

DEFORMATIONSANALYSEN DURCH UNTERSUCHUNG VON TEILNETZEN

Wilhelm CASPARY

In: *CASPARY, Wilhelm / WELSCH, Walter (Hrsg.) [1979]:*

Seminar über Deformationsanalysen

gehalten an der Hochschule der Bundeswehr München

**mit Beiträgen von E. Baumann, W. Caspary, H. Dupraz / W. Niemeier / H. Pelzer, E. Kuntz / G. Schmitt,
W. Welsch**

Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 4, S. 67-83

ISSN: 0173-1009

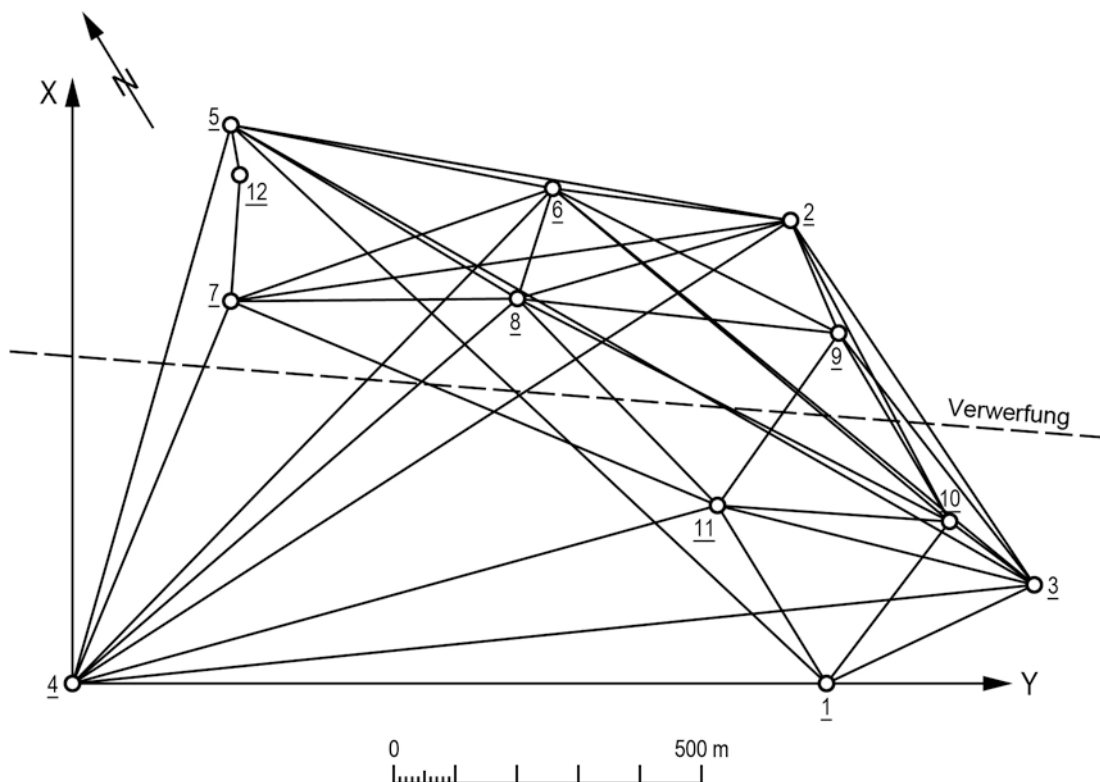
DEFORMATIONSANALYSEN DURCH UNTERSUCHUNG VON TEILNETZEN

W. Caspary, München

1. Einleitung

Die in den letzten Jahren ausgearbeiteten Verfahren zur Analyse von Deformationen mit Hilfe geodätischer Netze haben sich bei der Untersuchung von Festpunkten auf ihre Standfestigkeit und bei der Lokalisierung von Punkten, die ihre Lage verändert haben, bestens bewährt (z.B. HECK, KUNTZ, MEIER-HIRMER (1977), PELZER (1974)). Im Mittelpunkt steht dabei die wesentliche Frage, ob überhaupt Deformationen nachweisbar sind und wenn ja, welche Punkte davon betroffen sind.

Bei manchen Aufgabenstellungen ist das Problem insofern anders gelagert, als man zwei oder mehrere Punktgruppen von vornherein eindeutig gegeneinander abgrenzen kann und primär an der Klärung der Frage interessiert ist, ob sich diese Punktgruppen zwischen zwei oder mehreren Meßepochen relativ zueinander bewegt haben. Als Beispiel sei das Netz HUAYTAPALLANA in Peru, WELSCH (1978), genannt, das durch eine in der Örtlichkeit sichtbare Falte in zwei Teile gegliedert ist und angelegt wurde, um zu untersuchen, ob sich die zwei durch die Falte getrennten Schollen gegeneinander bewegen. Weitere Beispiele sind in POPE (1966) und LINKWITZ (1975) beschrieben.



Bei der Behandlung des Problems besteht die Schwierigkeit, daß ein Referenzsystem, in dem absolute Bewegungen meßbar wären, in der Regel nicht definiert werden kann. Die Untersuchungen müssen daher auf relative Bewegungen beschränkt bleiben, wobei die Frage offen bleibt, ob sich nur eine Scholle oder ob sich beide Schollen bewegt haben.

2. Einzelausgleichung der Epochen

Gegeben sei ein Netz mit p Punkten, das für den Untersuchungszweck in zwei Teilnetze mit p^1 bzw. p^2 Punkten zerlegt wird, $p = p^1 + p^2$ (hochgestellte Indizes geben die Nummer des Teilnetzes an). Die Nullmessung mit n_0 Beobachtungen wird frei ausgeglichen, wobei die Näherungskordinaten der Punkte, die auch in allen folgenden Meßepochen auftreten, gemeinsam mit der auf diese Punkte bezogenen Forderung $x^T x \rightarrow \text{Min}$ das Datum definieren. Die dazu notwendige verallgemeinerte Inverse der Beobachtungsgleichungsmatrix kann nach einem der in CASPARY (1978) angegebenen Verfahren bestimmt werden. Besonderes Augenmerk ist auf die Frage des Rangdefekts der zu invertierenden Matrix zu richten. Wurden wie in dem zitierten Beispiel HUAYTAPALLANA Richtungen, Schrägstrecken und Zenitdistanzen gemessen, so ist bei einer Ausgleichung als dreidimensionales Netz der Rangdefekt $d=4$, falls der Ansatz eines Maßstabsfaktors nicht vorgesehen ist. Als Ergebnis der Ausgleichung erhält man den $3p$ -Koordinatenvektor x_0 mit der zugehörigen Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_0 .

Auf die gleiche Weise werden alle Wiederholungsmessungen ausgeglichen. Die folgenden Überlegungen werden der Einfachheit halber auf die n_1 Beobachtungen der ersten Wiederholungsmessung beschränkt. Die getrennten Ausgleichungen der einzelnen Meßepochen, oft ergänzt durch zusätzliche Teil- und Vorausgleichungen, sind stets notwendig, um zutreffende Gewichtsverhältnisse für die einzelnen Beobachtungsarten zu erhalten und um das Datenmaterial von groben Fehlern zu bereinigen.

3. Gesamtausgleichung mit festem Teilnetz

Mit den bereinigten Daten und den ermittelten Gewichtsverhältnissen wird nun in einem erweiterten Modell eine gemeinsame Ausgleichung der zwei Epochen durchgeführt. Die Koordinaten der ersten Punktgruppe werden dabei für beide Meßepochen als neue Unbekannte, x_0^1 bzw. x_0^2 , in das Modell eingeführt, während die Punkte der zweiten Gruppe (Referenzgruppe), soweit sie in beiden Epochen auftreten, als identische Punkte für die Epochen gelten (x_r^2). Das Ergebnis ist der $3(2p^1 + p^2)$ -Unbekanntenvektor mit seiner Varianz-Kovarianz-Matrix.

$$x = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_1^1 \\ x_r^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Var}(x) = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{00}^{11} & \Sigma_{01}^{11} & \Sigma_{0r}^{12} \\ \Sigma_{10}^{11} & \Sigma_{11}^{11} & \Sigma_{1r}^{12} \\ \Sigma_{0r}^{12} & \Sigma_{1r}^{12} & \Sigma_{rr}^{22} \end{pmatrix}$$

$f = n_0 + n_1 - 3(2p^1 + p^2) + d$. Nach CASPARY (1979) kann diese gemeinsame Ausgleichung als Mittelbildung für die identischen Punkte aufgefaßt werden. Die in diesem Schritt gewonnene Schätzung s_{01}^2 kann in zwei unabhängige Anteile zerlegt werden, von denen der eine identisch mit der Varianzschätzung $s_{01}^2 = \frac{v_0^T P_0 v_0 + v_1^T P_1 v_1}{f_0 + f_1}$ aus den unabhängigen Vorausgleichungen und der zweite Anteil

s_{02}^2 aus der Modellerweiterung stammt. Mit der F-verteilter Testgröße s_{02}^2/s_{01}^2 kann die Hypothese überprüft werden, die der Modellerweiterung zugrunde liegt, daß nämlich der als Referenz benutzte Netzteil für die untersuchten Epochen kongruent ist.

Die weiterhin interessierenden Größen sind nun die Punktverschiebungen $d = x_1^1 - x_0^1$ zwischen den Epochen im ersten Netzteil. Dazu wird der Vektor x mit der Matrix $D = (- E E 0)$ multipliziert.

$$d = Dx, \text{Var}(d) = \Sigma_d = D\Sigma D^T, P_d = \sigma_0^2 \Sigma_d^{-1}$$

E = Einheitsmatrix passender Ordnung

Zum Test der Hypothese $E(d) = 0$ wird die Teststatistik

$$\frac{d^T P_d d}{3p^1} / s_{01}^2 = F$$

benutzt, die nach PELZER (1976) eine zentrale F-Verteilung besitzt, falls keine Punktverschiebungen aufgetreten sind.

4. Gesamtausgleichung mit aufgefelterter Referenzpunktgruppe

Bei dieser alternativen Gesamtausgleichung wird von der Überlegung ausgegangen, daß wegen tektonischer Aktivitäten auch innerhalb der Netzteile kleine relative Punktverschiebungen wahrscheinlich sind. Die im 3. Abschnitt benutzte Modellvorstellung der Kongruenz des Referenznetztes für die untersuchten Epochen beschreibt daher die Realitäten nur näherungsweise und kann noch verfeinert werden. Für die Ausgleichung werden die Koordinaten aller Punkte für jede Epoche getrennt als Modellparameter eingeführt. Die Verknüpfung der Epochen wird dadurch erreicht, daß die Teilnorm des Unbekanntenvektors $\|(x_0^2 \ x_1^2)\|_2$ minimiert wird, die sich auf die in beiden Epochen auftretenden Punkte der Referenzgruppe bezieht. Beide Epochen werden also im Sinne einer Helmerttransformation auf dieselben Näherungskordinaten der Referenzgruppe aufgefördert, während auf die zweite Punktgruppe keinerlei Zwang ausgeübt wird. Sofern zwischen den Epochen keine Korrelationen vorhanden sind, zerfällt die Ausgleichung dabei in zwei Teile, die auch unabhängig bearbeitet werden können. Falls man sich für dieses Modell entscheidet, kann man schon bei den im zweiten Abschnitt beschriebenen Einzelausgleichungen, über die Netzlagerung, wie sie hier beschrieben ist, verfügen, so daß dieser Schritt eingespart werden kann. Das Ergebnis ist ein $6p$ -Unbekanntenvektor mit der zugeordneten Varianz-Kovarianz-Matrix.

$$x = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \text{Var}(x) = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{00}^{11} & \Sigma_{00}^{12} & \Sigma_{01}^{11} & \Sigma_{01}^{12} \\ \Sigma_{00}^{21} & \Sigma_{00}^{22} & \Sigma_{01}^{21} & \Sigma_{01}^{22} \\ \Sigma_{10}^{11} & \Sigma_{10}^{12} & \Sigma_{11}^{11} & \Sigma_{11}^{12} \\ \Sigma_{10}^{21} & \Sigma_{10}^{22} & \Sigma_{11}^{21} & \Sigma_{11}^{22} \end{pmatrix}$$

Im Anschluß an diese Ausgleichung können zwei Hypothesen geprüft werden.

$$H_0: E(x_1^2 - x_0^2) = 0$$

Es liegen keine Punktveränderungen innerhalb des Referenznetzteiles vor, oder sie sind so gering, daß sie durch die Messungen nicht aufgedeckt werden können.

$$H'_0: E(x_1^1 - x_0^1) = 0$$

Es liegen keine relativen Punktveränderungen zwischen der Referenzpunktgruppe und den übrigen Punkten vor, oder sie sind so gering, daß sie durch die Beobachtungen nicht aufgedeckt werden können.

Für beide Tests wird aus den Koordinatendifferenzen, entsprechend den Formeln des dritten Abschnitts, eine von s_{01}^2 unabhängige Varianzschätzung abgeleitet, so daß mit dem Varianzquotiententest die Richtigkeit der Nullhypothesen geprüft werden kann. Da die Tests nicht unabhängig sind, müssen die Ergebnisse sorgfältig interpretiert werden. In kritischen Fällen kann es zweckmäßig sein, H'_0 durch eine zusammengesetzte Hypothese zu ersetzen, die einen von H_0 unabhängigen Test ermöglicht. Dies kann mit Hilfe der bedingten Verteilungen des Differenzvektors $(x_1^1 - x_0^1)$ nach den im Anhang angegebenen Formeln geschehen.

5. Zusätzliche Parameter für Relativbewegungen

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Verfahren führen zu einer Aussage darüber, ob Relativbewegungen innerhalb der Netzteile oder zwischen den Netzteilen stattgefunden haben. Den Ausführungen von NIEMEIER (1976) folgend, könnten anschließend die Koordinatendifferenzen einzelner Punkte untersucht werden, um eine Lokalisierung von Deformationen zu ermöglichen. Hier soll jedoch die Modellvorstellung beibehalten werden, daß Lageänderungen innerhalb der Punktgruppen vernachlässigbar sind, verglichen mit den Relativbewegungen der Netzteile zueinander. Diese Relativbewegungen sollen durch geeignete Parameter dargestellt werden, die in der Ausgleichung mitzuschätzen sind. Es bieten sich dazu Modellparameter an, die Translationen und Rotationen erfassen, die also eine Ähnlichkeitstransformation zwischen den betrachteten Netzteilen definieren.

In den im dritten und vierten Abschnitt beschriebenen Ausgleichungsmodellen können die gesuchten Parameter durch eine Modellerweiterung mitgeschätzt werden. Der Unbekanntenvektor x_1^1 ist für diese Zwecke zu ersetzen durch $x_0^1 + B y$. Hierbei bedeuten

$$y_T = (t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z)$$

t_x, t_y, t_z = Translation in Richtung x, y, z

r_x, r_y, r_z = Rotation um die Achse x, y, z

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1^1 & -y_1^1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_1^1 & 0 & x_1^1 \\ 0 & 0 & 1 & y_1^1 & -x_1^1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z_2^1 & -y_2^1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_2^1 & 0 & x_2^1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2^1 & -x_2^1 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & y_{p_1}^1 & -x_{p_1}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

x_i^1 = Näherungskordinate
des x-Wertes des i ten
Punktes im 1. Netzteil

(Da sich alle folgenden Untersuchungen auf Netzteil 1 beziehen, kann der hochgestellte Index vernachlässigt werden, ohne daß Unklarheiten zu befürchten sind). Andererseits besteht die Möglichkeit, die Transformationsparameter durch eine Folgeausgleichung zu bestimmen. Dazu werden die Koordinatendifferenzen $d = x_1 - x_0$ gebildet, zu denen die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_d gehört, die nach den Formeln des dritten Abschnitts berechnet wird. Es ist dann folgendes Modell zu verwenden

$$d + v_d = By, \quad E(d) = By,$$

$$E(v_d) = 0, \quad \text{Var}(d) = \Sigma_d$$

Die Matrix B hat vollen Spaltenrang, dieselbe Aussage trifft für Σ_d zu, da das Netzdatum durch den Referenznetzteil festgelegt ist und Konfigurationsdefekte ausgeschlossen sein sollen. Unter der Forderung $v_d^T \Sigma_d^{-1} v_d \rightarrow \text{Min}$ erhält man eine eindeutige Schätzung für die Transformationsparameter

$$y = (B^T P B)^{-1} B^T P d, \quad P = \sigma_0^2 \Sigma_d^{-1}$$

$$\text{Var}(y) = \sigma_0^2 (B^T P B)^{-1} = \sigma_0^2 Q_y$$

Zur Überprüfung des mathematischen Modells wird wie üblich die Varianzschätzung verwendet, die aus der quadratischen Form q abzuleiten ist.

$$\begin{aligned} q &= v_d^T P v_d = (By - d)^T P (By - d) \\ &= d^T (P - P B (B^T P B)^{-1} B^T P) d = d^T \bar{P} d \end{aligned}$$

Als Erwartungswert von q erhält man unter Berücksichtigung der Verteilung quadratischer Formen

$$\begin{aligned} E(q) &= \sigma_0^2 \text{sp}(\bar{P} Q) + E(d)^T \bar{P} E(d) \\ &= \sigma_0^2 \text{sp}(E - P B (B^T P B)^{-1} B^T P) + 0, \\ &= \sigma_0^2 r(E - P B (B^T P B)^{-1} B^T P) \\ E(q) &= \sigma_0^2 (3p - 6), \end{aligned}$$

und damit die erwartungstreue Varianzschätzung für σ_0^2

$$s_{03}^2 = q/(3p - 6) ,$$

die im Rahmen der Zufälligkeiten mit der Schätzung s_{01}^2 übereinstimmen muß, wenn das gewählte Modell die tatsächlichen Deformationen hinreichend gut wiedergibt.

6. Untersuchung des Transformationsvektors

Weiterführende Untersuchungen des Transformationsvektors

$$y^T = (t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z)$$

$$\Sigma_y = \sigma_0^2 (B^T P B)^{-1} = \sigma_0^2 Q_y$$

sollen Aufklärung über die durch das Modell erfaßten Deformationen geben.

Unter der Hypothese, daß keine Relativbewegungen zwischen den Punktgruppen vorliegen, die durch eine Ähnlichkeitstransformation darstellbar sind, gilt für den Erwartungswert des Vektors der Transformationsparameter $E(y) = 0$. Daraus folgt für den Erwartungswert der quadratischen Form

$$q_y = y^T Q_y^{-1} y$$

$$E(q_y) = \text{sp}(\Sigma_y Q_y^{-1}) = \sigma_0^2 \text{sp}(Q_y Q_y^{-1})$$

$$E(q_y) = 6\sigma_0^2$$

und es ergibt sich die erwartungstreue Varianzschätzung $s_{04}^2 = q_y/6$. Unter der Annahme, daß y normalverteilt ist, folgt q_y/σ_0^2 der zentralen χ^2 -Verteilung mit 6 Freiheitsgraden.

Darüber hinaus ist q_y von s_{01}^2 aus Abschnitt 3 statistisch unabhängig, so daß mit

$$v_0 = \frac{q_y/6}{s_{01}^2}$$

eine Teststatistik angegeben werden kann, die unter der Nullhypothese eine zentrale Fisher-Verteilung besitzt.

Wird die Hypothese verworfen, so kann die Untersuchung weiterer Fragestellungen von Interesse sein: z.B. ob die nachgewiesene Relativbewegung als reine Translation oder als reine Rotation darstellbar ist. Dazu ist die Zerlegung des Transformationsvektors in zwei statistisch unabhängige Subvektoren notwendig. Die theoretischen Grundlagen für eine solche Zerlegung, die mit Hilfe der Theorie der bedingten Verteilungen gelingt, sind im Anhang zusammengestellt. Hier sei die Hypothese gewählt, daß sich die gesamte Deformation als Translation darstellen läßt.

$$y^T = (t^T, r^T), \quad t^T = (t_x, t_y, t_z), \quad r^T = (r_x, r_y, r_z)$$

$$H_0 : E(r) = 0, \quad \Sigma_y = \sigma_0^2 Q_y, \quad Q_y = \begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{rt} & Q_{rr} \end{pmatrix}$$

Die Verteilung von t unter der Hypothese $E(r) = 0$ ist die in Satz 3 (Anhang) definierte Normalverteilung $t|r = \bar{t} \sim N(E(t) + Q_{tr}Q_{rr}^{-1}r, \sigma_0^2 P_{tt})$ mit den dort eingeführten Symbolen. Gemäß Satz 5 kann die quadratische Form q_y in zwei unabhängige Komponenten zerlegt werden

$$q_y = y^T Q_y^{-1} y = \bar{t}^T P_{tt} \bar{t} + r^T Q_{rr}^{-1} r$$

$$= q_{\bar{t}} + q_r$$

Unter der Hypothese $E(r) = 0$ hat die quadratische Form q_r eine zentrale χ^2 -Verteilung und die Größe $q_r/3$ ist eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz σ_0^2 der Beobachtungen.

Die Teststatistik $v_0 = \frac{q_r/3}{s_{01}^2}$

folgt unter der Nullhypothese einer zentralen Fisherverteilung und kann für den Test der Hypothese $E(r) = 0$ verwandt werden.

Weitere Fragestellungen können dahin zielen, die Haupttranslationsrichtung und die Richtung der Hauptrotation zu bestimmen. Diese für die Interpretation von Deformationen wichtigen Fragen sind durch einfache geometrische Überlegungen lösbar und sollen hier nicht ausgeführt werden. Für die Interpretation ist oft auch eine Zerlegung des Transformationsvektors sinnvoll, die es erlaubt, die Lage und die Höhe getrennt zu untersuchen, wobei noch zusätzlich eine Drehung der x - y -Ebene um die z -Achse erwünscht ist, so daß eine der Koordinatenachsen parallel zur Richtung der Verwerfungslinie orientiert wird. Nach einer solchen einfachen Transformation der Ergebnisse können weitere Tests, die ganz im Rahmen der bisherigen Ausführungen ablaufen, wichtige Interpretationshilfen sein.

7. Beispiel

Da das beschriebene Verfahren für die Analyse von Relativbewegungen zwischen in sich stabilen Netzteilen konzipiert ist, kann es nur auf das Testbeispiel HUAYTAPALLANA angewandt werden. Die Ergebnisse werden in folgendem kurz zusammengestellt und kommentiert.

7.1 Einzelausgleichung der Epochen

Durch Vorausgleichungen mit dem Programm Helmert/77* wurden die Standardabweichung der drei Beobachtungsgruppen geschätzt, die der Gewichtssetzung zugrunde gelegt wurden.

Epochen	Standardabweichungen			Gewichte		
	Distanzen s_d [mm]	Richtungen s_r [0,1 mgon]	Zenitdist. s_z [0,1 mgon]	Distanzen p_d	Richtungen p_r	Zenitdist. p_z
1975	6,7	4,8	31,4	$22,3 \cdot 10^{-3}$	$43,4 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
1976	4,1	4,1	21,0	$59,5 \cdot 10^{-3}$	$58,6 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
1977	2,9	8,9	20,4	$1189 \cdot 10^{-3}$	$12,6 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 1: Wahl der Gewichte für die Netzausgleichung

Bei der Ausgleichung aller Beobachtungen mit den Gewichten nach Tabelle 1 wurden außer den drei Koordinaten je Punkt die Orientierungsunbekannten, Additions- und Maßstabskonstante und eine Refraktionsunbekannte mitbestimmt. Aus diesen zwangsfrei durchgeführten Ausgleichungen werden die in Tabelle 2 zusammengestellten Ergebnisse für die weiteren Untersuchungen benutzt.

Epoche	$v^T p v$	F	s_0^2	s_0	$\Sigma v^T p v$	Σf	s_{01}^2
1975	158,8	162	0,98	0,99	333,8	337	0,99
1976	175	175	1,00	1,00			
1977	199	199	1,00	1,00	374	374	1,00

Tabelle 2: Varianzschätzungen aus Einzelausgleichungen

7.2 Gemeinsame Ausgleichung der Epochen 75/76 und 76/77

Bei den gemeinsamen Ausgleichungen wurde vorausgesetzt, daß der Netzteil südlich der Verwerfungslinie (Punkte 1, 3, 4, 10, 11) in beiden Epochen kongruent ist. Dieser Netzteil wurde dadurch zur

* Das Programmsystem Helmert/77 wurde durch Herrn Dipl.-Ing. W. Keller im Ingenieurbüro Walter Schneider A.G., Chur, entwickelt.

Deckung gebracht, daß die entsprechenden Koordinaten nur einmal als Unbekannte angesetzt wurden. Im nördlichen Netzteil (Punkte 2, 5, 6, 7, 8, 9) wurden dagegen für jede Epoche neue Koordinaten eingeführt, so daß in diesem Bereich Verschiebungen der Netzteile relativ zueinander als Koordinatendifferenzen in Erscheinung treten. Während die Größe der Koordinatendifferenzen bei vorgegebenen Näherungskordinaten für alle Punkte und zwangsfreier Ausgleichung unabhängig von der Verfügung über die Netzlagerung ist, ist der Einfluß auf die mittleren Fehler der Koordinaten beträchtlich. Da die Koordinatendifferenzen der Gegenstand der weiteren Untersuchungen sind, ist eine optimale Genauigkeitsschätzung wichtig, die hier dadurch erreicht wird, daß zur Lagerung des Netzes die Norm $\|x_i\|_2$, $i \in \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$, minimiert wurde; womit gleichzeitig die Spur der Gewichtsreziprokenmatrix der Unbekannten dieses Netzteils ein Minimum annimmt.

Die Ergebnisse dieser Ausgleichungen sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Punkt	Koordinatendifferenzen in [mm]					
	1976 - 1975			1977 - 1976		
	Δx	Δy	Δz	Δx	Δy	Δz
2	-1,1	-3,4	-33,4	+0,5	+4,5	+ 2,0
5	-1,8	-4,6	-26,1	+1,3	+3,5	+13,8
6	+0,7	-7,7	-19,7	0,0	+2,8	+ 4,9
7	-1,7	-4,2	-13,4	-2,6	+0,2	+11,0
8	-0,9	-2,0	-27,1	-3,7	+0,2	+ 7,0
9	+0,2	+0,4	-11,3	+0,6	+0,2	+ 5,5
	$v^T P_V = 341,0 \quad s_0^2 = 0,89$ $f = 348$			$v^T P_V = 392,7 \quad s_0^2 = 1,02$ $f = 385$		
	$d^T P_d d = 47,86$ $3p = 18$ $\theta^2 = 2,66$			$d^T P_d d = 27,88$ $3p = 18$ $\theta^2 = 1,55$		

Tabelle 3: Ergebnisse der gemeinsamen Ausgleichungen

Eine Interpretation nur an Hand dieser Zahlen ist schwierig, da die Koordinatendifferenzen im Bereich der Standardabweichungen liegen, die für Δx und Δy zwischen $\pm 1,5$ und $\pm 3,0$ mm schwanken, während die Höhendifferenzen mittlere Fehler zwischen ± 8 und ± 18 mm aufweisen.

Hypothese H_0 : Das funktionale Modell (Netzteil südlich der Verwerfung ist kongruent für alle Epochen) ist zutreffend.

Testgröße: $1975/76 \quad F = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{0,66}{0,99} = 0,67 \quad , \quad F(95\%,11,337) = 1,82$

$1976/77 \quad F = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,70}{1,00} = 1,70 \quad , \quad F(95\%,11,374) = 1,82$

Berechnung von s_{02}^2 :	1975/76	1976/77
Tabelle 2 $\sqrt{\sum PV} ; f$	341,0 ; 348	392,7 ; 385
- Tabelle 3 $\sum \sqrt{PV} ; \sum f$	333,8 ; 337	374,0 ; 374
	7,2 ; 11	18,7 ; 11
s_{02}^2	0,66	1,70

Die Nullhypothese kann mit dem vorliegenden Datenmaterial nicht verworfen werden.

Hypothese H_0 : Die im nördlichen Netzteil auftretenden Klaffungen sind zufälliger Natur. Sie sind $N(0, \sigma_0^2, Q_d)$ -verteilt.

Testgröße: $1975/76 \quad F = \frac{\theta^2}{s_{01}^2} = \frac{2,66}{0,99} = 2,69 \quad , \quad F(95\%,18,337) = 1,64$

$1976/77 \quad F = \frac{\theta^2}{s_{01}^2} = \frac{1,55}{1,00} = 1,55 \quad , \quad F(95\%,18,374) = 1,63$

s_{01}^2 aus Tabelle 2 , θ^2 aus Tabelle 3

Die Nullhypothese muß für den Zeitraum 75/76 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von kleiner 0,1 % abgelehnt werden. Die zwischen den Meßepochen aufgetretenen Koordinatenänderungen sind nicht durch die zufälligen Beobachtungsfehler erklärbar, sie sind mit hoher Wahrscheinlichkeit auf Lageänderungen von Punkten zurückzuführen.

Für den Zeitraum 76/77 nimmt die Testgröße einen Wert an, der bei zutreffender Nullhypothese nur in 7 % aller Fälle erreicht oder überschritten wird. Eine weitere Analyse des Ergebnisses wird daher als sinnvoll betrachtet.

Auf eine gemeinsame Ausgleichung der Epochen 1975/77 wurde verzichtet, da es primär auf die Erprobung des entwickelten Verfahrens ankam. Darüber hinaus zeigt ein Blick auf Tabelle 3, daß signifikante Punktverschiebungen nicht zu erwarten sind, da die Koordinatendifferenzen der bearbeiteten Zeiträume im wesentlichen entgegengesetzte Vorzeichen haben und sich daher in der Summe teilweise kompensieren.

7.3 Darstellung der Punktverschiebungen durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation

Nach den Formeln des 5. Abschnittes wurden in dem linearen Modell $d + v_d = B y$, Σ_d die sechs Parameter $y^T = (t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z)$ einer überbestimmten Ähnlichkeitstransformation nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Um minimale Varianzen für die Transformationsparameter zu erhalten, wurde der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des untersuchten Netzteils verlegt. Die Tabelle 4 faßt die Ergebnisse dieser Ausgleichungen zusammen.

	Vollständige Gewichtsmatrix		Diagonale Gewichtsmatrix	
	1975/76	1976/77	1975/76	1976/77
t_x [mm]	- 0,4 ± 2,4	- 0,5 ± 1,5	- 0,8 ± 0,9	- 0,7 ± 0,7
t_y [mm]	- 2,0 ± 2,4	- 1,8 ± 1,5	- 2,9 ± 0,8	- 1,8 ± 0,6
t_z [mm]	- 25,5 ± 13,1	- 8,3 ± 7,2	- 23,6 ± 4,7	- 8,0 ± 3,2
r_x [mgon]	+ 0,96 ± 1,30	- 1,01 ± 0,77	+ 0,38 ± 0,76	- 0,98 ± 0,54
r_y [mgon]	+ 2,84 ± 2,09	+ 1,53 ± 1,40	+ 1,93 ± 1,78	+ 1,88 ± 1,32
r_z [mgon]	- 0,29 ± 0,28	- 0,07 ± 0,20	- 0,27 ± 0,16	- 0,11 ± 0,13
$d^T P_d d$	47,87	27,88	48,32	24,40
$v_d^T P_d v_d$	31,69	20,25	10,81	10,05
f	12	12	12	12
s_{03}^2	2,64	1,69	0,90	0,84
$y^T Q_y^{-1} y$	16,18	7,63	37,50	14,35
f	6	6	6	6
s_{04}^2	2,70	1,27	6,25	2,39

Tabelle 4: Ergebnisse der Transformationsausgleichungen

Obwohl die Klaffungen in Tabelle 3 den Eindruck erwecken, daß der nördliche Netzteil eine gemeinsame Bewegung in y -Richtung und eine gemeinsame Höhenänderung erfahren hat, zeigt Tabelle 4 keine signifikanten Translationen oder Rotationen. Man erkennt hier, wie leicht Fehlinterpretationen möglich sind, wenn nur die Klaffungen selbst ohne Berücksichtigung ihrer Varianzen und Kovarianzen beurteilt werden. Probeweise wurden weitere Ausgleichungen durchgeführt, bei denen eine diagonale Gewichtsmatrix mit $p_i = q_{ii}^{-1}$ benutzt wurde. Die ebenfalls in Tabelle 4 aufgeführten Ergebnisse zeigen deutlich, wie stark bei Vernachlässigung der Korrelationen die Genauigkeit der Unbekannten überschätzt wird.

Hypothese H_0 : Das funktionale Modell (die Klaffungen lassen sich durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation darstellen) ist zutreffend.

$$\text{Testgröße: } 1975/76 \quad F = \frac{s_{03}^2}{s_{01}^2} = \frac{2,64}{0,99} = 2,67 \quad , \quad F(95\%, 12, 337) = 1,78$$

$$1976/77 \quad F = \frac{s_{03}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,69}{1,00} = 1,69 \quad , \quad F(95\%, 12, 374) = 1,78$$

Für die Epochen 1975/76 ist die Hypothese eindeutig abzulehnen. Für den Zeitraum 76/77 muß die Hypothese nicht verworfen werden, die Testgröße liegt aber nahe an der Verwerfungsgrenze. Als Ergebnis dieses Tests kann gefolgert werden, daß die nach 7.2 signifikanten oder zumindest wahrscheinlichen Punktverschiebungen nur sehr unbefriedigend oder gar nicht durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation darstellbar sind. Zumindest für den Vergleich 1975/76 muß damit gerechnet werden, daß signifikante individuelle Punktverschiebungen vorliegen.

Hypothese H_0 : Die in 7.2 nachgewiesenen Deformationen sind keine Relativverschiebungen der Netzteile zueinander. Die linearen Transformationsparameter y sind $N(0, \sigma_0^2, 0_y)$ -verteilt.

$$\text{Testgröße: } 1975/76 \quad F = \frac{s_{04}^2}{s_{01}^2} = \frac{2,70}{0,99} = 2,72 \quad , \quad F(95\%, 6, 337) = 2,13$$

$$1976/77 \quad F = \frac{s_{04}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,27}{1,00} = 1,27 \quad , \quad F(95\%, 6, 374) = 2,13$$

Eine Interpretation der Testergebnisse soll hier unterbleiben, da die Varianzschätzung s_{04}^2 einem linearen Modell entstammt, das nach dem vorausgehenden Test die tatsächlichen Verhältnisse unbefriedigend wiedergibt. Aus demselben Grund wird auf eine Aufspaltung des Parametervektors und auf die Untersuchung einzelner Komponenten gemäß Abschnitt 5 verzichtet.

Zusammenfassend kann folgende Aussage über das Verhalten des HUAYTAPALLANA-Netzes auf der Grundlage der Messungen von 1975, 1976 und 1977 gemacht werden:

- 1) Im Netzteil südlich der Verwerfungslinie sind keine relativen Punktveränderungen nachweisbar. Dieser Netzteil kann in allen Epochen als kongruent betrachtet und daher durch einen einzigen Koordinatenvektor beschrieben werden.
- 2) Bei gemäß 1) festgehaltenem südlichen Netzteil treten zwischen den Epochen im nördlichen Netzteil Koordinatenveränderungen auf, die für 75/76 hoch signifikant und 76/77 für $\alpha = 7\%$ signifikant sind.
- 3) Die Untersuchung der Klaffungsvektoren zeigt, daß Relativbewegungen zwischen den Netzteilen wohl nur in geringem Umfang vorliegen und statistisch nicht überzeugend nachgewiesen werden können.
- 4) Die signifikanten Punktverschiebungen müssen mit individuellen Punktbewegungen erklärt werden, die etwa nach NIEMEIER (1976) lokalisiert werden können.

Zusammenfassung

Auf der Grundlage bekannter Ausgleichungsverfahren und Testprozeduren wird eine Methode dargestellt, die geeignet ist, statistisch gesicherte Aussagen über die Relativbewegung von Teilen geodätischer Netze zu machen, die zu verschiedenen Zeitpunkten beobachtet wurden.

Anhang

Satz 1: Sei d ein normalverteilter Zufallsvektor mit n Komponenten und positiv definierter Varianz-Kovarianz-Matrix

$$d \sim N(\delta, \Sigma) \quad , \quad E(d) = \delta, \quad d - \delta = \varepsilon \\ E(\varepsilon \varepsilon^T) = \text{Var}(d) = \Sigma .$$

Wird d zwei Subvektoren zerlegt,

$$d_1 = (E_1 \ 0)d \quad , \quad d_2 = (0 \ E_2)d \quad , \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad n = n_1 + n_2$$

so haben diese Subvektoren folgende Verteilungen (Randverteilungen)

$$d_1 \sim N(\delta_1, \Sigma_{11}) \quad , \quad d_2 \sim N(\delta_2, \Sigma_{22})$$

Die Matrix Σ_{12} enthält die Kovarianzen zwischen d_1 und d_2 .

Die Art der Verteilung folgt unmittelbar aus dem wichtigen statistischen Satz, daß jede lineare Funktion von normalverteilten Zufallsgrößen normalverteilt ist. Ferner liest man sogleich ab, daß

$$E(d_1) = (E_1 \ 0) \delta = \delta_1 \quad , \quad \text{Var}(d_1) = (E_1 \ 0) \Sigma (E_1 \ 0)^T = \Sigma_{11} \\ E(d_2) = (0 \ E_2) \delta = \delta_2 \quad , \quad \text{Var}(d_2) = (0 \ E_2) \Sigma (0 \ E_2)^T = \Sigma_{22} \\ \text{Kov}(d_1, d_2) = (E_1 \ 0) \Sigma (0 \ E_2)^T = \Sigma_{12}$$

Satz 2: Sei d der in Satz 1 definierte Zufallsvektor, dann hat die quadratische Form in $\varepsilon = d - \delta$

$$q = \varepsilon^T \Sigma^{-1} \varepsilon$$

eine zentrale χ^2 -Verteilung mit $E(q) = r(\Sigma) = n$

Da $\Sigma \Sigma^{-1} = E$ eine idempotente Matrix ist, $E(\varepsilon) = 0$ gilt und d als normalverteilt vorausgesetzt wurde, sind die z.B. in SEARLE (1971), p. 57 als notwendig und hinreichend für die Richtigkeit von Satz 2 nachgewiesenen Voraussetzungen erfüllt.

Wird die quadratische Form für den partitionierten Vektor umgeschrieben, so erhält man mit den neuen Matrizen $P = Q^{-1} = \sigma^2 \Sigma^{-1}$

$$q = \varepsilon_1^T P_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T P_{22} \varepsilon_2 + 2 \varepsilon_1^T P_{12} \varepsilon_2 \\ q = q_1 + q_2 + 2q_{12}$$

Über die Verteilung von q_1 und q_2 kann im allgemeinen keine Aussage gemacht werden.

Zur Erleichterung der folgenden Darstellungen wird die Inverse der partitionierten Matrix $Q = P^{-1}$ angegeben.

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = P = \begin{pmatrix} P_{11} & -P_{11}Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ -Q_{22}^{-1}Q_{21}P_{11} & Q_{22}^{-1} + Q_{22}^{-1}Q_{21}P_{11}Q_{12}Q_{22}^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit } P_{11} = (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21})^{-1}$$

$$Q^{-1} = P = \begin{pmatrix} Q_{11}^{-1} + Q_{11}^{-1}Q_{12}P_{22}Q_{21}Q_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1}Q_{12}P_{22} \\ -P_{22}Q_{21}Q_{11}^{-1} & P_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } P_{22} = (Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12})^{-1}$$

Satz 3: Sei $\bar{d}_1 = d_1|d_2$ der bedingte Subvektor für einen vorgegebenen Vektor $d_2 = \Delta_2$, \bar{d}_2 sei entsprechend definiert, dann haben die bedingten Zufallsvektoren \bar{d}_1 und \bar{d}_2 folgende Verteilungen

$$\bar{d}_1 = d_1|d_2 \sim N(\delta_1 + Q_{12}Q_{22}^{-1}(d_2 - \delta_2), \sigma^2 P_{11}^{-1}) = N(\bar{\delta}_1, \sigma^2 P_{11}^{-1})$$

$$\bar{d}_2 = d_2|d_1 \sim N(\delta_2 + Q_{21}Q_{11}^{-1}(d_1 - \delta_1), \sigma^2 P_{22}^{-1}) = N(\bar{\delta}_2, \sigma^2 P_{22}^{-1})$$

Der vollständige Beweis des Satzes 3 ist in SEARLE (1971) p. 47 ausgeführt.

Satz 4: Die Vektoren \bar{d}_1 und d_2 sowie d_1 und \bar{d}_2 sind stochastisch unabhängig

$$\text{Kov}(\bar{d}_1, d_2) = \text{Kov}(d_1, \bar{d}_2) = 0$$

Der vorgegebene Subvektor d_2 , der die Bedingung festlegt, unter der die Verteilung von d_1 betrachtet wird, sei mit Δ_2 bezeichnet und die beobachteten Werte weiterhin mit d , dann gilt für \bar{d}_1

$$\bar{d}_1 = d_1 + Q_{12}Q_{22}^{-1}(\Delta_2 - d_2) = (E_1 \ 0)d - Q_{12}Q_{22}^{-1}(0 \ E_2)d + Q_{12}Q_{22}^{-1} \Delta_2 \ .$$

Wird nun d_2 mit \bar{d}_1 zusammengefaßt, so folgt

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} Q_{12}Q_{22}^{-1} \Delta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Var}(\bar{d}) = \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} E_1 & -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ -Q_{22}^{-1}Q_{21} & E_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Sigma} = \sigma^2 \begin{pmatrix} Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Die Richtigkeit von Satz 4 ist damit nachgewiesen. Der Beweis für die Unabhängigkeit von d_1 und \bar{d}_2 erfolgt entsprechend.

Satz 5: Die in Satz 2 angegebene quadratische Form läßt sich in zwei unabhängige x^2 -verteilte Komponenten zerlegen.

$$q = \varepsilon^T \Sigma^{-1} \varepsilon = \bar{\varepsilon}_1^T \bar{\Sigma}_{11}^{-1} \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2^T \Sigma_{22}^{-1} \varepsilon_2$$

$$q = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 ; \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{d}_1 - \bar{\delta}_1 , \quad \varepsilon_2 = d_2 - \delta_2$$

Nach Satz 3 und 4 kann die quadratische Form in d umgeschrieben werden für \bar{d}

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{d} - \bar{\delta}) = \begin{pmatrix} E_1 & -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} (d - \delta)$$

$$\varepsilon = (d - \delta) = \begin{pmatrix} E_1 & Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} (\bar{d} - \bar{\delta})$$

$$q = \varepsilon^T P \varepsilon = \bar{\varepsilon}^T \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ Q_{22}^{-1}Q_{21} & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \bar{\varepsilon}$$

$$q = \bar{\varepsilon}^T \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22}^{-1} \end{pmatrix} \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1^T P_{11} \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2^T Q_{22}^{-1} \varepsilon_2$$

$$q = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$$

Der Begründung von Satz 2 folgend kann die Verteilung von \bar{q}_1 und \bar{q}_2 sofort abgelesen werden

$$\bar{q}_1 / \sigma^2 \sim x^2(n_1) \quad , \quad \bar{q}_2 / \sigma^2 \sim x^2(n_2)$$

Werden mit \bar{q}_1 , \bar{q}_2 anschließend Hypothesentests durchgeführt, so bedarf die Einführung der bedingten Verteilung einer sorgfältigen Interpretation.

Literatur

- Caspary, W. (1978) Zur Lösung singulärer Ausgleichungsmodelle durch Bedingungsgleichungen
AVN 86, (1978), pp 81-87
- Caspary, W. (1979) Zum Problem der stufenweisen Ausgleichungen
AVN 86, (1979), pp 218-226
- Heck, B., Kuntz, E.
Meier-Hirmer, B. (1977) Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen
AVN 85, (1978), pp 78-87
- Linkwitz, K.
Böttinger, W.U. (1975) Messungen hoher Präzision entlang der Bocono-Verwerfungslinie in Venezuela
FIG-Symposium, Krakau 1975, pp 383-387
- Niemeier, W. (1976) Grundprinzip und Rechenformeln der strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen
VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung Hoher Präzision, Darmstadt 1976, pp 465-482
- Pelzer, H. (1974) Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen
FIG-Kongress, Washington 1974, 608.3
- Pelzer, H. (1976) Über die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen
VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung Hoher Präzision, Darmstadt 1976, pp 483-498
- Pope, A. (1966) Surveys for Crustal Movement along the Hayward Fault
Bull. Seism. Soc. Am. 56, pp 317-323
- Searle, S.R. (1971) Linear Models
John Wiley & Sons, Inc., New York - London - Sydney - Toronto, 1971
- Welsch, W. (1978) Überwachung mikrotektonischer Bewegungen mit Hilfe geodätischer Netze, gezeigt an einem Beispiel in den peruanischen Anden
Internationale geodätische Woche Obergurgl, 1978

