

**KONGRUENZUNTERSUCHUNGEN
IN DEFORMATIONSNETZEN DURCH MINIMIERUNG
DER SUMME DER KLAFFUNGSBETRÄGE**

*Wilhelm CASPARY
Yang Quan CHEN
Rolf KÖNIG*

In: *WELSCH, Walter (Hrsg.) [1983]:*

Deformationsanalysen '83

Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze

Beiträge zum Geodätischen Seminar 22. April 1983

Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, S. 77-94

ISSN: 0173-1009

KONGRUENZUNTERSUCHUNGEN IN DEFORMATIONSNETZEN DURCH MINIMIERUNG
DER SUMME DER KLAFFUNGSBETRÄGE

von

W. CASPARY, CHEN Y.Q. und R. KÖNIG

Geodätisches Institut
Hochschule der Bundeswehr München
Werner-Heisenberg-Weg 39
8014 Neubiberg
Bundesrepublik Deutschland

ZUSAMMENFASSUNG

Die Analyse von Deformationen in geodätischen Netzen wird mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen durchgeführt, deren Parameter so geschätzt werden, daß die Summe der Längen der Restklaffungsvektoren zum Minimum wird. Das so definierte robuste Schätzverfahren hat gegenüber der Methode der kleinsten Quadrate den Vorteil, daß instabile Punkte die Transformationsparameter praktisch nicht beeinflussen. Nach Ableitung der Rechenformeln und Begründung einer Signifikanzschwelle für den Nachweis von Deformationen wird das Verfahren auf ein simuliertes Testbeispiel angewandt. Die Ergebnisse bestätigen die Gutartigkeit und die Effizienz des Verfahrens.

ABSTRACT

To monitor the deformations in geodetic networks the similarity transformation is used, where the parameters are estimated in such a way that the sum of the lengths of the vectors of discrepancies is minimized. The so defined robust estimation procedure has in comparison with the least squares method the advantage that nonidentical points are nearly without influence on the transformation parameters. After the development of the equations for numerical computations a level of significance is introduced to decide whether a point is an identical one or not. The performance of the procedure is tested using a simulated net with known deformations. The results prove the favourable numerical behavior and the efficiency of the method.

1. EINFÜHRUNG

Die Methode der kleinsten Quadrate hat sich als Schätzverfahren in der Geodäsie außerordentlich gut bewährt. Sie führt zu übersichtlichen Algorithmen, für die ausgefeilte stabile numerische Verfahren entwickelt worden sind, und sie liefert Lösungen, die unter gewissen Voraussetzungen erwartungstreu sind und minimale Varianz aufweisen. Diese positiven Eigenschaften haben dazu geführt, daß Alternativen zur Methode der kleinsten Quadrate in der Geodäsie nur selten in Erwägung gezogen worden sind. Und doch fehlt es nicht an Problemen, für deren Lösung die Methode denkbar ungeeignet ist.

So gehen zum Beispiel die positiven Schätzeigenschaften verloren, wenn das Beobachtungsmaterial grobe Fehler enthält oder wenn systematische Fehler (Modellfehler) vorhanden sind. Mit dieser Situation beschäftigen sich *KRÄRUP* et al. (1980). Sie schlagen, speziell für die Aufdeckung grober Fehler, robuste Schätzverfahren vor und berichten über gute Erfahrungen mit der zu dieser Klasse von Schätzverfahren gehörenden "Dänischen Methode". Nach *SEEBER* (1977) geht die Eigenschaft minimaler Varianz verloren, wenn die Beobachtungen nicht normalverteilt sind. Je flacher der Verlauf der Dichtefunktion ist, desto ungünstiger sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Eine Schätzung unter der L_1 -Norm oder allgemeiner unter der Minimumsbedingung $\sum |v|^p$, $1 \leq p < 2$ ist für diese Situation geeigneter.

FUCHS (1982) hat sich ebenfalls mit der Schätzung unter der L_1 -Norm beschäftigt und die Analogie des Problems mit der linearen Programmierung herausgearbeitet, für die ausgereifte numerische Verfahren verfügbar sind.

In der vorliegenden Arbeit wird mit dem Ziel der Lokalisierung instabiler Punkte in geodätischen Netzen die Parameterschätzung für eine Koordinatentransformation unter der Bedingung durchgeführt, daß die Summe der Längen der Restklaffungsvektoren zum Minimum wird. Diese Minimumsbedingung hat den Vorteil, daß die Schätzung der Transformationsparameter von den Koordinatendifferenzen instabiler Punkte praktisch unbeeinflusst bleibt. Die Klaffungen in diesen Punkten treten daher ungeschmälert als Modellresiduen in Erscheinung.

2. DAS MATHEMATISCHE MODELL

Von einem geodätischen Netz zur Analyse von Deformationen mögen die Ergebnisse der Koordinatenausgleichungen von zwei Beobachtungsepochen vorliegen. Beiden Ausgleichungen liegen dasselbe Koordinatensystem zugrunde, so daß die Koordinatendifferenzen klein sind. Der Einfachheit halber wird nur auf die Lagekoordinaten der Punkte Bezug genommen. Der Übergang auf ein dreidimensionales Netz ist leicht möglich.

Aus demselben Grund wird angenommen, daß die Netze mit Ausnahme einzelner verschobener Punkte einander ähnlich sind. Der Übergang auf eine Affintransformation bzw. die Berücksichtigung von Strainparametern bereitet keinerlei Schwierigkeiten; sie soll jedoch hier nicht behandelt werden.

Mit

$$\Delta^T = (\Delta_1^T, \Delta_2^T, \dots, \Delta_p^T), \quad \Delta_i^T = (\Delta x_i, \Delta y_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

sei der Vektor der Koordinatendifferenzen und mit

$$\delta^T = (\delta_1^T, \delta_2^T, \dots, \delta_p^T), \quad \delta_i^T = (\delta x_i, \delta y_i)$$

der Vektor der Restklaffungen nach der Transformation in den p Punkten des Netzes bezeichnet. Damit lautet das mathematische Modell der Ähnlichkeitstransformation

$$\Delta = \mathcal{H}t + \delta, \quad (2-1)$$

wobei t der Vektor der Transformationsparameter

$$t^T = (t_x, t_y, r_z, m)$$

t_x Translation in x-Richtung

t_y Translation in y-Richtung

r_z Rotation um die z-Achse

m Maßstabsunterschied

und \mathcal{H} die Koeffizientenmatrix ist:

$$\mathcal{H}^T = (\mathcal{H}_1^T, \mathcal{H}_2^T, \dots, \mathcal{H}_p^T), \quad \mathcal{H}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\bar{y}_i & \bar{x}_i \\ 0 & 1 & \bar{x}_i & \bar{y}_i \end{pmatrix}$$

Aus rechentechnischen Gründen ist es zweckmäßig, die Koordinaten auf den Schwerpunkt zu beziehen.

3. SCHÄTZUNG DER TRANSFORMATIONSPARAMETER

Gewöhnlich werden die Transformationsparameter \mathbf{t} in (2-1) nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt, indem der Ausdruck $\delta^T \delta$ minimiert wird. Da jedoch angenommen werden soll, daß einzelne Punkte ihre Lage verändert haben, ist dieses Vorgehen nicht optimal, denn ein Teil der Lageänderungen wird durch die Transformationsparameter aufgefangen und auf alle Restklaffungen verteilt, so daß möglicherweise die Punktveränderungen nicht erkannt werden. In dieser Situation ist ein Schätzverfahren vorzuziehen, das robust gegen Einzelpunktdeformationen ist.

In Analogie zur L_1 -Norm kann die Schätzung unter der auf zwei Dimensionen verallgemeinerten Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^p d_i \Rightarrow \min, \quad d_i^2 = \delta_i^T \delta_i \quad (3-1)$$

durchgeführt werden, bei der die Summe der Längen der Restklaffungsvektoren, unabhängig von ihren Richtungen, minimiert wird.

Das Minimum wird erreicht, wenn die Ableitung von Gleichung (3-1) nach dem Vektor \mathbf{t} verschwindet.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \sum_{i=1}^p d_i = \mathbf{0} \quad (3-2)$$

Wird (2-1) in (3-1) eingesetzt, so folgt

$$d_i^2 = \delta_i^T \delta_i = (\Delta_i - \mathcal{H}_i \mathbf{t})^T (\Delta_i - \mathcal{H}_i \mathbf{t}) \quad (3-3)$$

und die Ableitung (3-2) nimmt die Form

$$\sum_{i=1}^p \mathcal{H}_i^T \delta_i / d_i = \mathbf{0} \quad (3-4)$$

an, die in Matrixschreibweise formuliert zu der Endgleichung

$$\mathcal{H}^t \mathbf{D}^{-1} \mathcal{H} \mathbf{t} - \mathcal{H}^t \mathbf{D}^{-1} \Delta = \mathbf{0} \quad (3-5)$$

führt.

Dieser Ausdruck hat dieselbe Struktur wie die Normalgleichung bei der Ausgleichung ungleichgewichtiger Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die an der Stelle der Gewichtsmatrix auftretende Diagonalmatrix \mathcal{D}^{-1} enthält die Reziprokwerte der Klaffungsvektorlängen

$$\mathcal{D}^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_1^{-1}, d_2^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_p^{-1}, d_p^{-1}) . \quad (3-6)$$

Da die Größen d_i erst nach der Schätzung bekannt sind, muß Gleichung (3-5) iterativ gelöst werden. Dies geht sehr einfach nach der Iterationsvorschrift

$$\mathbf{t}_{j+1} = (\mathcal{H}^T \mathcal{D}_j^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T \mathcal{D}_j \Delta ; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3-7)$$

$$\delta_j = \Delta - \mathcal{H} \mathbf{t}_j , \quad \mathbf{t}_0 = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}_0^{-1} = \mathcal{J} .$$

Als wesentliche Eigenschaft dieses Schätzverfahrens liest man aus (3-7) ab, daß große Restklaffungen zu einem kleinen "Gewicht" führen und damit die Parameter praktisch allein von den stabilen Punkten bestimmt werden, deren Restklaffungen klein bleiben.

Wenn die Koordinatendifferenzen Δ unterschiedlich genau bestimmt wurden und eine Gewichtsmatrix \mathcal{P}_Δ bekannt ist oder a priori geschätzt werden kann, so ist diese im Modell zu berücksichtigen. Der einfachste Weg dazu ist die Homogenisierung der Gleichung (2-1). Durch Linksmultiplikation mit der Matrix $\mathcal{P}_\Delta^{1/2}$ erhält man den Übergang zu gleich genauen, unabhängigen Zufallsvariablen. Es ist allerdings Vorsicht geboten, wenn die Gewichte aus der Ausgleichung der Einzelepochen abgeleitet werden sollen, da die dabei gewonnene Varianz-Kovarianz-Matrix eng mit der Wahl des Koordinatensystems verknüpft ist.

4. SIGNIFIKANZ VON DEFORMATIONEN

Der wesentliche Nachteil der vorgeschlagenen Schätzmethode liegt darin, daß es derzeit noch keine geschlossene Fehlertheorie gibt. Die klassische Fehlerfortpflanzung kann auf (3-7) nicht angewandt werden, da der Ausdruck wegen (3-3) nicht linear in Bezug auf den Zufallsvektor Δ ist. Eine Linearisierung ist zwar möglich. Es hat sich aber bei Testrechnungen gezeigt, daß die auf diesem Wege berechneten Varianzen nicht mit denen übereinstimmen, die man mit Hilfe der Simulationstechnik erhält. Während die Simula-

tionstechnik bei kleinen Netzen durchaus geeignet ist, die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_{δ} der Restklaffungen zu berechnen, ist der Aufwand bei größeren Netzen doch beträchtlich. Es ist daher zu überlegen, nach welchen Kriterien die Entscheidung über die Signifikanz von Deformationen getroffen werden soll.

Da aus den Einzelausgleichungen die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_{Δ} des Differenzenvektors Δ bekannt ist und nur geringfügig größer sein wird als die des Restklaffungsvektors δ , wird man keinen zu großen Fehler begehen, wenn die Konfidenzbereiche auf der Basis von Σ_{Δ} festgelegt werden, falls nicht Σ_{δ} durch Simulationsrechnungen ermittelt wurde. Sofern die Deformationen bei Durchsicht der Restklaffungen nicht offensichtlich sind, wird daher empfohlen, alle Punkte, deren Restklaffungsvektor außerhalb der mit Σ_{Δ} berechneten 90 % Konfidenzellipse liegen, als signifikant verändert zu betrachten.

Weitere Untersuchungen sind geplant, um theoretisch befriedigendere Lösungen für die Signifikanzentscheidung zu finden.

5. TESTBEISPIEL

Das erläuterte Schätzverfahren wurde auf das in Abbildung 1 dargestellte Netz angewandt, wobei es galt, Deformationen in vier Epochenvergleichen aufzudecken. Die den Einzelausgleichungen zugrunde liegenden Beobachtungen sind durch Simulation entstanden; die a priori Varianzen waren vorgegeben. Da wegen der geologischen Verwerfung, die durch das Netz geht, auch Lageveränderungen von Netzteilen zu erwarten sind, wurden die in Abschnitt 3 entwickelten Formeln für die Transformation von Netzteilen modifiziert.

Die Beobachtungen wurden zunächst einer freien Ausgleichung unterworfen. Das Datum lieferten die ausgeglichenen Koordinaten aus Epoche 1 der in allen Epochen auftretenden 14 identischen Punkte. Eine Maßstabsunbekannte wurde nicht eingeführt, da ihre Verwendung nur beim Einsatz verschiedener Distanzmeßgeräte begründet ist. Die berechneten Koordinatendifferenzen dienten als Eingabe für die spezielle Ähnlichkeitstransformation.

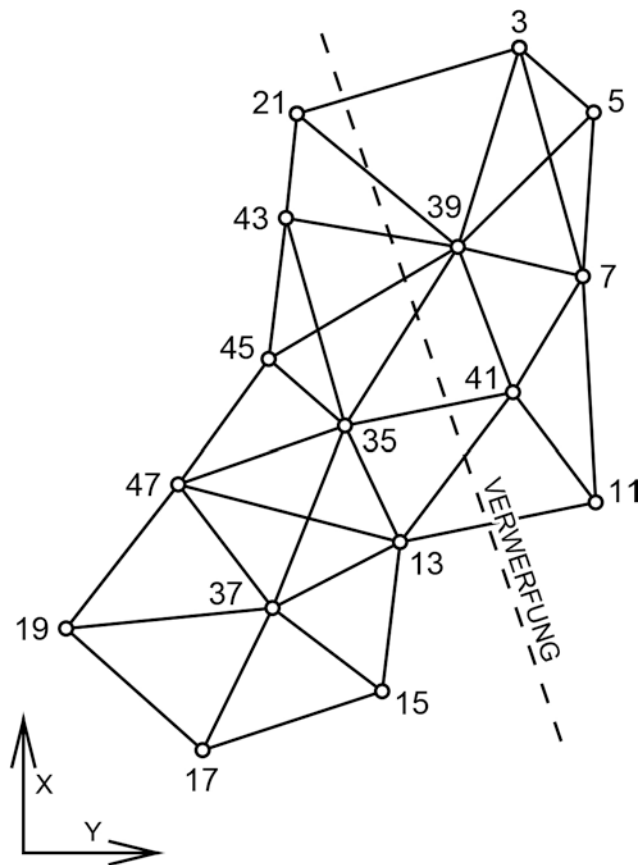


Abb. 1

Um erste Erfahrungen mit dieser Parameterschätzung für die Ähnlichkeits-
 transformation zu gewinnen, wurden für alle Epochenvergleiche drei Varianten
 gerechnet:

- a) mit Maßstab, Rotation und Translation in x und y
- b) mit Rotation und Translation in x und y
- c) mit Translation in x und y

In der ersten Phase der Epochenvergleiche wurden alle Punkte als identisch
 aufgefaßt. Die Restklaffungen wurden als Vektoren zusammen mit den 90 %-
 Konfidenzellipsen, die zu den als Ausgangsgrößen benutzten Koordinatendif-
 ferenzen gehören, graphisch dargestellt (siehe folgende Abbildungen). In
 allen Fällen zeigt sich bei der Analyse des Ergebnisses eine deutliche
 Verschiebung der durch die Verwerfung getrennten Blöcke (siehe Abbildung 1)
 relativ zueinander.

In der zweiten Bearbeitungsphase wurde der Betrag der Relativbewegung geschätzt. Dazu wurde zunächst eine Transformation mit den Punkten nur eines Blockes als identische Punkte durchgeführt. Die dabei verbleibenden Restklaffungen wurden danach als Eingabegrößen für eine Transformation auf den zweiten Block eingeführt. Die bei dieser Transformation ermittelten Transformationsparameter sind die beste Schätzung der Relativbewegung der Blöcke. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse zusammengestellt. Es zeigt sich, daß die Translationen bei den Versionen b) und c) recht gut geschätzt werden, jedoch stets kleiner ausfallen als die simulierten Beträge. Wird ein Maßstab mitgeführt, Version a), so nimmt dieser offensichtlich einen Teil der Blocktransformationen auf.

In der letzten Analysephase wird untersucht, ob sich innerhalb der Blöcke Einzelpunkte befinden, die sich anders verhalten haben als die anderen Blockpunkte. Als Signifikanzschwelle wurde aus den in Abschnitt 4 erläuterten Gründen die in den Abbildungen mit dargestellte 90 %-Konfidenzellipse festgelegt, d.h. als signifikante Einzelpunkte werden jene Punkte betrachtet, deren Klaffungsvektor nach der entsprechenden Teilblocktransformation über das Gebiet der Konfidenzellipse hinausreicht. Das in Tabelle 1 zusammengestellte Ergebnis fällt recht befriedigend aus. Allerdings neigt die ansonsten günstigste Version c) in Einzelfällen dazu, Punkte, die sich blockkonform verhalten haben, als signifikante Einzelpunkte zu identifizieren. Eine geringe Erhöhung des Signifikanzniveaus ist geeignet, diese Schwäche zu beheben.

Abschließend sei vermerkt, daß bei allen Parameterschätzungen sämtliche Punkte des Netzes bzw. des gerade untersuchten Teilblockes benutzt wurden. Es wurden also keine Einzelpunkte eliminiert und danach erneut Schätzungen durchgeführt.

	Festkörperbewegungen [simuliert] a) 4 Parameter b) 3 Parameter c) 2 Parameter		Einzelpunkt- bewegungen [simuliert] a) 4 Parameter b) 3 Parameter c) 2 Parameter	Einzelpunktbewegungen für die 2-Parameter- Transformation [simuliert] c) 2 Parameter		
	t_x (cm)	t_y (cm)	Punktnummer	Pkt. Nr.	Δx (cm)	Δy (cm)
Epoche 1 - 2A	[20.0] 17.3 19.3 18.9	[12.0] 5.6 9.7 8.9	[3, 15, 45] 3, 45 3, 15, 45 3, 15, 45	3 15 45	[2.0] -6.3 [6.0] 12.9 [-10.0] -14.9	[20.0] 23.4 [-6.0] -4.5 [-8.0] -5.7
Epoche 1 - 2B	[20.0] 12.6 18.1 18.8	[12.0] 6.1 9.4 7.3	[-] - - 3	3	[20.0] 13.8	[12.0] 18.6
Epoche 1 - 3A	[40.0] 25.1 34.7 38.6	[20.0] 5.6 17.1 17.4	[11, 15] - - 3, 11, 15, 21	3 11 15 21	[40.0] 33.4 [32.0] 34.2 [-8.0] -5.5 [0.0] 4.8	[20.0] 30.4 [10.0] -0.3 [-12.0] -9.8 [0.0] 10.5
Epoche 1 - 3B	[40.0] 26.8 34.5 38.6	[20.0] 12.2 20.0 19.0	[-] - - 3, 5	3 5	[40.0] 32.1 [40.0] 33.6	[20.0] 32.9 [20.0] 29.7

Tabelle 1 : Zusammenstellung der simulierten und der geschätzten Deformationsbeträge

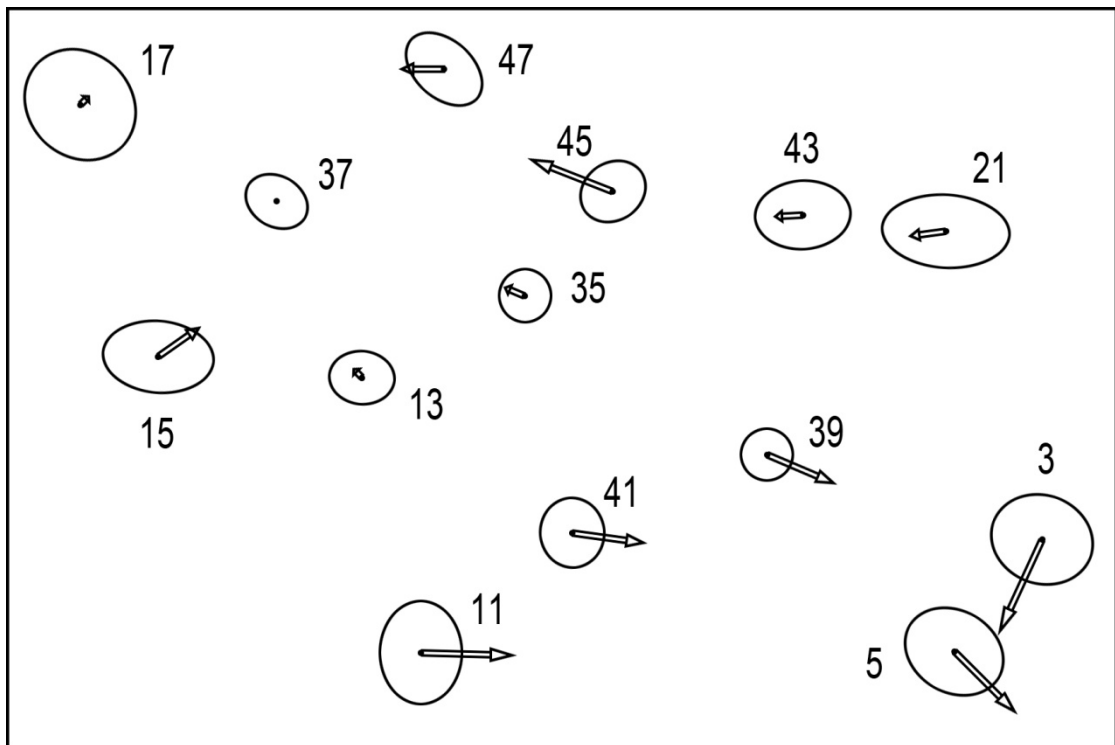


Abb. 2a Gesamtauffelderung, Epochen 1 - 2A

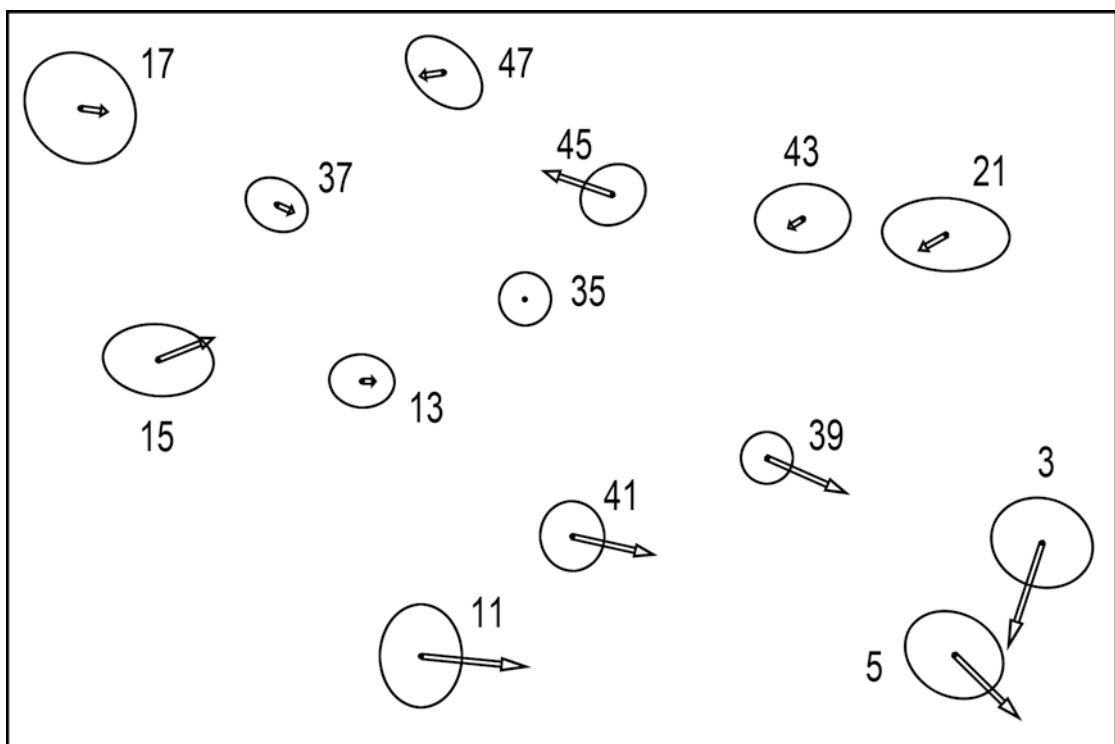


Abb. 2b Auffelderung auf den westlichen Block, Epochen 1 - 2A

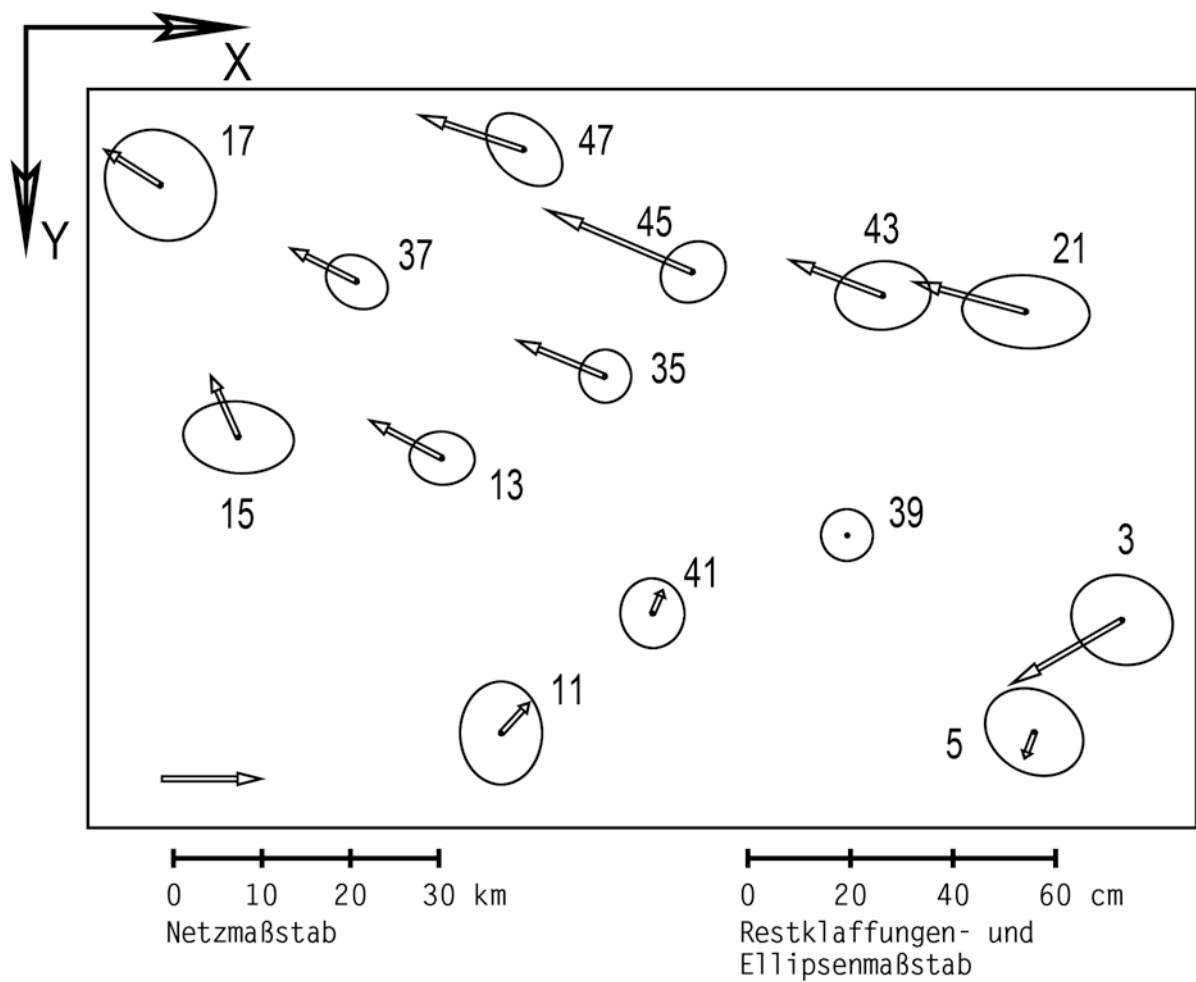


Abb. 2c Auffelderung auf den östlichen Block, Epochen 1 - 2A

Die dargestellten Restklaffungen sind das Ergebnis der Zweiparametertransformationen (Version c in Tabelle 1).

Die nicht blockkonformen Einzelpunktbewegungen werden den Abbildungen 2b und 2c entnommen.

Das Ergebnis ist eindeutig; eine geringe Änderung des Signifikanzniveaus bleibt ohne Einfluß.

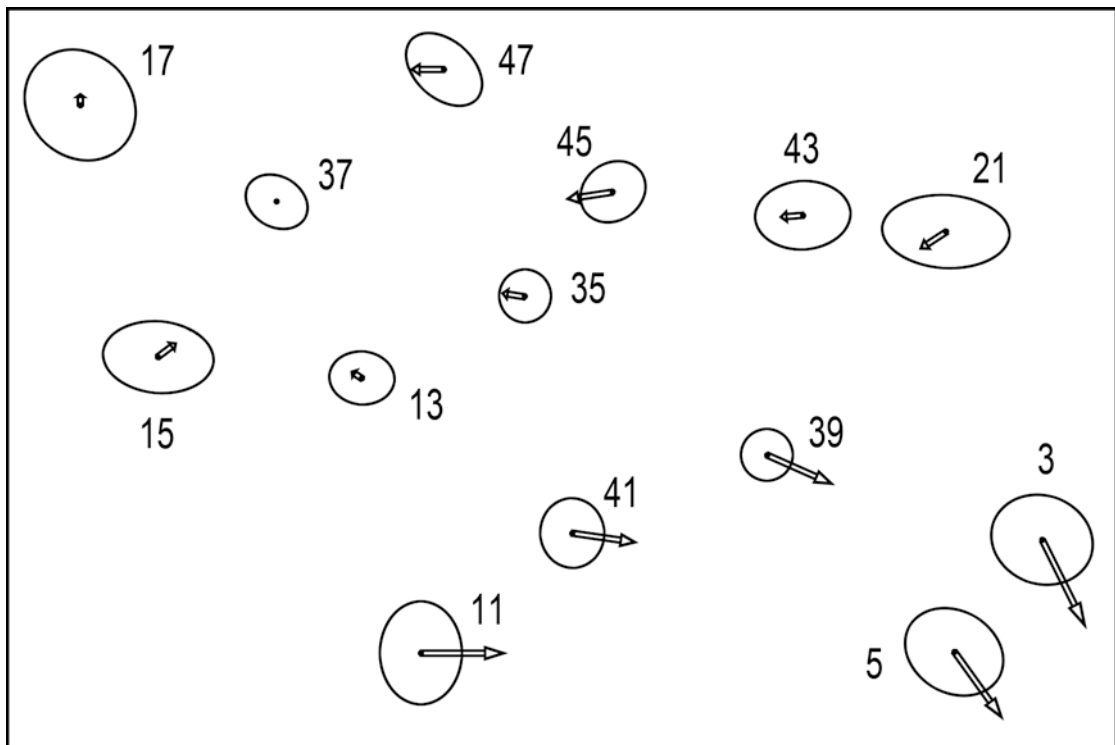


Abb. 3a Gesamtaufgliederung, Epochen 1 - 2B

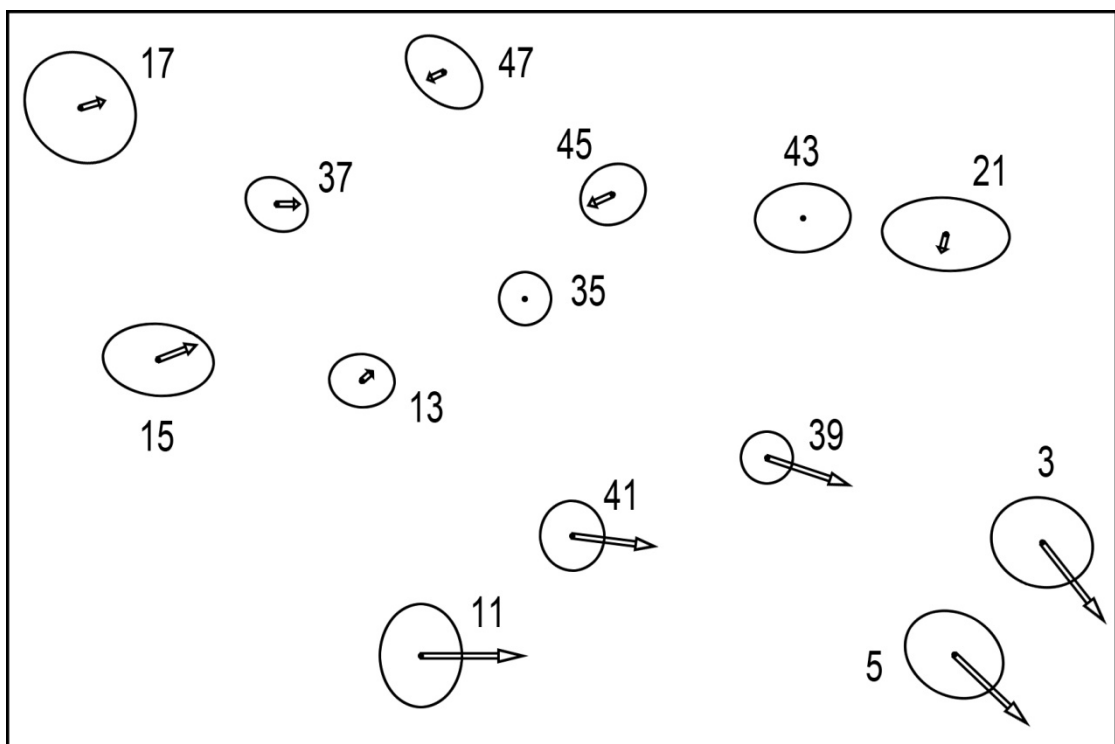


Abb. 3b Auffelderung auf den westlichen Block, Epochen 1 - 2B

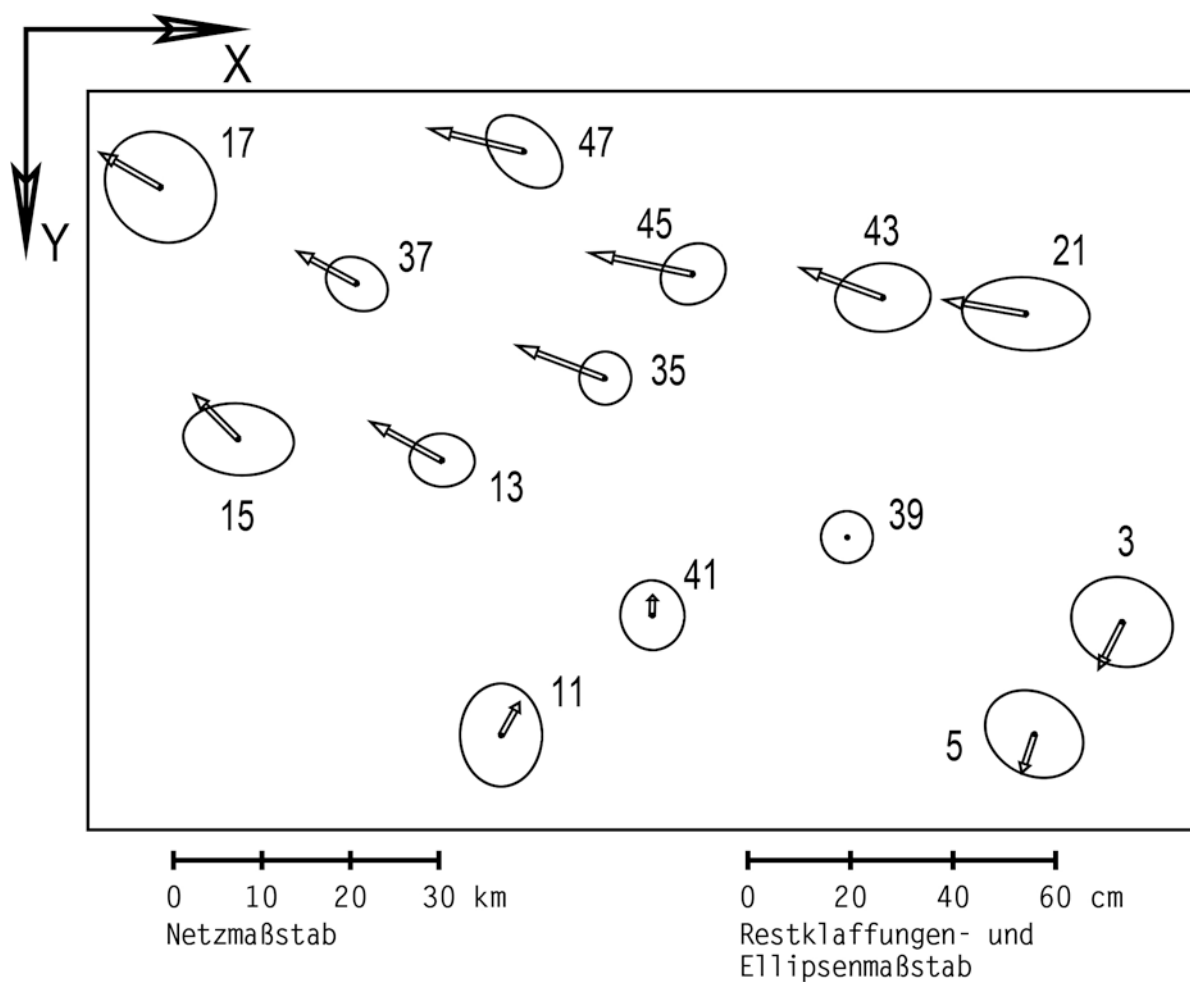


Abb. 3c Auffelderung auf den östlichen Block, Epochen 1 - 2B

Die dargestellten Restklaffungen sind das Ergebnis der Zweiparametertransformationen (Version c in Tabelle 1). Im westlichen Block bleiben alle Klaffungsvektoren innerhalb der Konfidenzellipsen. Im östlichen Block überschreitet Punkt 3 diese Schwelle und Punkt 5 liegt unmittelbar an der Grenze. Beide Punkte zeigen dieselbe Tendenz, was Anlaß für weitere Analysen sein könnte. Es ist jedoch zu beachten, daß das gewählte Minimumsprinzip bei einfachen Modellen und wenig Übereinstimmungen dazu neigt, einige Residuen zu null zu machen und damit die zugehörigen Beobachtungen (siehe Punkt 39) überzubewerten, während anderen Punkten zu große Restklaffungen zugewiesen werden.

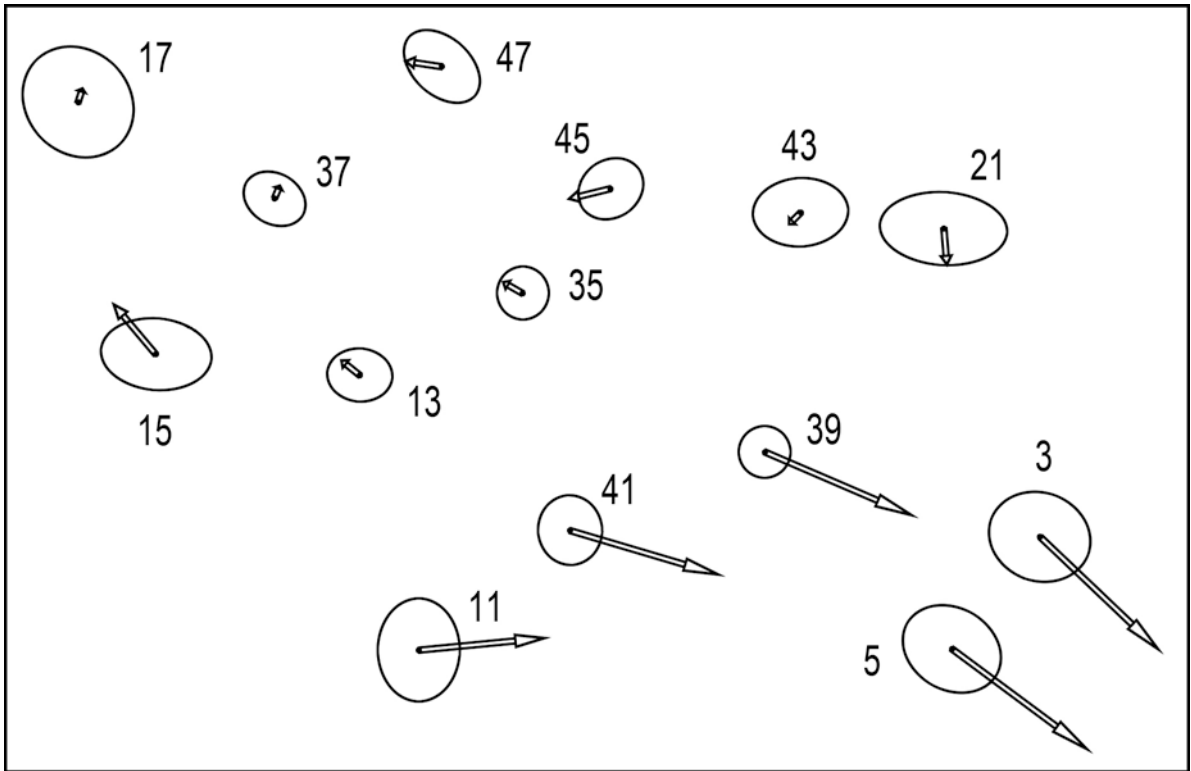


Abb. 4a Gesamtauffelderung, Epochen 1 - 3A

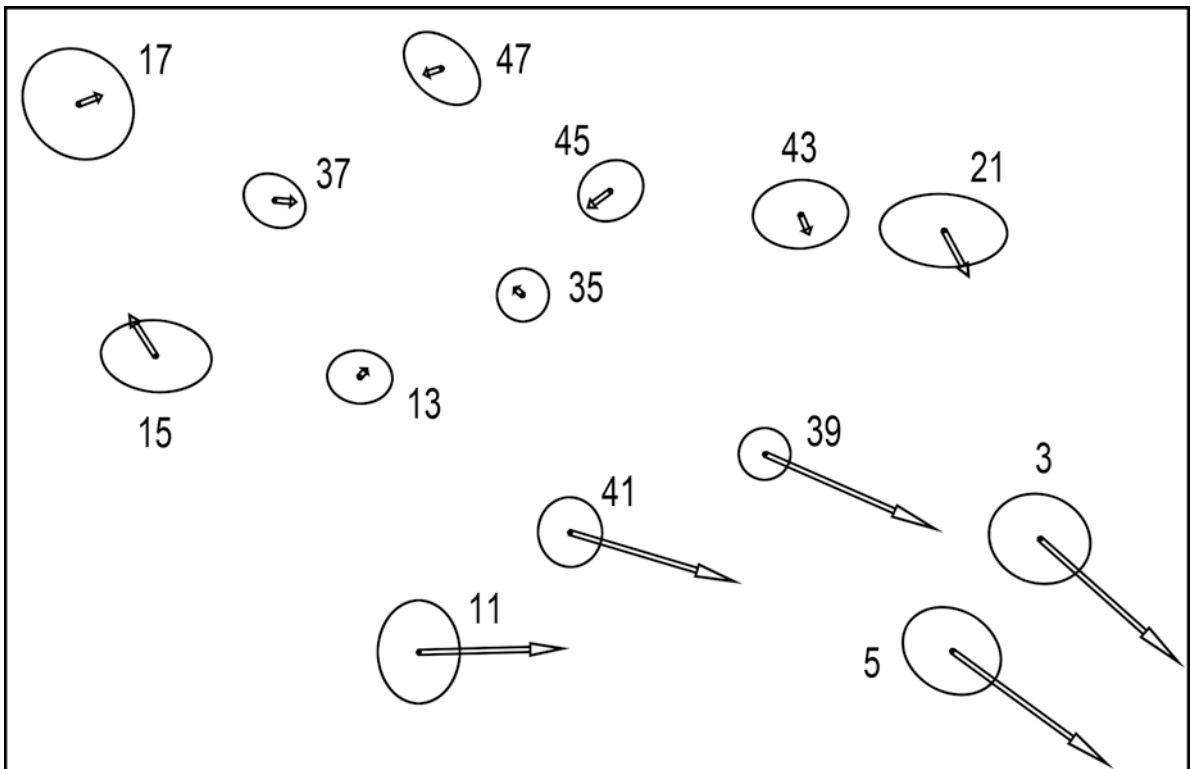


Abb. 4b Auffelderung auf den westlichen Block, Epochen 1 - 3A

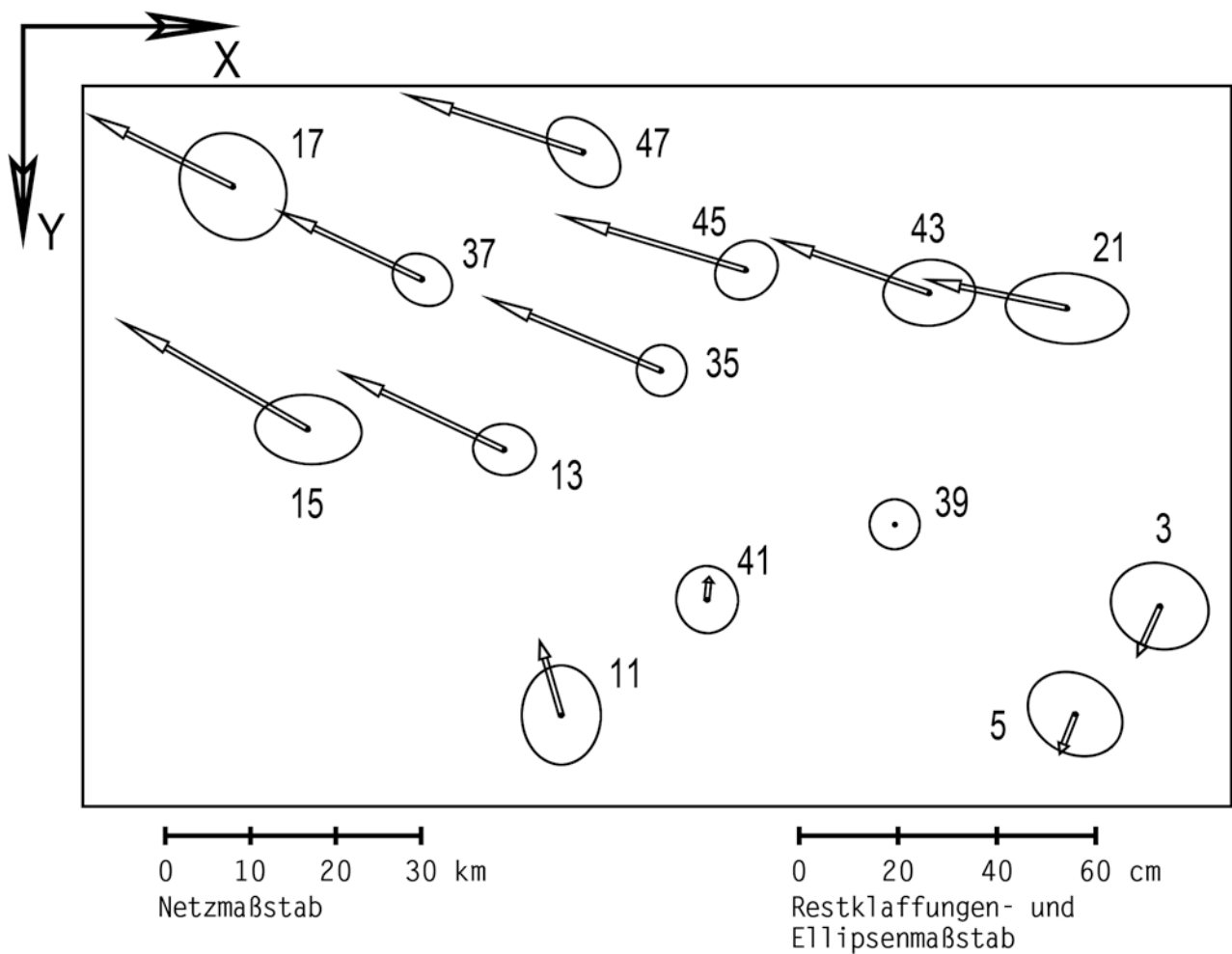


Abb. 4c Auffelderung auf den östlichen Block, Epochen 1 - 3A

Die dargestellten Restklaffungen sind das Ergebnis der Zweiparametertransformationen (Version c in Tabelle 1). Im westlichen Block werden die Punkte 15 und 21 als signifikant verändert identifiziert. Im Ostteil überschreiten die Deformationen bei Punkt 11 und 3 die Schwelle, während Punkt 5 unmittelbar an der Grenze liegt. Die Restklaffungsbilder beider Teilauffelderungen machen klar, daß bei einer Dreiparametertransformation die Rotation die Deformationen auffängt, und es daher nicht möglich ist, die Einzelpunktdeformationen aufzudecken. Außerdem ist auch hier die Anmerkung zu Abbildung 3c bezüglich der Schätzeigenschaften zu beachten.

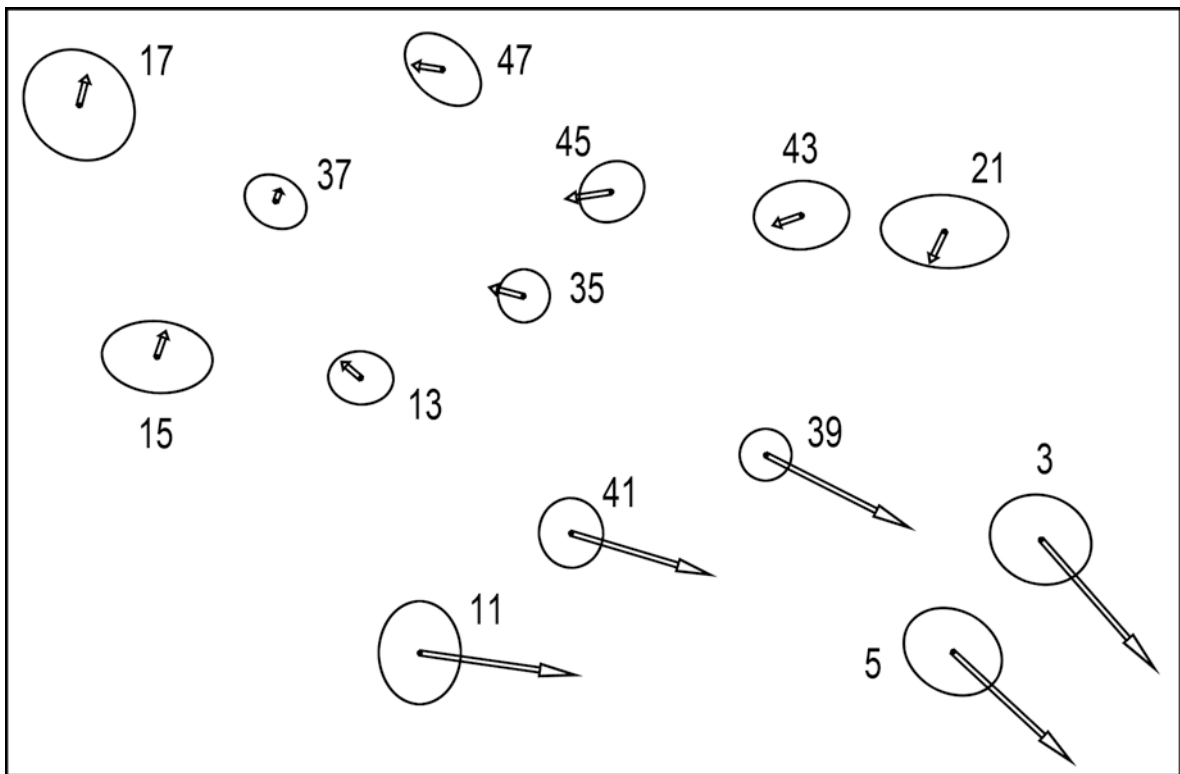


Abb. 5a Gesamtauffelderung, Epochen 1 - 3B

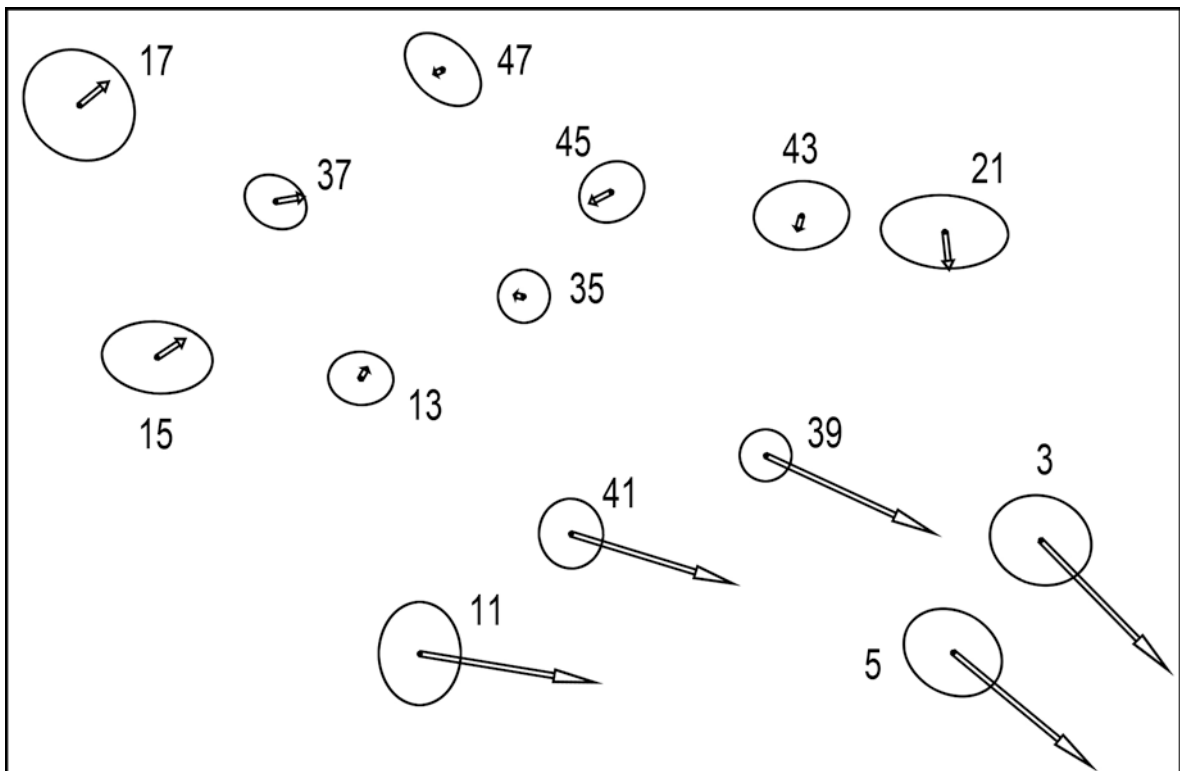


Abb. 5b Auffelderung auf den westlichen Block, Epochen 1 - 3B

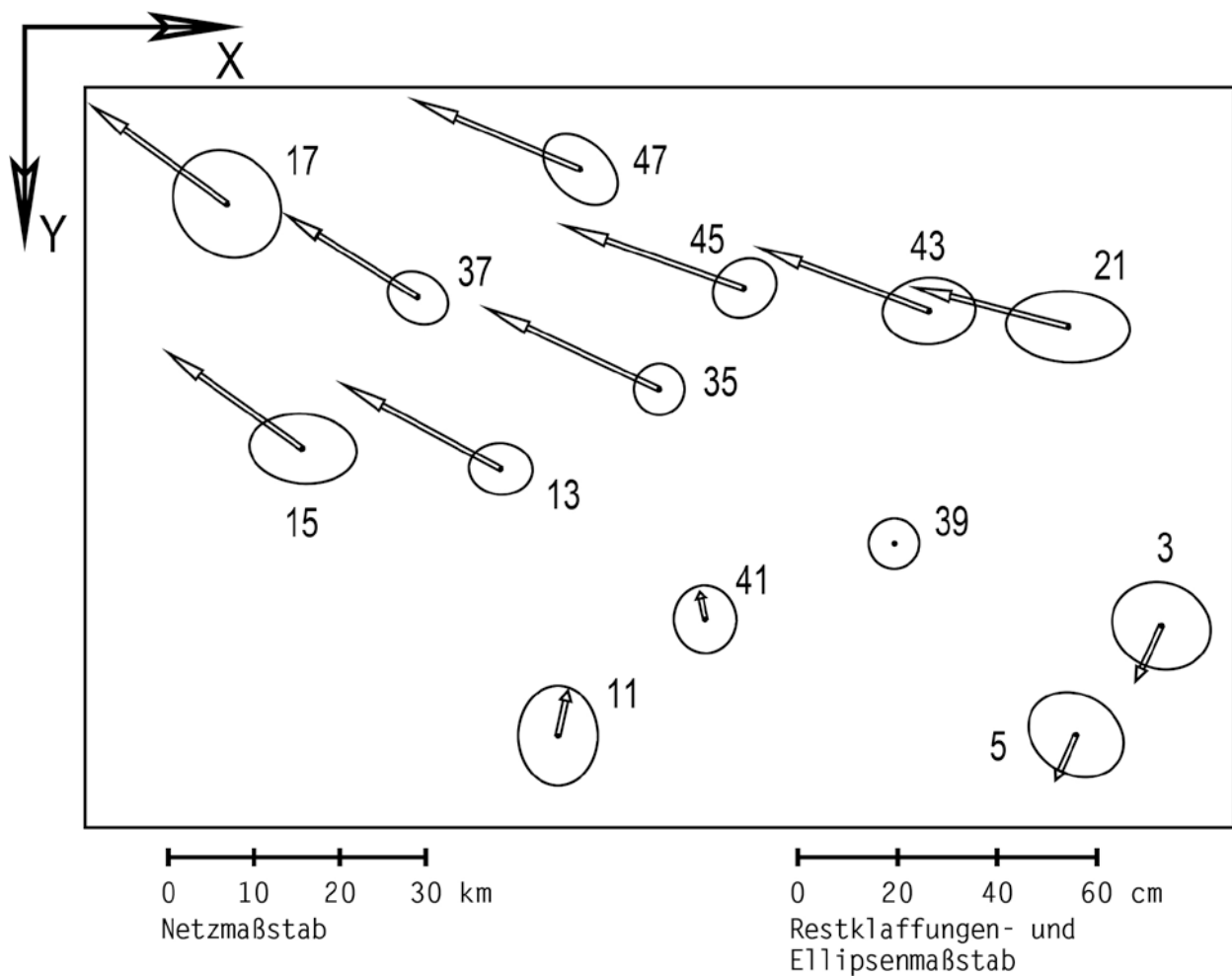


Abb. 5c Auffelderung auf den östlichen Block, Epochen 1 - 3B

Die dargestellten Restklaffungen sind das Ergebnis der Zweiparametertransformationen (Version c in Tabelle 1). Im westlichen Block werden keine Einzelpunktbewegungen identifiziert, allerdings liegt der Punkt 21 so dicht an der Signifikanzschwelle, daß er als verdächtig eingestuft werden könnte. Im östlichen Block erweisen sich die Punkte 3 und 5 nach den gewählten Kriterien als signifikant verändert. Ursachen für diese unzutreffenden Ergebnisse sind die geringe Anzahl von Punkten innerhalb des Blocks und der große Klaffungsvektor im Punkt 11 mit entgegengesetzter Richtung sowie die bei Abbildung 3c erläuterte Eigenschaft des Schätzprinzips.

6. LITERATUR

- FUCHS, H.: *Contribution to the Adjustment by Minimizing the Sum of Absolute Residuals*. Manuscripta Geodaetica, Vol. 7 (1982) 151-207
- KRARUP, T., JUHL, J., KUBIK, K.: *Götterdämmerung over least squares adjustment*. ISP Congress Hamburg 1980, Comm. III, 369-378
- SEEBER, G.A.F.: *Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, New York 1977