dx_1 \\ & + \varepsilon^2 \int_{\Omega} v^\varepsilon(x)\partial_{x_1}^2 v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx + \varepsilon \int_{\Omega} v^\varepsilon(x) \left\{ \partial_{x_1}\partial_{y_1}v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) + \partial_{y_1}\partial_{x_1}v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} dx \\ & + \int_{\Omega} v^\varepsilon(x)\Delta_y v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx \\ & - \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} v^\varepsilon(x)n_1\partial_{x_1}v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x) - \varepsilon \int_{\partial\Omega} v^\varepsilon(x)n \cdot \nabla_y v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x) \\ & - \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} g(x_1)v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx_1 - \varepsilon^2 \int_{\Pi} \partial_n v^\varepsilon(x)v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx_1 \\ & - \varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_{x_1}^2 v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx - \varepsilon \int_{\Omega} \left\{ \partial_{x_1}\partial_{y_1}v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) + \partial_{y_1}\partial_{x_1}v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} \times \\ & \times v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx - \int_{\Omega} \Delta_y v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})dx \\ & + \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} n_1\partial_{x_1}v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x) + \varepsilon \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla_y v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})d\sigma(x), \end{aligned}$$

wobei $n = (n_1, n_2)$ die äußere Normale bezeichnet. Wir nutzen Problem E aus:

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\stackrel{Pb.E}{=} & \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} v^\varepsilon(x) g(x_1) dx_1 \\
& + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \left\{ v^\varepsilon(x) - v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} \partial_{x_1}^2 v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) dx \\
& + \varepsilon \int_{\Omega} \left\{ v^\varepsilon(x) - v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} \left\{ \partial_{x_1} \partial_{y_1} v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) + \partial_{y_1} \partial_{x_1} v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} dx - \\
& - \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} v^\varepsilon(x) g(x_1) dx_1 \\
& - \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} g(x_1) v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) dx_1 - \varepsilon^2 \int_{\Pi} \partial_n v^\varepsilon(x) v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) dx_1 \\
& + \varepsilon \int_{\Gamma_2^\varepsilon} g(x_1) v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) dx_1 + \varepsilon \int_{\Pi} \partial_{y_2} v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) dx_1.
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass sich der erste und der vierte sowie der fünfte und der siebte Term wegheben. Zusätzlich setzen wir $v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}) = g(x_1)\omega^\varepsilon(x)$ ein.

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
= & \varepsilon^2 \int_{\Omega} (v^\varepsilon(x) - g(x_1)\omega^\varepsilon(x)) \partial_{x_1}^2 g(x_1)\omega^\varepsilon(x) dx \\
& + 2\varepsilon^2 \int_{\Omega} (v^\varepsilon(x) - g(x_1)\omega^\varepsilon(x)) \partial_{x_1} g(x_1) \partial_{x_1} \omega^\varepsilon(x) dx \\
& - \varepsilon^2 \int_{\Pi} \partial_{x_2} (v^\varepsilon(x) - g(x_1)\omega^\varepsilon(x)) g(x_1)\omega^\varepsilon(x) dx_1. \tag{7.7}
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq & \varepsilon^2 \left(\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right) \times \\
& \times \left(\|\partial_{x_1}^2 g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\partial_{x_1} g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\partial_{x_1} \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + \varepsilon^2 \left(\|\partial_{x_2} v^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)} + \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\partial_{x_2} \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)} \right) \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Wir müssen wir noch $\|\partial_{x_1} \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\partial_{x_2} v^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}$, $\|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}$ und $\|\partial_{x_2} \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}$ abschätzen. Wir rechnen nach

$$\|\partial_{x_1} \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_{y_1} \tilde{\chi}_0\|_{L^2(Y^\varepsilon)}^2 \leq \frac{\text{const}_1}{\varepsilon},$$

$$\|\partial_{x_2} v^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)} \stackrel{(4.19)}{=} 4\pi^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |c_k^\varepsilon|^2 \frac{k^2}{\sinh(2\pi k)} + |c_0^\varepsilon|^2 \leq \text{const}_2,$$

$$\|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)} = \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma^{(1/\varepsilon)})} \stackrel{(4.48)}{\leq} \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)}$$

und

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_2}\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}^2 &= \int_0^1 |\partial_{x_2}\omega^\varepsilon(x_1, 1)|^2 dx_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 |\partial_{y_2}\tilde{\chi}_0(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})|^2 dy_1 \\ &\stackrel{(4.47)}{\leq} \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} \|\tilde{\chi}_0\|_{L^2(\Gamma)}^2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 \exp(-4\pi k \frac{1}{\varepsilon}) \leq \text{const}_3 \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Summenformel für die Geometrische Reihe mit $q := \exp(-4\pi \frac{\rho}{\varepsilon})$ folgt, denn die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 q^k$ konvergiert gleichmäßig:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 q^k &= q \partial_q \sum_{k \in \mathbb{N}} k q^k = q \partial_q \left(q \partial_q \sum_{k \in \mathbb{N}} q^k \right) = q \partial_q \left(q \partial_q \frac{1}{1-q} \right) \\ &= q \partial_q \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \leq \text{const}_3 \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Damit ergibt sich aus (7.8)

$$\|\nabla(u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \text{const}_4 \varepsilon^{3/2}$$

und daraus folgt mit der Poincaré-Ungleichung i):

$$\varepsilon \|v^\varepsilon(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} = \|u^\varepsilon(x) - u_0(x) - \varepsilon v_0(x_1, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \varepsilon^{3/4}.$$

Für $g = \text{const}$ bleibt nur der dritte Term in (7.7) übrig und wir bekommen ii), d.h. wir haben dann eine Abschätzung in $\mathcal{O}(\varepsilon)$. \square

Teil III

Diskussion

Wir haben also mit 2-Skalen-Konvergenz die Existenz einer asymptotischen Entwicklung $u_0(x) + \varepsilon \partial_2 u_0(x_1) \tilde{\chi}_0(\frac{x}{\varepsilon})$ gezeigt, mit der die Lösung des ursprünglichen Problems u^ε in Ordnung ε approximiert werden kann, falls f glatt genug ist. Die Entwicklungsterme $u_0 \in H^2(\Omega)$ bzw. $\tilde{\chi}_0 \in H_{loc}^1(Y)$ bestimmen sich aus dem homogenisierten Problem A bzw. dem Zellproblem. Dies ist ähnlich zum Korrektur-Resultat im Falle einer Matrix mit oszillierenden Koeffizienten (siehe [All92], Th. 2.3, (2. 9)).

Falls nur $f \in L^2(\Omega)$ ist, gilt $u^\varepsilon \rightarrow u_0$ in $H^1(\Omega)$. Der Fehler geht jedoch dann nur in Ordnung $\sqrt{\varepsilon}$ gegen Null. Diese beiden Probleme weisen im Gegensatz zu den ε -Problemen A bzw. D keine oszillierenden Randbedingungen auf und sind zum Beispiel numerisch lösbar.

Desweiteren haben wir in Problem A und B die effektive Randbedingung auf Γ bestimmt und dabei gesehen, dass erst in $\mathcal{O}(\varepsilon)$ die Neumann-Randbedingung eingeht.

Als nächsten Schritt könnte man das Resultat dieser Diplomarbeit auf ein Gebiet verallgemeinern, auf dessen Rand mit Neumann-Randbedingungen, Γ_2^ε , rechteckige Zacken aufgesetzt sind. Auf dem gesamten äußeren Rand sollen dann homogene Dirichlet-Randbedingungen vorliegen. Diese Situation, die in [Sar98] näher betrachtet wurde, ist in den unten angeführten Anwendungen genauso von Interesse, wie die in dieser Arbeit betrachtete Geometrie.

Desweiteren sei darauf hingewiesen, dass sich unser Problem auf beliebige Gebiete mit glattem Rand, wobei ein Teil des Randes mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und der restliche Rand mit oszillierenden Randbedingungen versehen ist, verallgemeinern läßt. Dazu verfährt man wie in [FL95]: Durch Parametrisierung der Randkurven lassen sich die ursprünglichen Gleichungen auf die in dieser Arbeit betrachtete Geometrie zurückführen und die neuen Parameter der Randkurve sind dann x_1 bzw. x_2 . Der Rand Γ parametrisiert dabei den Rand mit oszillierenden Randbedingungen. Die Resultate müssten dann am Schluß wieder von Ω auf das "krumme" Gebiet übertragen werden, indem man die Parametrisierung rückgängig macht.

Außerdem sei angemerkt, dass wir uns auf isotrope Probleme eingeschränkt haben, da wir den Laplace-Operator betrachteten und nicht einen allgemeinen elliptischen Operator $\nabla \cdot A \nabla$ zu einer Matrix A aus $\{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(M) > 0\}$. Desweiteren könnte man noch eine von ε abhängige Funktion $f^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ in Problem A zulassen.

Für Anwendungen ist besonders die effektive Randbedingung auf Γ interessant, da die makroskopische Größe $a_0 g$ gut messbar ist und oft eine spezielle physikalische Interpretation hat. Von weiterem Interesse wäre es daher den Zusammenhang zwischen a_0 und der Länge des Neumann-Randes Γ_2^ε zu untersuchen.

8 Beispiele für Anwendungen

8.1 Elektromagnetismus

Eine Anwendung von Problem A befindet sich in der Elektro- bzw. Magnetostatik, wobei u^ε das elektrische bzw. magnetische Potential ist und die periodischen Randbedingungen die Oberfläche eines Werkstoffs modellieren, auf der sich periodisch ein Leiter (Neumann-Randbedingung) und ein Isolator (Dirichlet-Randbedingung) abwechseln und Ω das Vakuum darstellt. Die effektive Randbedingung auf Γ repräsentiert dann den Effekt des effektiven Widerstandes, der beim Übergang vom Vakuum in das Medium mit der rauhen Oberfläche eine stehende elektro-magnetischen Welle dämpft.

8.2 Wärmelehre

Unsere Situation läßt sich auf die stationäre Wärmeleitungsgleichung übertragen, wobei die Dirichlet-Randbedingung die Anschluss-Bedingung an einen thermischen Leiter ist, die Neumann-Randbedingung die an einen thermischen Isolator. u^ε ist dann die räumliche Temperaturverteilung. Die effektive Randbedingung steht hier für den thermischen Widerstand der rauhen Oberfläche. Bei grosstechnischen Kühlanlagen oder Heizkörpern sucht man oft möglichst grosse Oberflächen durch Wölbungen zu erreichen, um möglichst viel Wärme abgeben zu können. Dort hat man also solche rauhen Oberflächen.

8.3 Strömungsmechanik

Im Bereich der Umweltphysik findet sich die wohl wichtigste Anwendung der von uns in dieser Arbeit untersuchten Problemstellung. Wenn man Problem A um 180° dreht, hat man als Anwendung die laminare Strömung z.B. eines Grundwassers, durch das von oben Wasser aus einem Boden einsickert oder abgepumpt wird. Dabei ergibt sich die Dirichlet-Randbedingung durch einen Zu- oder Abfluss und die Neumann-Randbedingung durch wasserundurchlässiges Material am oberen Rand. Die effektive Randbedingung auf Γ repräsentiert dann die Permeabilität dieses löchrigen Randes.

Genauer gesagt, ist nach [Bea79], 6.3 im Falle des inkompressiblen Fluss in isotropischen, porösen Medien die Gleichung

$$\nabla \cdot k(\Theta(p))(\nabla p - e) = \partial_t \Theta(p) \quad (8.1)$$

zu lösen, wobei p der Druck, $\Theta(p)$ der Wassergehalt eines Einheitswürfels als Funktion des Druck, k die Leitfähigkeit und e die Richtung der Gravitation ist.

Ein Teil des oberen Randes, der in dieser Arbeit mit Γ_1^ε bezeichnet wurde, sei mit Fluid bedeckt. Man macht dabei die Annahme, dass diese Löcher gleichmäßig und periodisch auf einem Teil des Randes, bei uns Γ , verteilt sind. An den Stellen, wo das Fluid einfließen kann, ist der Druck $p = 0$. Da der Gradient orthogonal auf Niveaulinien steht, liegen Neumann-Randbedingungen auf dem Wasser undurchlässigen Rand Γ_2^ε vor. Da man sich das Grundwasser jenseits von $\partial\Omega \setminus \Gamma$ als fortgesetzt vorstellen kann, sind auf dem restlichen Rand homogene Dirchlet-Randbedingungen sinnvoll. Die dazugehörigen Randbedingungen lauten also

$$p = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma_2^\varepsilon, \quad (8.2)$$

$$k(\Theta(p))(\nabla p - e) \cdot n = 0 \quad \text{auf } \Gamma_2^\varepsilon, \quad (8.3)$$

wobei n die äußere Normale bezeichne. Da dieses nichtlineare Problem (8.1) - (8.3) bis jetzt noch nicht lösbar ist, führt man einige sinnvolle Näherungen auf ähnliche Weise wie in [Fil98], p. 86 durch. Unter den Annahmen, dass

- 1.) die Gravitation vernachlässigt werden kann, d.h. $e = 0$,
- 2.) der Wassergehalt Θ sich proportional zum Druck p verhält,
- 3.) k unabhängig vom Druck ist sowie,
- 4.) dass wir nur am stationären Fall, $\partial_t p = 0$, interessiert sind,

vereinfachen sich (8.1) - (8.3) zu

$$\Delta p = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (8.4)$$

$$p = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma_2^\varepsilon, \quad (8.5)$$

$$\partial_n p = 0 \quad \text{auf } \Gamma_2^\varepsilon. \quad (8.6)$$

Lassen wir noch einen Quellterm f auf der rechten Seite von (8.4) zu, so sind wir in der Situation von Problem A (siehe Abschnitt 3.1), wenn wir noch $p = u^\varepsilon$ setzen.

Da $u_0 = 0$ die effektive Randbedingung in Problem A ist, bekommen wir sogar, dass der Druck bei der ersten Näherung ganz verschwindet und der wasserundurchlässige Rand nur in erster Ordnung in ε eingeht. Unsere Abschätzung (4.49) für a_0 können wir dann so interpretieren, dass der effektive Druck in erster Ordnung, d. h. \tilde{v}_0 , auf dem löchrigen Rand Γ höchstens 18,6 % von g beträgt. Man hätte eigentlich erst einmal einen höheren Druck, der durch die wasserundurchlässigen Stücke Γ_2^ε bedingt wird, erwartet, da $|\Gamma_2^\varepsilon| = \frac{1}{2}$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

9 Ausblick

Das Problem lässt sich vom periodischen Rahmen auch auf zufällig perforierte Ränder erweitern, wenn man ein ergodisches dynamisches System betrachtet, das die Länge der Intervalle, auf denen jeweils die eine oder die andere Randbedingung gilt, bestimmt. Anschaulich handelt es sich bei der Ergodizität um die Forderung, dass auf dem rauhen Rand, jede stochastisch mögliche Kombination der Randbedingungen einmal auftritt. Mit der Energie-Methode wurde dies von Belyaev und Chechkin in [BC99] gezeigt.

Um unsere Resultate auf die stochastische Situation zu verallgemeinern, bietet sich anhand des in dieser Arbeit mit 2-Skalen-Konvergenz geführten Beweises, dann die Methode der 2-Skalen-Konvergenz im stochastischen Mittel nach Bourgeat, Mikelić und Wright an, siehe [BMW94]. Die Untersuchung der stochastischen Situation hätte jedoch den Rahmen dieser Diplomarbeit gesprengt.

Teil IV

Anhang

A Verwendete Sätze und Lemmata

A.1 Standardresultate aus der Homogenisierung

Lemma A.1 Mittelwerteigenschaft oszillierender Funktionen⁶ Sei $f(x, y) \in L^p_{\#}[Y, C^0(\Omega)]$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und $Y \subset \Omega$ die Periodizitätzelle, dann gilt für $\varepsilon \downarrow 0$

$$f(x, \frac{x}{\varepsilon}) \xrightarrow{L^p(\Omega)} \bar{f}(x) := \frac{1}{|Y|} \int_Y f(x, y) dy. \quad (\text{A.1})$$

Beweis (nach [JKO94], S. 5) Sei $\varepsilon \leq 1$. Wir überdecken Ω mit einem Quader E , der k^N ($k \in \mathbb{N}$) Periodizitätzellen Y enthält und setzen f auf $E \setminus \Omega$ trivial fort.

$$\begin{aligned} \int_E |f(x, \frac{x}{\varepsilon})|^p dx &\stackrel{\text{Substitution}}{=} \varepsilon^n \int_{\{y|\varepsilon y \in E\}} |f(\varepsilon y, y)|^p dy \\ &\stackrel{f \text{ } Y\text{-periodisch}}{\leq} \varepsilon^n \left(\left\lceil \frac{k}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \right)^n \int_Y |f(\varepsilon y, y)|^p dy \\ &\leq k \text{const}(Y) \bar{f}(\varepsilon y)^p \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \text{const} \bar{f}(0)^p \end{aligned}$$

Sei $\delta > 0$ und $z(x, y)$ ein trigonometrisches Polynom in y mit $\bar{z}(x) = \bar{f}(x)$ und $|\bar{z} - \bar{f}(x)|^p \leq \delta$. (Zum Beispiel für $p = 2$ durch Fourierreihen) Damit gilt

$$\int_E |z(x, \frac{x}{\varepsilon}) - f(x, \frac{x}{\varepsilon})|^p dx \leq \delta.$$

Für ein trigonometrisches Polynom zeigt man durch Approximation mit Treppenfunktionen, dass für $\varepsilon \downarrow 0$

$$z(x, \frac{x}{\varepsilon}) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \bar{z}(x) := \int_Y z(x, y) dy$$

und damit folgt das Lemma. \square

⁶Wir beweisen hier eine weniger allgemeine Mittelwerteigenschaft im Spezialfall oszillierender Funktionen. Der Beweis benutzt im Gegensatz zu Lemma I.1.a nicht die 2-Skalen-Konvergenz. Da wir die Mittelwerteigenschaft in der Formulierung von Lemma A.1 im Beweis von Theorem I.1 mit der Energie-Methode verwenden werden, zeigt dies, dass man den Beweis von Theorem I.1 unabhängig voneinander sowohl mit der Energie-Methode als auch mit Methode der 2-Skalen-Konvergenz führen kann.

Im Folgenden beweisen wir mit den beiden in dieser Arbeit verwendeten Methoden, das in der Einleitung zitierte Theorem I.1.

Erster Beweis von Theorem I.1 - mit Tartar's Energie-Methode

Aus dem Ausgangsproblem (2.1) und (2.2) folgt mit Standardmethoden die Existenz einer Teilfolge von u^ε , wiederum mit u^ε bezeichnet, so dass $u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u^\varepsilon \rightarrow u_0 \in L^2(\Omega)$ und $\xi^\varepsilon := A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightarrow \xi_0 \in (L^2(\Omega))^N$. Für Theorem I.1 ist also noch zu zeigen, dass $\xi_0 = A_0 \nabla u_0$. Daraus folgt dann auch die behauptete Gestalt des homogenisierten Problems (2.6) und (2.7).

Nach Konstruktion sind die χ_i^ε Y -periodisch und nach dem Lemma über die Mittelwerteeigenschaft oszillierender Funktionen (Lemma A.1) folgt

$$w_i^\varepsilon(x) \rightharpoonup x_i \in L^2(\Omega). \quad (\text{A.2})$$

Für den Gradienten dieser Testfunktionen folgt

$$\nabla_x w_i^\varepsilon(x) = \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = e_i - \nabla_y \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

und mit der Y -Periodizität von $\nabla_x w^\varepsilon$ folgt wieder aus Lemma A.1, dass

$$\nabla_x w_i^\varepsilon(x) \rightharpoonup e_i - \frac{1}{|Y|} \int_Y \nabla_y \chi_i(y) dy \in L^2(\Omega). \quad (\text{A.3})$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz folgt, da χ_i Y -periodisch, dass

$$\int_Y \nabla_y \chi_i(y) dy = \int_{\partial Y} \chi_i \cdot n d\sigma(y) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Es folgt also aus (A.2) und (A.3) mit (A.4)

$$\begin{aligned} w_i^\varepsilon &\rightharpoonup x_i \in H^1(\Omega) \\ \text{und } w_i^\varepsilon &\rightarrow x_i \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

wobei die letzte Aussage aus dem Einbettungssatz von Rellich nach Wahl einer Teilfolge folgt. Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\zeta_i^\varepsilon(x) := (A^\varepsilon)^T(x) \nabla w_i^\varepsilon(x) = A^T\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Da die Matrix A^ε in $L^\infty(\Omega^\varepsilon)$ und die Testfunktionen w_i^ε in $L^2(\Omega)$ sind, folgt $\zeta^\varepsilon \in (L^2(\Omega))^N$ und da A^T und $\nabla_y w_i$ Y -periodisch sind, folgt wieder mit Lemma A.1

$$\zeta_i^\varepsilon(x) \rightharpoonup A_0^T e_i \in (L^2(\Omega))^N.$$

Man rechnet nach, dass

$$\int_{\Omega} \zeta_i^\varepsilon \cdot \nabla \phi = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{A.5})$$

denn mit der Variablensubstitution $x \mapsto y := \frac{x}{\varepsilon}$ bekommt man wegen der Y -Periodizität aus der schwachen Formulierung des Zellproblems (2.3) - (2.5)

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (A^T \nabla_y w_i)(y) \nabla \phi^\varepsilon(y) dy = 0 \quad \forall \phi^\varepsilon(y) := \phi(\varepsilon x) \in H_0^1(\Omega^\varepsilon).$$

Sei $\phi \in C_0^\infty$ beliebig. Wir wählen jetzt ϕw_i^ε für ein beliebiges $i \in \{1, \dots, N\}$ als Testfunktion in der schwachen Formulierung des Ausgangsproblems (2.1) und (2.2) bzw. ϕu^ε als Testfunktion in der schwachen Formulierung (A.5) des adjungierten Zellproblems und erhalten

$$\int_{\Omega} \xi^\varepsilon(x) \cdot \nabla w_i^\varepsilon(x) \phi(x) dx + \int_{\Omega} \xi^\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi(x) w_i^\varepsilon(x) dx = \langle f, \phi w_i^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{bzw. } \int_{\Omega} \zeta^\varepsilon(x) \cdot \nabla u^\varepsilon(x) \phi(x) dx + \int_{\Omega} \zeta^\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi(x) u^\varepsilon(x) dx = 0. \quad (\text{A.7})$$

Es gilt $\xi^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon = \zeta^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon$, denn man rechnet nach

$$\xi^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon = (A^\varepsilon)^T \nabla w_i^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = \zeta^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon. \quad (\text{A.8})$$

Wir können nun die Gleichung (A.6) von (A.7) abziehen und bekommen

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \xi^\varepsilon(x) w_i^\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi(x) dx - \int_{\Omega} \zeta^\varepsilon(x) u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = \\ & = \langle f, \phi w_i^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt mit der starken Konvergenz von $u^\varepsilon \rightarrow u_0$ bzw. $w_i^\varepsilon \rightarrow x_i$ in $L^2(\Omega)$ und der schwachen Konvergenz der Flüsse $\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi_0$ bzw. $\zeta^\varepsilon \rightharpoonup A_0^T e_i$ in $(L^2(\Omega))^N$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \xi_0(x) \cdot \nabla \phi(x) x_i dx - \int_{\Omega} A_0^T(x) e_i \cdot \nabla \phi(x) u_0(x) dx = \\ & = \langle f, x_i \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Hier hat es sich ausgezahlt, dass man χ^ε als Lösung des Zellproblems zum adjungierten Operator definiert hat, da somit nur Produkte stark und schwach konvergenter Folgen auftraten und wir also zum Limes übergehen konnten.

Die letzte Gleichung läßt sich zu

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \xi_0(x) \cdot \nabla \{x_i \phi(x)\} dx - \int_{\Omega} \xi_0(x) x_i \cdot e_i \phi(x) dx - \int_{\Omega} A_0^T e_i \cdot \nabla \phi(x) u_0(x) dx = \\ & = \langle f, x_i \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

umschreiben und mit der schwachen Formulierung des Ausgangsproblem ((2.1) und (2.2)) folgt, wenn man dort $x_i \phi$ als Testfunktion einsetzt, dass

$$\int_{\Omega} \xi_0(x) \cdot e_i \phi(x) dx = - \int_{\Omega} A_0^T e_i \cdot \nabla \phi(x) u_0(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int_{\Omega} \xi_0(x) \cdot e_i \phi(x) dx = \int_{\Omega} A_0^T e_i \cdot \nabla u_0(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

und es ergibt sich $\xi_0 \cdot e_i = A_0^T e_i \cdot \nabla u_0 = A^0 \nabla u_0 \cdot e_i$. Da dies für alle $e_i, i \in \{1, \dots, N\}$ gilt, folgt $\xi_0 = A_0 \nabla u_0$. Man kann zeigen, dass A_0 eine elliptische Matrix ist (siehe [CD99], Prop. 6.12). Es folgt, dass die Lösung des homogenisierten Problems u_0 eindeutig ist und damit konvergiert jeweils nicht nur eine Teilfolge sondern die ganze Folge u^ε bzw. $A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$. \square

Zweiter Beweis von Theorem I.1 - mit 2-Skalen-Konvergenz

Wir haben die gleiche Ausgangssituation, wie im 1. Beweis von Theorem I.1, der mit Hilfe der Energie-Methode geführt wurde. Es existiert eine Teilfolge von u^ε , wiederum mit u^ε bezeichnet, so dass $u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u^\varepsilon \rightarrow u_0 \in L^2(\Omega)$ und $\xi^\varepsilon := A^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow \xi_0 \in (L^2(\Omega))^N$. Es ist wiederum zu zeigen, dass $\xi_0 = A_0 \nabla u_0$ gilt.

Anstelle der Lösungen χ_i^ε des Zellproblems verwendet man in diesem Beweis die Funktion $u_1 \in L^2[\Omega, H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}]$, die $\nabla u^\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$ erfüllt. Die Existenz eines solchen u_1 hatten wir in Lemma I.2 i) gezeigt. Sei $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\phi_1 \in C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$. Als Testfunktion können wir dann ein beliebiges $\phi(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$ wählen. Eingesetzt in die schwache Formulierung des Ausgangsproblems bekommen wir

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \left\{ \nabla \phi_0(x) + \varepsilon \nabla_x \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right\} dx = \\ & = \langle f, \phi_0(\cdot) + \varepsilon \phi_1(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot (A^{\varepsilon})^T \left\{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} dx + \varepsilon \int_{\Omega} A^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot \nabla_x \phi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \\
& = \langle f, \phi_0(\cdot) + \varepsilon \phi_1\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt für den ersten Term auf der linken Seite mit Lemma I.2 i)

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot (A^{\varepsilon})^T(x) \left\{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} dx \\
& = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \left\{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \right\} \cdot A^T(y) \left\{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y) \right\} dy dx,
\end{aligned}$$

denn $A^{\varepsilon} \in (L^{\infty}(\Omega))^{N \times N}$ und $\nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y) \in L^2_{\#}(Y; C(\bar{\Omega}))$ und damit ist

$$(A^{\varepsilon})^T \left\{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y) \right\} \in L^2_{\#}(Y; C(\bar{\Omega}))$$

eine zulässige Testfunktion und man kann Theorem I.3 anwenden. Der zweite Term auf der rechten Seite in (A.9) verschwindet für $\varepsilon \downarrow 0$. Letzteres folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus der Beschränktheit von $A^{\varepsilon} \nabla u^{\varepsilon}$ in $(L^2(\Omega))^N$.

Nach Definition von ϕ_0 und ϕ_1 gilt $\phi_0(\cdot) + \varepsilon \phi_1\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} \phi_0$, und damit bekommen wir aus (A.9) für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \left\{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \right\} \cdot A^T(y) \left\{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y) \right\} dy dx = \\
& = \langle f, \phi_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) \left\{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \right\} \cdot \left\{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y) \right\} dy dx = \\
& = \langle f, \phi_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Wir betrachten den Funktionenraum

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R})$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{L^2[\Omega; H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R}]}^2 \quad \forall \varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}.$$

Die Bilinearform

$$a(\varphi, \phi) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) \{ \nabla \varphi_0(x) + \nabla_y \varphi_1(x, y) \} \cdot \{ \nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y) \} dy dx,$$

definiert für alle $\varphi, \phi \in \mathcal{H}$, ist stetig auf \mathcal{H} . Überprüfen wir die Koerzivität von a . Da A nach Voraussetzung elliptisch ist, folgt für ein $\alpha > 0$

$$a(\phi, \phi) \geq \frac{\alpha}{|Y|} \|\nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.11})$$

Durch partielle Integration und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes bekommt man, dass die gemischten Terme beim Ausmultiplizieren der Norm verschwinden:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y \nabla \phi_0(x) \nabla_y \phi_1(x, y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_Y \nabla_y \{ \nabla_x \phi_0(x) \phi_1(x, y) \} dy \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_{\partial Y} \{ \nabla_x \phi_0(x) \phi_1(x, y) \} \cdot n d\sigma(y) \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt hat man dabei ausgenutzt, dass ϕ_1 Y -periodisch ist.

Damit folgt $\|\nabla \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)} = \|\phi(x, y)\|_{\mathcal{H}}$. Also folgt aus (A.11), dass a auf \mathcal{H} koerziv ist. Desweiteren ist die Abbildung

$$F : \phi = (\phi_0, \phi_1) \quad \longmapsto \quad \langle f, \phi_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

linear und stetig auf \mathcal{H} .

Nach dem Satz von Lax-Milgram folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ von (A.10). Wählt man zuerst eine Testfunktion ϕ mit $\phi_1 = 0$, dann erhält man aus (A.10) durch partielle Integration

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) \{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \} dy \cdot \nabla \phi_0(x) dy dx = \\ &= \langle f, \phi_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi_0 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

bzw. durch Testen mit $\phi = (0, \phi_1)$ erhält man aus (A.10), dass

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) \{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \} \cdot \nabla_y \phi_1(x) dy dx = 0 \quad \forall \phi_1 \in L^2[\Omega; H_{\#}^1(\Omega)/\mathbb{R}].$$

Zusammen mit der Y -Periodizität von u_1 , die nach Lemma I.2 i) gilt, ergibt sich also das folgende homogenisierte Problem

$$\begin{aligned} -\frac{1}{|Y|} \nabla_x \cdot \left[\int_Y A(y) \{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \} dy \right] &= f \quad \text{in } \Omega, \\ -\nabla_y \cdot A(y) \{ \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y) \} &= 0 \quad \text{in } \Omega \times Y, \\ u_0 &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ u_1(x, \cdot) & \quad Y\text{-periodisch.} \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Problem $u_1(x, y) = -(\hat{\chi}_1, \dots, \hat{\chi}_N)^T \cdot \nabla u_0$ ein, so bekommt man das homogenisierte Problem, mit A_0 in der in Theorem I.1 definierten Form. Argumentiert man wie am Ende des ersten Beweises, so folgt die Konvergenz für die ganze Folge u^ε und nicht nur für eine Teilfolge. \square

A.2 Einige Resultate aus der Funktionalanalysis

Lemma A.2: Allgemeine Poincaré-Ungleichung Da wir eine spezielle Form der allgemeinen Poincaré-Ungleichung verwendet haben, die wir in (iii) beweisen, stellen wir hier verschiedene Formulierungen der Poincaré-Ungleichung zusammen.

i) Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt, dann gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda_N(\Omega)}{\kappa_N} \right)^{1/N} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei κ_N das Volumen der N-dimensionalen Einheitskugel ist.

ii) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ und Ω zusätzlich konvex, dann gilt

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\lambda_N(\Omega)}{\kappa_N} \right)^{(1/N-1)} \text{diam}(\Omega)^N \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei $\bar{u} = \frac{1}{\lambda_N(\Omega)} \int_{\Omega} u$ der Mittelwert von u in Ω und $\text{diam}(\Omega)$ der maximale Durchmesser von Ω ist.

iii) Sei $u \in M \subset W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, M nichtleer, konvex und abgeschlossen. Außerdem sei zusätzlich M ein Kegel mit Spitze in 0, d.h. $u \in M, a \geq 0 \Rightarrow au \in M$. Desweiteren sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$, dann gilt:

Falls für eine Konstante c gilt, dass

$$\exists u_0 \in M : u_0 + \xi \in M \Rightarrow |\xi| \leq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.12})$$

dann existiert ein $C < \infty$, so dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in M. \quad (\text{A.13})$$

Anmerkung: Es gilt sogar die Äquivalenz von (A.12) und (A.13).

Beweis Wir zeigen nur iii). Der Beweis folgt dabei [Alt99], 6.15, S. 223 - 225. Ein Beweis von i) und ii) findet sich in [GT01], pp. 152 - 157.

iii) Wir zeigen zuerst für ein beliebiges nichtleeres, konvexes und abgeschlossenes $M \subset W^{1,p}(\Omega)$, dass aus (A.12), folgt dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C (\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + 1) \quad \forall u \in M. \quad (\text{A.14})$$

Sei zunächst $u_0 = 0$. Wir beweisen (A.14) durch Widerspruch, d.h. es existiere ein $u_k \in M, k \in \mathbb{N}^*$, so dass

$$\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} + 1 \leq \frac{1}{k} \|u_k\|_{L^p(\Omega)}. \quad (\text{A.15})$$

Also konvergiert dann $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Sei $K > 0$ fest, dann folgt

$$\delta_k := \frac{K}{\|u_k\|_{L^p(\Omega)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Für k groß genug, gilt dann $0 < \delta_k \leq 1$. Da $u_0 = 0 \in M$ und M konvex, folgt $U_k := \delta_k u_k \in M$. Also

$$\|U_k\|_{L^p(\Omega)} = \delta_k \|u_k\|_{L^p(\Omega)} \stackrel{\text{nach Def.}}{=} K. \quad (\text{A.16})$$

Wir multiplizieren (A.15) mit δ_k und somit folgt

$$\|\nabla U_k\|_{L^p(\Omega)} + \delta_k \leq \frac{1}{k} \|U_k\|_{L^p(\Omega)} = \frac{K}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{A.17})$$

Also folgt $U_k \in W^{1,p}(\Omega)$ und wegen der Reflexivität von $W^{1,p}(\Omega)$ die schwache Konvergenz $U_k \rightharpoonup U \in W^{1,p}(\Omega)$ für eine Teilfolge, die wir wiederum mit U_k bezeichnen haben. Da M abgeschlossen war, ist auch U wieder in M enthalten. Insbesondere konvergiert $\nabla U_k \rightharpoonup \nabla U$. Mit (A.17) hat man $\nabla U = 0$.

Nach Voraussetzung war Ω zusammenhängend, also gilt $U = \xi$ L^p -fast überall für ein konstantes $\xi \in \mathbb{R}$ und nach (A.12) gilt $|\xi| < c$.

Mit dem Einbettungssatz von Rellich folgt, dass $U_k \rightarrow U \in L^p(\Omega)$ und somit

$$K \stackrel{(\text{A.16})}{=} \|\nabla U\|_{L^p(\Omega)} = |\xi| |\Omega| \leq c |\Omega|$$

und damit bekommen wir einen Widerspruch, wenn wir eingangs K groß genug gewählt hatten. Also muss die Ungleichung (A.14) im Falle $u_0 = 0$ gelten.

Sei nun $u_0 \in M$ beliebig, dann folgt (A.14) für ein $\tilde{u} \in \tilde{M} := M - u_0$, denn man hat für $u := \tilde{u} + u_0$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &\stackrel{(\text{A.14}) \text{ für } \tilde{u}}{\leq} C(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} + 1) + \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq \tilde{C}(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + 1). \end{aligned}$$

Wir benutzen an dieser Stelle die Voraussetzung, dass aus $u \in M$ folgt, dass für $a \geq 0$ $au \in M$ ist. Dann können wir in (A.14) au anstatt u einsetzen. Im Spezialfall $a = 0$ folgt (A.13) sofort. Teilt man durch $a, a \neq 0$ und läßt dann a gegen unendlich gehen, so folgt (A.13). \square

Lemma A.3: Schwaches Maximumprinzip Wir betrachten $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, offen und beschränkt. Sei $u \in H^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von:

$$\Delta u = f \quad \forall x \in \Omega, \quad (\text{A.18})$$

$$u = g \quad \forall x \in \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \Gamma_1 \neq \emptyset, \quad (\text{A.19})$$

$$\partial_n u = h \quad \forall x \in \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \quad (\text{A.20})$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Gamma_1)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$ gegeben seien. Falls $f \geq 0$ in Ω und $h \leq 0$ in Γ_2 , dann gilt

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Gamma_1} g. \quad (\text{A.21})$$

Unter “ \geq ” etc. verstehen wir dabei, dass die Ungleichung fast überall in Ω bzw. Γ_2 erfüllt ist.

Beweis (vgl. [KS80], p.245, Prop. 5.2) Die schwache Formulierung des elliptischen Randwertproblems (A.18) - (A.20) lautet:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta = - \int_{\Omega} f \zeta + \int_{\Gamma_2} h \zeta \quad \forall \zeta \in \{\xi \in H^1(\Omega) \mid \xi|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

Wir wählen $\zeta = \max(u - \sup_{\Gamma_1} g, 0)$ als Testfunktion und definieren $M := \{x \in \Omega \mid \zeta(x) > 0\}$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \int_M \nabla u \cdot \nabla (u - \sup_{\Gamma_1} g) &\geq 0 \\ \stackrel{\text{Part. Int.}}{\Leftrightarrow} - \int_M f (u - \sup_{\Gamma_1} g) &\geq 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt $M = \emptyset$, und somit folgt (A.21). \square

Lemma A.4: Schwaches Vergleichsprinzip Seien $u, v \in H^1(\Omega)$, weiterhin sei $\Delta u \leq \Delta v$ in Ω , $u \geq v$ auf Γ_1 und $\partial_n u \geq \partial_n v$ auf Γ_2 dann gilt

$$u \geq v \text{ in } \Omega.$$

Beweis Da wir eine lineare Partielle Differentialgleichung betrachten, genügt es zu zeigen, dass aus $\Delta v \geq 0$ in Ω , $v \leq 0$ auf Γ_1 und $\partial_n v \leq 0$ auf Γ_2 folgt, dass $v \leq 0$ in Ω . Ansonsten kann man einfach v durch $v - u$ im folgenden ersetzen.

Analog zum letzten Beweis definieren wir $M := \{x \in \Omega \mid v(x) > 0\}$. Durch Anwendung des schwachen Maximumprinzips (es gilt $\Delta v \geq 0$ in M und $v|_{\partial M} = 0$) auf $v|_M$ bekommen wir $\sup_M v = \sup_{\partial M} v$ und somit folgt $M = \emptyset$. \square

B Referenzen und Formales

Literatur

- [AL98] B. Aoubiza, M. R. Laydi: *A Penalty Method for solving Partial Differential Equations with Periodic Boundary Condition: Application to the Homogenization Theory*, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, Vol. 8, No. 5, p. 749-760, 1998
- [All92] G. Allaire: *Homogenization and Two-Scale Convergence*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 23, No. 6, pp. 1482-1518, November 1992
- [All97a] G. Allaire: *One-phase Newtonian Flow* in [Hor97], 3.1, p. 45-68
- [All97b] G. Allaire: *Mathematical approaches and methods [of homogenization]* in [Hor97], Anhang A
- [Alt99] H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999
- [Bea79] J. Bear: *Hydraulics of Groundwater*, McGraw Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, McGraw Hill, New York, St. Louis, San Francisco et al., 1979
- [BC99] A. Yu. Belyaev, G. A. Chechkin: *Averaging Operators with Boundary Conditions of Fine-Scaled Structure*, Mathematical Notes (Translation of: Matematicheskie Zametki), Vol. 65, No. 4, p. 418-429, 1999
- [BMS92] A. G. Belyaev, A. G. Mikheev, A. S. Shamaev: *Diffraction of a Plane Wave by a Rapidly Oscillating Surface*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 32, No. 8, pp. 1121-32, 1992
- [BMW94] A. Bourgeat, A. Mikelić, S. Wright: *Stochastic Two-Scale Convergence in the Mean and Applications*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle Journal), Vol. 456, pp. 19-51, 1994
- [CD99] D. Cioranescu, P. Donato: *An Introduction to Homogenization*, Oxford University Press, Oxford, 1999
- [CG99] G. A. Chechkin, R. R. Gadyl'schin: *On Boundary - Value Problems for the Laplacian in Bounded and in Unbounded Domains with Perforated Boundaries*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 40, No. 2, p. 84-108, 1999
- [Fil98] J. Filo: *A Note on Asymptotic Expansion for a Periodic Boundary Condition*, Archivum Mathematicum, Brno, Tomus 34, p. 83-92, 1998

- [FL95] J. Filo, S. Luckhaus: *Asymptotic Expansion for a Periodic Boundary Condition*, Journal of Differential Equations, Vol. 120, pp. 133-173, 1995
- [FL00] J. Filo, S. Luckhaus: *Homogenization of a boundary condition for the Heat Equation*, Journal of the European Mathematical Society (JEMS), Vol. 2, p. 217-258, 2000
- [GT01] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001
- [Heu91] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, 10. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1991
- [Hor97] U. Hornung (Hrsg.): *Homogenization and Porous Media*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Band 6, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [Hum99] H.-K. Hummel: *Homogenization for Heat Transfer in Polycrystals with Interfacial Resistances*, Preprint 99 - 57 (SFB 359), Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen, Universität Heidelberg, Dezember 1999
- [Hum00] H.-K. Hummel: *Homogenization of Periodic and Random Multidimensional Microstructures*, Freiburger Forschungshefte, TU Bergakademie Freiberg (Sachsen), 2000
- [Jae99] W. Jäger: *Analysis I - III*, Skript zur Vorlesung, Universität Heidelberg, 1998-2000
- [JKO94] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik: *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994
- [JOS94] W. Jäger, O. A. Oleinik, A. S. Shamaev: *On a Homogenization Problem for the Laplace Equation in a Partially Perforated Domain*, Russian Academy of Sciences - Doklady - Mathematics (Translation of: the Mathematics Section of: Doklady Akademii Nauk), Vol. 48, No. 3, p. 545-551, 1994
- [Koz78] S. M. Kozlov: *Averaging Random Structures*, Soviet Mathematics - Doklady, Vol. 19, No. 4, pp. 950-954, 1978
- [KS80] D. Kinderlehrer, G. Stampaccia: *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, 1980
- [Ngu89] G. Nguetseng: *A general Convergence Result for a Functional related to the Theory of Homogenization*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 20, No. 3, pp. 608-623, 1989

- [OS95] O. A. Oleinik, T. A. Shaposhnikova: *On the Averaging Problem for a Partially Perforated Domain with a Mixed Boundary Condition with a Small Parameter on the Cavity Boundary*, Differential Equations, Vol. 31, No. 7, p. 1086-1098, 1995
- [Sar98] P. Sauré: *Homogenisierung des Laplaceoperators in Gebieten mit stark oszillierendem Rand*, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, Dezember 1998
- [Sch02] B. Schweizer: *Laws for the Capillary Pressure via the Homogenization of Fronts in Porous Media*, Habilitationsschrift, Universität Heidelberg, 2002
- [SP80] E. Sanchez-Palencia: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980
- [Tar78] L. Tartar: *Quelques remarques sur l'homogénéisation*, in H. Fujita (Hrsg.): *Proceedings of the Japan-France Seminar 1976, Functional Analysis and Numerical Analysis*, p. 469-481, Japan Society for the Promotion of Sciences, 1978
- [Tem84] R. Temam: *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, 1984

B.2 Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	die Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}^*	die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\mathbb{Z}	die additive Gruppe der ganzen Zahlen
\mathbb{Z}^*	die additive Gruppe der ganzen Zahlen ohne Null
\mathbb{R}	der Körper der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	die Menge der positiven reellen Zahlen ohne Null
\mathbb{R}^N	der n-dimensionale euklidische Raum
\mathbb{C}	der Körper der komplexen Zahlen, die imaginäre Einheit ist mit i bezeichnet
$ M $	$= \lambda_N(M)$ das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^N einer Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ bzw. das Zählmaß einer Indexmenge $M \subset \mathbb{Z}$
$\sigma(M)$	das Oberflächen-Maß einer Menge $M \subset \mathbb{R}^N$, d.h. das Lebesgue-Maß auf ∂M
$\delta_{j,k}$	das Kronecker-Symbol, $\delta_{j,k} = 1$ für $j = k$, ansonsten ist $\delta_{j,k} = 0$
$\mathbb{I}_M(\cdot)$	die charakteristische Funktion einer Menge M
$\mathbf{1}_N$	die Einheitsmatrix im \mathbb{R}^N (die Matrix mit den Koeffizienten $\delta_{j,k}$, $j, k \in \{1, \dots, N\}$)
a^T	transponierter Vektor a , a in \mathbb{R}^N
A^T	transponierte Matrix A , A in $\mathbb{R}^{N \times N}$
D_i	$:= \frac{d}{dx_i}$ die totale Ableitung nach x_i
∇	$:= (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})^T$
∂_{y_i}	die partielle Ableitung nach y_i
∇_y	$:= (\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_N})^T$
∂_i	$:= \partial_{x_i}$, die partielle Ableitung nach x_i
∂_{n_y}	$= n_y \cdot \nabla_y$, die Richtungsableitung bzgl. y in Richtung der äußeren Normale n_y an das Gebiet, in dem die y betrachtet werden
n	die äußeren Normale n_x an das Gebiet, in dem die x betrachtet werden
∂_n	$:= \partial_{n_x}$

$C^0(\Omega)$	$= C^0(\Omega, \mathbb{R})$, der Raum der stetigen Funktionen, die von einer Menge Ω in die reellen Zahlen abbilden
$C^k(\Omega)$	$= C^k(\Omega, \mathbb{R})$, der Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen, die von einer Menge Ω in die reellen Zahlen abbilden, $k \in \mathbb{N}^*$
$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$	$= C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, $0 \leq \alpha \leq 1$ der Unterraum von $C^k(\bar{\Omega})$ der Funktionen mit Hölder-stetigen Ableitungen $\partial^m \phi$, $0 \leq m \leq k$, wobei $\sup_{x \neq y, x, y \in \bar{\Omega}} \left\{ \frac{ \phi(x) - \phi(y) }{ x - y ^\alpha} \right\} < \infty$ die Hölder-Konstante ist; im Fall von $k = 0, \alpha = 1$ spricht man von Lipschitz-stetigen Funktionen
$C^\infty(\Omega)$	$= C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, der Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen, die von einer Menge Ω in die reellen Zahlen abbilden
$C_0^k(\Omega)$	$= C_0^k(\Omega, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Unterraum von $C^k(\Omega)$ der Funktionen ϕ mit kompaktem Träger in Ω für alle $\partial^m \phi$, $0 \leq m \leq k$
$C_\#^k(\Omega)$	$= C_\#^k(\Omega, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Unterraum von $C^k(\Omega)$ der Ω -periodischen Funktionen
$L^p(\Omega)$	$= L^p(\Omega, \mathbb{R})$, $0 < p < \infty$, der Raum der reellwertigen Funktionen ϕ mit $(\int_\Omega \phi(x) ^p dx)^{1/p} < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$= L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, der Raum der reellwertigen Funktionen ϕ mit $\text{ess sup}_{x \in \Omega} \phi(x) < \infty$
$L_\#^p(\Omega)$	$= L_\#^p(\Omega, \mathbb{R})$, $0 < p < \infty$, der Unterraum von $L^p(\Omega)$ der fast überall Ω -periodischen Funktionen
$L_{loc}^p(\Omega)$	$= L_{loc}^p(\Omega, \mathbb{R})$, $0 < p \leq \infty$, der Raum der lokal in Ω integrierbaren reellwertigen Funktionen, d.h. $\phi \in L^p(D)$ für alle $\bar{D} \subset \Omega$
$W^{k,p}(\Omega)$	$= W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R})$, der Raum der reellwertigen Funktionen ϕ mit $(\int_\Omega D^m \phi(x) ^p dx)^{1/p} < \infty$ für alle $m \in \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; versehen mit der Norm $\ \phi\ _{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{m=0}^k \ D^m \phi\ _{L^p(\Omega)}$
$W_\#^{k,p}(\Omega)$	$= W_\#^{k,p}(\Omega, \mathbb{R})$, der Abschluss von $C_\#^\infty(\Omega)$ in der $W^{k,p}(\Omega)$ -Norm, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	$= W_0^{k,p}(\Omega, \mathbb{R})$, der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $W^{k,p}(\Omega)$ -Norm, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$H^k(\Omega)$	$:= W^{k,2}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$H_\#^k(\Omega)$	$:= W_\#^{k,2}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$H_0^k(\Omega)$	$:= W_0^{k,2}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$H^k(\Omega)/\mathbb{R}$	Raum der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $u \simeq v \iff u - v = \text{const}$, für alle $u, v \in H_{\#}^1(Y)$
X'	der Dualraum zu X
$H^{-1}(\Omega)$	der Dualraum zu $H_0^1(\Omega)$
$C_0^\infty[\Omega; C_{\#}^\infty(Y)]$	der Raum der Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit Werten in $C_{\#}^\infty(Y)$
$L^p[\Omega; C_{\#}^0(Y)]$	der Raum der Funktionen $\phi : x \mapsto \phi(x) \in C_{\#}^0(Y)$ mit $\ \phi(x, \cdot)\ _{C_{\#}^0(Y)} \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$; versehen mit der Norm $\ \phi\ _{L^p[\Omega; C_{\#}^0(Y)]} := \{\int_{\Omega} \ \phi(x, \cdot)\ _{C^0(Y)}^p dx\}^{1/p}$
$L_{\#}^p[Y; C^0(\bar{\Omega})]$	der Raum der Funktionen $\phi : x \mapsto \phi(x) \in C^0(\bar{\Omega})$ mit $\ \phi(\cdot, y)\ _{C^0(\bar{\Omega})} \in L_{\#}^p(Y)$, $1 < p < \infty$; versehen mit der Norm $\ \phi\ _{L_{\#}^p[Y; C^0(\bar{\Omega})]} := \{\int_Y (\sup_{x \in \bar{\Omega}} \phi(x, y))^p dy\}^{1/p}$
$L_{\#}^2[\Omega; H_{\#}^1(Y)]$	der Raum der Funktionen $\phi : x \mapsto \phi(x) \in H_{\#}^1(Y)$ mit $\ \nabla \phi(x, \cdot)\ _{L^2(Y)} \in L_{\#}^2(\Omega)$; versehen mit der Norm $\ \phi\ _{L^2[\Omega; H_{\#}^1(Y)]} := \{\int_{\Omega} \ \nabla \phi(x, \cdot)\ _{L^2(Y)}^2 dx\}^{1/2}$
$u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \in X$	u^ε konvergiert schwach in X gegen u_0
$u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u_0 \in X'$	u^ε konvergiert schwach* in X' gegen u_0
$u^\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} u_0$	u^ε konvergiert im Sinne der 2-Skalen-Konvergenz (siehe Definition I.1) gegen u_0

B.3 Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei allen bedanken, die zu dieser Arbeit beigetragen haben. Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Willi Jäger gebührt mein Dank für viele Ideen und Denkanstöße zu dieser Arbeit, sowie für interessante Vorlesungen und Seminare über das ganze Studium hinweg und nicht zuletzt für die freundliche und produktive Atmosphäre in seiner Arbeitsgruppe.

Insbesondere bedanke ich mich bei Dr. Ben Schweizer für die motivierende Betreuung, zahlreiche Gespräche und Hilfestellungen.

Nicht vergessen möchte ich an dieser Stelle meine Freunde und Kommilitonen, vor allem möchte ich Igor Doktorski, Johannes Bauer und Björn Menze danken, die mir beim Korrektur lesen und mit vielen Tipps bezüglich \LaTeX geholfen haben. Bei Sandra Schönbacher bedanke ich mich für sprachliche Verbesserungsvorschläge und die moralische Unterstützung.

Ganz besonderen Dank schulde ich meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben.

B.4 Erklärung der selbstständigen Anfertigung

Hiermit erkläre ich mit meinem Ehrenwort, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst habe und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet wurden.

Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, wurden durch Angabe der Quelle als Entlehnungen kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde weder einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt, noch wurde eine Veröffentlichung vorgenommen.

Heidelberg, den 6. Mai 2004

Sven-Joachim Kimmerle