

Analyse iterativer Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungen in Matlab

STUDIENARBEIT



Max Bahnmüller

Institut für Mathematik und Computer-gestützte Simulation, Universität der Bundeswehr in München, Deutschland

der Bundeswehr
Universität München

Motivation

Bei der Betrachtung von Festkörpern und deren Eigenschaften spielt die mathematische Modellierung eine zentrale Rolle. Lineare Gleichungssysteme sind hierbei nicht wegzudenken. Abhängig von gegebener Größe und Komplexität des Problems können direkte Lösungsverfahren an ihre Grenzen stoßen. Aus diesem Grund machen wir uns numerische Verfahren, wie das iterative Lösen von Gleichungssystemen zu Nutze. Hierbei wird durch mehrmaliges Durchlaufen eines Programmablaufs eine Annäherungslösung erzeugt.

Funktionsprinzip der Verfahren

Jacobi-Verfahren

Die i -te Gleichung des Gleichungssystems wird nach der i -ten Variable x_i aufgelöst:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right], \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Die Matrix A muss dabei einer $n \times n$ -Matrix entsprechen und darf keine Nullen auf der Hauptdiagonalen besitzen.

Gauß-Seidel-Verfahren

Grundidee wie bei Jacobi, hier werden lediglich zuvor berechnete Werte desselben Iterationsschritts bereits mit in die Gleichung einbezogen:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right], \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Auch die Bedingungen, die bei Jacobi an die Matrix A gestellt werden, bleiben identisch.

CG-Verfahren

Hier wird das Prinzip des Gradientenverfahrens aufgegriffen. Es wird versucht durch Optimierung der Suchrichtung und Schrittweite möglichst schnell ein Minimum, also die Näherungslösung, zu finden. Dabei sind die einzelnen Suchrichtungen s zueinander konjugiert, sodass

$$(s^{(k+1)})^T A s^{(k)} = 0$$

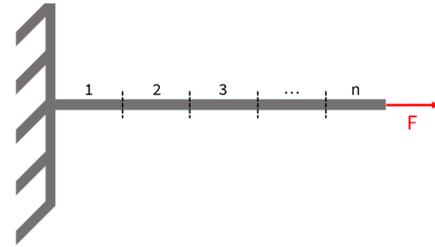
Die Matrix A muss symmetrisch und positiv definit sein.

CG-Verfahren mit Vorkonditionierung

Basiert auf dem CG-Verfahren, nur wird hier in Abhängigkeit des jeweiligen Residuums mithilfe eines anderen iterativen Verfahrens die Iterierte verbessert.

Problemstellung

Betrachtet wird folgender Stab, der mit einer Zugkraft belastet und gemäß der Finite-Elemente-Methode diskretisiert wird:



Daraus ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

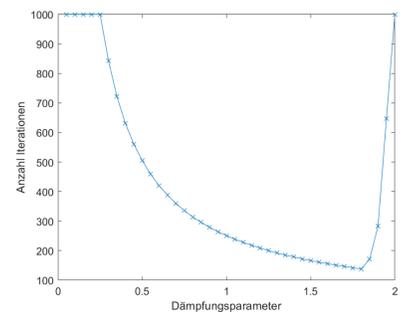
Algorithmische Aspekte

Mit diesen Aspekten kann Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit und/oder die Genauigkeit der Lösung genommen werden.

Das Abbruchkriterium

- Maximale Anzahl an Iterationen: Abbruch nach gewisser Anzahl an Schleifendurchläufen. Besonders wichtig, damit bei Divergenz des Verfahrens keine Endlosschleife erzeugt wird.
- Änderung des Residuums: Festlegen einer Schranke, die entweder von der absoluten oder relativen Norm des Residuums abhängig ist.

Beispiel für das Verhalten des Dämpfungsparameters bei einer 10×10 Matrix A gelöst mit Gauß-Seidel:



Der Dämpfungsparameter

- Wird implementiert mit folgender Formel:

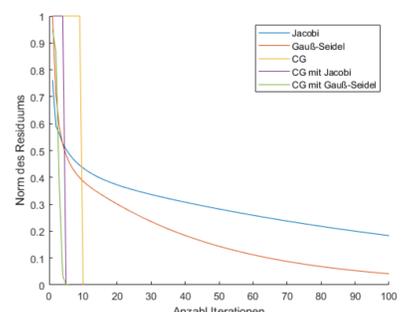
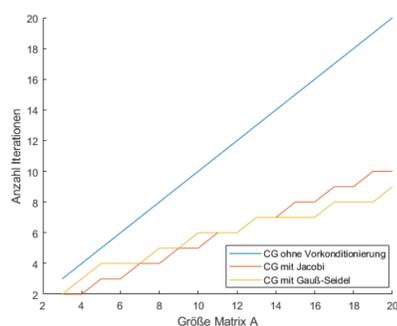
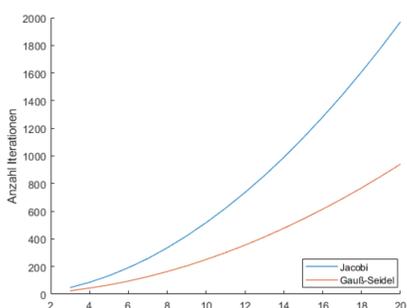
$$x_{neu}^{(k+1)} = (1 - \omega) * x^{(k)} + \omega * x_{alt}^{(k+1)}$$

- Nimmt direkten Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit des Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahrens.

Die Vorkonditionierung

- Verknüpfung mehrerer Verfahren in einem Schleifendurchlauf
- Minimierung der Konditionszahl der Matrix A durch Heranmultiplizieren einer geeigneten Matrix an das Gleichungssystem

Vergleich der Verfahren



l.o.: Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens
r.o.: Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens mit und ohne Vorkonditionierung
l.u.: Vergleich der Residuen

AUFWAND PRO ITERATION



ANZAHL ITERATIONEN

Fazit

Jacobi-Verfahren

- + Konvergenzverhalten durch Dämpfungsparameter steuerbar
- + Geringer Aufwand pro Iteration
- + Parallelisierbar
- + Gut als Vorkonditionierer
- Langsame Konvergenz

Gauß-Seidel-Verfahren

- + Konvergenzverhalten durch Dämpfungsparameter steuerbar
- + Geringer Aufwand pro Iteration
- + Gut als Vorkonditionierer
- Langsame Konvergenz

- Höherer Aufwand für Parallelisierung im Vergleich zum Jacobi-Verfahren

CG-Verfahren

- + Konvergenz in maximal n Schritten
- + Besonders geeignet bei dünn besetzten Matrizen
- + Durch Vorkonditionierung stark zu beschleunigen
- Matrix A muss zusätzlich zur Symmetrie positiv definit sein
- Aufwand pro Iteration wird durch Vorkonditionierung mit anderem Verfahren stark erhöht

Quelle

Saad, Yousef. (2003). Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 10.1137/1.9780898718003.ch4.