PARAMETERSCHÄTZUNG IN LINEAREN MODELLEN MIT HILFE VON PROJEKTOREN

Wilhelm CASPARY

In: *CASPARY, Wilhelm / SCHÖDLBAUER, Albert / WELSCH, Walter (Hrsg.) [1984]:*

10 Jahre Hochschule der Bundeswehr München

Beiträge aus dem Institut für Geodäsie

Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 10, S. 25-47

ISSN: 0173-1009

PARAMETERSCHÄTZUNG IN LINEAREN MODELLEN MIT HILFE VON PROJEKTOREN

von Wilhelm CASPARY

SUMMARY

Under the criteria of unbiasedness and minimum variance the basic equations for estimation in linear models are developed. Starting from the standard Gauß-Markoff model the case of a singular coefficient matrix and of a singular dispersion structure is examined. The result is that for the adjusted observation vector, for certain linear functions of the parameters and for the variance factor general estimators exist, which are valid for all variations of the model. During the derivation of the equations the properties of projectors are used to simply and geometrically interpret the outcome.

ZUSAMMENFASSUNG

Unter den Kriterien Erwartungstreue und minimale Varianz werden die wichtigsten Schätzfunktionen in linearen Modellen entwickelt. Ausgehend von dem gewöhnlichen Gauß-Markoff-Modell werden Modelle mit singulärer Koeffizientenmatrix und mit singulärer Varianz-Kovarianz-Struktur betrachtet. Es zeigt sich dabei, daß für die ausgeglichenen Beobachtungen, für gewisse lineare Funktionen der Parameter und für die Varianz allgemeine Schätzer angegeben werden können, die für alle Modellvarianten gültig sind. Bei den Formelableitungen werden die Eigenschaften von Projektionsmatrizen ausgenutzt, um die Ergebnisse einfach und anschaulich zu interpretieren.

1. EINLEITUNG

In den letzten Jahrzehnten haben sich der Umfang und die Darstellungsweise der Methoden der Ausgleichungsrechnung beträchtlich gewandelt. Die in der mathematischen Statistik entwickelten Verfahren zum Testen von Hypothesen haben Eingang gefunden, und moderne Methoden der linearen Algebra erweisen sich als wirkungsvolles Hilfsmittel für Problemanalysen und zur Beschreibung des mathematischen Hintergrunds. Auch die Vielfalt der heute verwendeten mathematischen Modelle und die Art ihrer Formulierung sind überwiegend anderen Zweigen der Wissenschaft entlehnt.

Mit dieser "Modernisierung" der Ausgleichungsrechnung geht ein Wandel der Bezeichnungen einher, der es erleichtert, Parallelen zu verwandten Verfahren zu erkennen, der aber auch gelegentlich Unmut erzeugt, da die Aufgabe traditioneller Begriffe manchen zu eilfertig erfolgt. So könnte dieser Beitrag auch überschrieben sein: "Die Formeln der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, abgeleitet mit Hilfe von Projektoren".

Nach der einleitenden Definition der betrachteten Modelle und der Festlegung der zu schätzenden Größen und Funktionen werden im dritten Abschnitt die wichtigsten Sätze über Projektionsmatrizen zusammengestellt und diskutiert. In den folgenden Abschnitten werden sodann Projektionsmatrizen benutzt, um in linearen Modellen, auf verschiedenen Stufen der Verallgemeinerung, Schätzfunktionen abzuleiten. Da sie auf einfache Weise eine geometrische Interpretation zulassen, sind Projektoren besonders geeignet, das Verständnis des mathematischen Hintergrunds der Methode der kleinsten Quadrate zu fördern. Die wesentlichen Entwicklungen, die bei dieser Betrachtungsweise der Ausgleichungsrechnung zum Tragen kommen, stammen von ***S.K. MITRA***, ***R.A. RAO*** und ***G. ZYSKIND***.

2. DAS GAUSS-MARKOFF-MODELL

Mit $\boldsymbol{\ell}$ als m-Vektor von Zufallsgrößen (Beobachtungen), $\boldsymbol{x}$ als n-Vektor von nicht stochastischen Parametern (Unbekannten), $m \geq n$, und $\mathcal{A}$ als bekannter $m \times n$-Matrix von Koeffizienten lautet das Gauß-Markoff-Modell

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\ell} &= \mathcal{A}\boldsymbol{x} + \varepsilon \ , \quad E(\boldsymbol{\ell}) = \mathcal{A}\boldsymbol{x} \ , \\ V(\boldsymbol{\ell}) &= E\left(\varepsilon\varepsilon^t\right) = \sigma_0^2 \mathcal{Q}_l \ . \end{aligned} \tag{2-1}$$

Hierin ist ε ein Vektor wahrer Fehler und $E(\cdot)$ bzw. $V(\cdot)$ stehen für den Erwartungswert bzw. die Varianz des in Klammern stehenden Arguments.

Definition 1 : Das oben eingeführte Modell sei bezeichnet als:

1.1: reguläres Gauß-Markoff-Modell, wenn $r(\mathcal{A}) = n$ und $r(\mathcal{Q}_1) = m$ gilt,

1.2: $\mathcal{A}$-singulräes Gauß-Markoff-Modell, wenn $r(\mathcal{A}) = p < n$ und $r(\mathcal{Q}_1) = m$ gilt,

1.3: $\mathcal{Q}$-singuläres Gauß-Markoff-Modell, wenn $r(\mathcal{A}) = n$ und $r(\mathcal{Q}_1) = q < m$ gilt,

1.4: allgemeines Gauß-Markoff-Modell, wenn $r(\mathcal{A}) = p < n$ und $r(\mathcal{Q}_1) = q < m$ gilt.

In den so spezifizierten Modellen werden die zu einem beobachteten Vektor $\boldsymbol{\ell}$ gehörenden "bestmöglichen" Schätzwerte für den Vektor $\boldsymbol{x}$, für lineare Funktionen von $\boldsymbol{x}$ und σ_0^2 gesucht, wobei $\mathcal{Q}_1$ als fest und a priori gegeben betrachtet wird. Zur Konkretisierung des Ausdrucks "bestmöglich" dienen die folgenden Definitionen.

Definition 2 : Als bester linearer Schätzer für eine Funktion

$y = \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x}$ der Parameter des Modells (2-1) sei die Schätzfunktion

$\hat{y} = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{\ell}$ bezeichnet, wenn sie

a) erwartungstreu ist

$$E(\hat{y}) = E(\boldsymbol{c}^t \boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} \ , \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}^n$$

und

b) minimale Varianz besitzt

$$V(\hat{y}) = \sigma_0^2\, \boldsymbol{c}^t \mathcal{Q}_1 \boldsymbol{c} = \min .$$

Es wird sich im folgenden zeigen, daß die Bedingungen für beste Schätzbarkeit und die Menge der Funktionen, für die beste Schätzer existieren, von der Art des Modells gemäß Definition 1 abhängen.

Definition 3 : Als bester quadratischer Schätzer für die Varianz σ_0^2 sei eine Schätzfunktion der als normalverteilt angenommenen Beobachtungen $s_0^2 = \boldsymbol{\ell}^t \mathcal{B}\, \boldsymbol{\ell}$ bezeichnet, wenn sie

a) erwartungstreu ist
$E(s_0^2) = E(\boldsymbol{\ell}^t \mathcal{B} \boldsymbol{\ell}) = \mathrm{sp}\,[\mathcal{B}\, V(\boldsymbol{\ell})] + \boldsymbol{x}^t \mathcal{A}^t \mathcal{B} \mathcal{A} \boldsymbol{x} = \sigma_0^2$

b) nicht von dem Parametervektor $\boldsymbol{x}$ abhängt (invariant ist) $\mathcal{A}^t \mathcal{B} = \mathcal{O}$ und

c) minimale Varianz besitzt
$V(\boldsymbol{\ell}^t \mathcal{B} \boldsymbol{\ell}) = 2\sigma_0^4\, \mathrm{sp}[\mathcal{B} \mathcal{Q}_1 \mathcal{B} \mathcal{Q}_1] = \min$.

Hier handelt es sich um eine Spezialisierung der allgemeineren Varianzkomponentenschätzung, die z.B. in (***KOCH*** 1980, S. 205 ff.) behandelt ist. Die Kriterien a) bis c) sind erfüllt, wenn $s_0^2 = (\mathrm{sp}[\mathcal{B} \mathcal{Q}_1 \mathcal{B} \mathcal{Q}_1])^{-1} \cdot \boldsymbol{\ell}^t (\mathcal{B} \mathcal{Q}_1 \mathcal{B}) \boldsymbol{\ell}$ gesetzt wird.

3. PROJEKTOREN

Jeder Vektorraum U kann in disjunkte Unterräume V und W zerlegt werden. Es gilt dann die direkte Summe $U = V \oplus W$, und jeder Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ ist eindeutig als Summe $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ darstellbar, wobei $\boldsymbol{v} \in V$ und $\boldsymbol{w} \in W$ ist.

Definition 4 : Eine Projektion ist eine lineare Transformation, die den Vektorraum U auf den Unterraum V abbildet. Die Matrix $\mathcal{P}[V]$, die diese Abbildung erzeugt, ist genau dann ein Projektor, wenn

$$\mathcal{P}\boldsymbol{u} = \mathcal{P}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \quad , \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in U \; . \tag{3-1}$$

gilt.

Die Projektion ist eng mit der Zerlegung des Vektorraumes $U = V \oplus W$ verbunden. Aus der Definition folgt, daß der Projektor $\mathcal{P}$ quadratisch und idempotent ist

$$\mathcal{P}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \;\; , \quad \mathcal{P}\mathcal{P}\boldsymbol{u} = \mathcal{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \;\; , \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in U \;\; , \quad \boldsymbol{v} \in V \;\; , \tag{3-2}$$

außerdem gilt

$$\mathcal{P}\boldsymbol{w} = \mathcal{O} \; . \tag{3-3}$$

Der zu der Zerlegung $U = V \oplus W$ gemäß Def. 4 gehörende Projektor sei mit $\mathcal{P}_W[V]$ bezeichnet. Er projiziert den Vektorraum U auf den Unterraum V in Richtung des Unterraumes W. Es gilt daher $S(\mathcal{P}) = V$ und $N(\mathcal{P}) = W$, wobei $S(\cdot)$ den Spaltenraum und $N(\cdot)$ den Nullraum bezeichnet, der durch die Spaltenvektoren der in der Klammer stehenden Matrix aufgespannt wird.

Satz 1: Sei $\mathcal{P}_W[V]$ ein Projektor gemäß Def. 4, dann ist

$$\mathcal{I} - \mathcal{P}_W[V] = P_V[W] \tag{3-4}$$

der Projektor von U auf W in Richtung V.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (3-1)

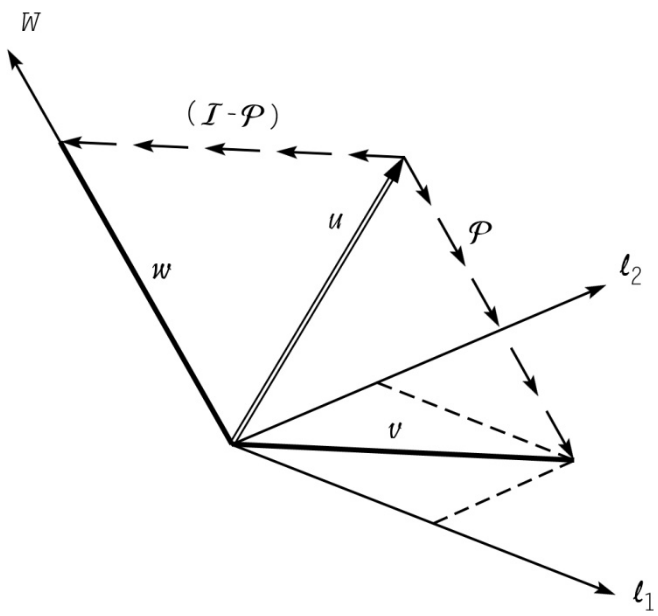
$$(\mathcal{I}-\mathcal{P})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \quad , \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in U \quad . \tag{3-5}$$

Außerdem gelten, wie leicht verifiziert werden kann, die Beziehungen

$$\mathcal{P}_W[V] + \mathcal{P}_V[W] = \mathcal{I} \tag{3-6}$$

$$\mathcal{P}_W[V] \cdot \mathcal{P}_V[W] = \mathcal{O} \tag{3-7}$$

In Abbildung 1 werden die Zusammenhänge für den E^3 geometrisch veranschaulicht.



$U = E^3 = V \oplus W$

$V \subset E^3$ (Ebene ℓ_1, ℓ_2)

$V \subset E^3$ (Ebene ℓ_1, ℓ_2)

$W \subset E^3$ (Raumgerade)

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$

$\mathcal{P}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$

$\mathcal{P}\boldsymbol{w} = \mathcal{O}$

$(\mathcal{I}-\mathcal{P})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$

Abbildung 1 Projektion in E^3

Wenn mit $\boldsymbol{V} = \mathrm{S}(\mathcal{A})$ und $\boldsymbol{W} = \mathrm{S}(\mathcal{B})$ zwei Unterräume gegeben sind, für die $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{W}$ gilt, so kann der damit verknüpfte Projektor explizit angegeben werden.

Satz 2: Sei $\mathcal{R}$ eine Matrix mit maximalem Rang, für die $\mathcal{R}\mathcal{B} = \mathcal{O}$ gilt, und sei $\mathrm{r}(\mathcal{R}) = \mathrm{r}(\mathcal{A})$, so lautet eine Darstellung des Projektors

$$\mathcal{P}_{\mathrm{B}}[\mathcal{A}] = \mathcal{A}(\mathcal{R}\mathcal{A})^{-}\mathcal{R} \tag{3-8}$$

Die generalisierte Inverse in (3-8) hat, wie in allen folgenden Beziehungen, lediglich die Gleichung

$$(\mathcal{R}\mathcal{A})\,(\mathcal{R}\mathcal{A})^{-}\,(\mathcal{R}\mathcal{A}) = (\mathcal{R}\mathcal{A}) \tag{3-9}$$

zu erfüllen. Wegen $\mathcal{P}\mathcal{B} = \mathcal{O}$ muß $\mathcal{P} = \mathcal{L}\mathcal{R}$ gelten. Wird dies in $\mathcal{P}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ eingesetzt, so folgt $\mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Und mit $\mathcal{L} = \mathcal{A}\,(\mathcal{R}\mathcal{A})^{-}$ erhält man sofort (3-8).

Eine Wahl für die Matrix $\mathcal{R}$ ist zum Beispiel

$$\mathcal{R} = \left(\mathcal{J} - \mathcal{B}\mathcal{B}^{-}\right) . \tag{3-10}$$

Wie schon in (3-8) wird im folgenden vereinfachend die Schreibweise $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}[\mathcal{A}]$ für $\mathcal{P}_{\mathrm{S}(\mathcal{B})}[\mathrm{S}(\mathcal{A})]$ gewählt. Wenn die Vektorraumzerlegung aus dem Text hervorgeht, wird einfach $\mathcal{P}$ geschrieben.

Wenn $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{W}$ kein Vektorraum sondern ein Vektorunterraum des $\boldsymbol{E}^{\mathrm{m}}$ ist, $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}^{\mathrm{m}}$, so gibt es Vektoren $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}^{\mathrm{m}}$, für die $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} = \mathcal{O}$ gilt. Seien diese Vektoren in der Matrix $\mathcal{X}$ zusammengefaßt, so gilt

$$\left(\mathcal{P}_{\mathrm{W}}[V] + \mathcal{X}\,\mathcal{Y}\,\mathcal{X}^{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \tag{3-11}$$

für jede Matrix $\mathcal{Y}$ passender Ordnung. $\mathcal{P}_{\mathrm{W}}[V] + \mathcal{X}\,\mathcal{Y}\,\mathcal{X}^{\mathrm{t}}$ ist daher ein Projektor nach Definition 4, der jedoch keinesfalls eindeutig und nur für spezielle Matrizen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ idempotent ist.

Eine für die Schätzung in linearen Modellen besonders wichtige Gruppe sind die orthogonalen Projektoren. Sie sind bezüglich der orthogonalen Zerlegung des Vektorraumes $\boldsymbol{U}$ definiert: $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{V}^{\perp}$. Die durch $\boldsymbol{V}^{\perp}$ gegebene Projektionsrichtung steht senkrecht auf $\boldsymbol{V}$. Daraus folgt, daß für jede Vektorzerlegung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}^{\perp}$ das Produkt $\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w} = 0$ wird.

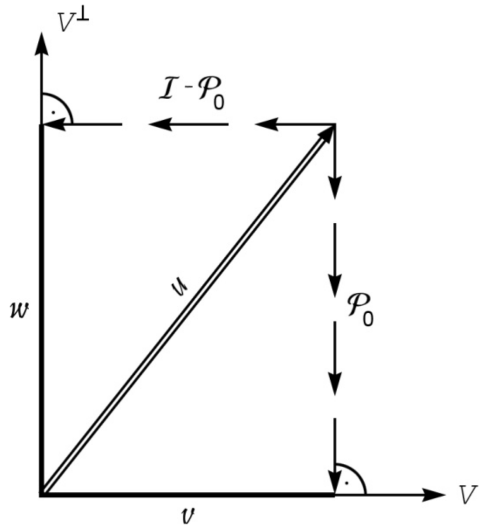


Abbildung 2 Orthogonale Projektion in E^2

Satz 3: Sei mit $V = \mathrm{S}(\mathcal{A})$ und $V^\perp = \mathrm{S}^\perp(\mathcal{A}) = \mathrm{S}(\mathcal{B})$ eine orthogonale Zerlegung des E^m gegeben, so ist

$$\mathcal{P}_0[\mathcal{A}] = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^t\mathcal{A}\right)^-\mathcal{A}^t \tag{3-12}$$

der orthogonale Projektor auf $\mathrm{S}(\mathcal{A})$.

Wegen $\mathrm{S}^\perp(\mathcal{A}) = \mathrm{S}(\mathcal{B})$ gilt $\mathcal{A}^t\mathcal{B} = \mathcal{O}$. Ferner ist $r(\mathcal{A}) = r\left(\mathcal{A}^t\mathcal{A}\right)$. Daher kann in (3-8) für $\mathcal{R}$ die Matrix $\mathcal{A}^t$ eingesetzt werden. Da $\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^t\mathcal{A}\right)^-\mathcal{A}^t$ unabhängig von der Wahl der g-Inversen ist, ist $\mathcal{P}_0[\mathcal{A}]$ durch (3-12) eindeutig bestimmt.

Satz 4: $\mathcal{P}_0$ ist genau dann ein orthogonaler Projektor, wenn $\mathcal{P}_0$ symmetrisch und idempotent ist, so daß

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^t = \mathcal{P}_0^2 \ . \tag{3-13}$$

Aus (3-2) folgt $\mathcal{P}_0 u = v \in \mathrm{S}(\mathcal{A})\ \forall\ u \in E^m$ und aus (3-5) erhält man $\left(\mathcal{I}\text{-}\mathcal{P}_0\right)u = w \in \mathrm{S}(\mathcal{B})\ \forall\ u \in E^m$. Da nach Voraussetzung $\mathrm{S}(\mathcal{B}) = \mathrm{S}^\perp(\mathcal{A})$ gilt, ist $v^t w = 0\ \forall\ v \in \mathrm{S}(\mathcal{A})$, $w \in \mathrm{S}(\mathcal{B})$. Setzt man nun die Projektionen ein, so ist $v^t w = u^t\mathcal{P}_0^t(\mathcal{I} - \mathcal{P}_0)\,u = 0\ \forall\ u \in E^m$. Daher muß $\mathcal{P}_0^t = \mathcal{P}_0^t\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_0 = \left(\mathcal{P}_0^t\mathcal{P}_0\right)^t = \mathcal{P}_0^t\mathcal{P}_0$ gelten, d.h. $\mathcal{P}_0$ muß symmetrisch und idempotent sein. Wenn andererseits $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^t = \mathcal{P}_0^2$ gilt, so folgt $\mathcal{P}_0^t = \mathcal{P}_0^t\mathcal{P}_0$ und damit $u^t\mathcal{P}_0^t\left(\mathcal{I}\text{-}\mathcal{P}_0\right)u = 0\ \forall\ u \in E^m$.

Eine Erweiterung des Projektionsbegriffs für Vektorräume, in denen die Länge durch die Norm $\|u\|_M = (u^t \mathcal{M} u)^{1/2}$, $\mathcal{M}$ symmetrisch, gemessen wird, ist einfach möglich. Die Analogie wird besonders deutlich, wenn folgende Bezeichnungen eingeführt werden.

<u>Definition 5 :</u> Eine quadratische Matrix $\mathcal{P}$ sei bezeichnet als

(a) $\mathcal{M}$-symmetrisch, wenn $\mathcal{MP} = (\mathcal{MP})^t$,

(b) $\mathcal{M}$-idempotent, wenn $\mathcal{MP} = \mathcal{MP}^2$ gilt.

Die Zerlegung des Vektorraumes $U = V \oplus W$ in eine direkte Summe sei bezeichnet als

(c) $\mathcal{M}$-orthogonal, wenn $v^t \mathcal{M} w = 0 \ \forall \ v \in V,\ w \in W$.

Wenn U ein Vektorraum ist, so kann in Anwendung von (c) $W = V_M^{\perp}$ als $\mathcal{M}$-orthogonales Komplement von V bezeichnet werden.

Satz 5: $\mathcal{P}_{MO}[V]$ ist genau dann ein $\mathcal{M}$-orthogonaler Projektor auf V , wenn er $\mathcal{M}$-symmetrisch und $\mathcal{M}$-idempotent ist:

$$\mathcal{MP} = (\mathcal{MP})^t \quad ; \quad \mathcal{MP} = \mathcal{MP}^2$$

In Analogie zur Beweisführung für Satz 4 muß

$$v^t \mathcal{M} w = u^t \mathcal{P}^t \mathcal{M} (\mathcal{I} - \mathcal{P}) u = 0 \ \forall \ u \in E^m \tag{3-14}$$

gelten. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{P}^t\mathcal{M} = \mathcal{P}^t\mathcal{MP} = (\mathcal{P}^t\mathcal{M})^t = \mathcal{MP}$ und $\mathcal{P}^t\mathcal{M} = \mathcal{P}^t\mathcal{MPP} = \mathcal{MP} = \mathcal{MPP}$, also die Notwendigkeit von $\mathcal{M}$-Symmetrie und $\mathcal{M}$-Idempotenz. Daß diese Eigenschaften auch hinreichend sind, ergibt sich durch Einsetzen in (3-14).

Wird der Satz 2 auf die $\mathcal{M}$-orthogonale Zerlegung des Vektorraumes angewandt, so erhält man mit $V = S(\mathcal{A})$ und $V_M^{\perp} = S(\mathcal{B})$ die Beziehung

$$\mathcal{A}^t \mathcal{M} \mathcal{B} = \mathcal{O} \ , \tag{3-15}$$

die zeigt, daß in (3-8) $\mathcal{R} = \mathcal{A}^t\mathcal{M}$ zu setzen ist. Daraus folgt

$$\mathcal{P}_{MO}[\mathcal{A}] = \mathcal{A}(\mathcal{A}^t\mathcal{M}\mathcal{A})^{-}\mathcal{A}^t\mathcal{M} \tag{3-16}$$

Satz 6: Unter der $\mathcal{M}$-orthogonalen Projektion des E^m auf den $S(\mathcal{A})$ gilt

$$\|u - \mathcal{P}u\|_M \le \|u - a\|_M \ \forall \ u \in E^m,\ a \in S(\mathcal{A}) \ . \tag{3-17}$$

Wegen $(u-\mathcal{P}u) \in S_M^{\perp}(\mathcal{A})$ und $a \in S(\mathcal{A})$ gilt für alle u und a entsprechend (3-15) $a^t\mathcal{M}(u-\mathcal{P}u) = 0$. Schreibt man nun $u - a = (u - \mathcal{P}u) - (a - \mathcal{P}u)$ so folgt

$$\|u-a\|_M^2 = \|u-\mathcal{P}u\|_M^2 + \|a-\mathcal{P}u\|_M^2 - 2(u-\mathcal{P}u)^t\mathcal{M}(a-\mathcal{P}u) \quad , \tag{3-18}$$

d.h. (3-17) ist genau dann erfüllt, wenn die Bilinearform auf der rechten Seite von (3-18) verschwindet. Dies ist aber unter der $\mathcal{M}$-orthogonalen Projektion gesichert, da $(a - \mathcal{P}u) \in S(\mathcal{A})$.

4. SCHÄTZUNG IM REGULÄREN GAUSS-MARKOFF-MODELL

In dem in (2-1) formulierten Modell mit den Spezifikationen nach Definition 1.1

$$\ell = \mathcal{A}x + \varepsilon \quad , \quad V(\ell) = \sigma_0^2 Q_l$$

werden die Modellparameter x nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Das als bekannt vorausgesetzte Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\mathcal{A}^t Q_l^{-1}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^t Q_l^{-1}\ell \\ V(\hat{x}) &= \sigma_0^2 (\mathcal{A}^t Q_l^{-1}\mathcal{A})^{-1} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} \quad . \end{aligned} \tag{4-1}$$

Wird die Gleichung für $\hat{x}$ links mit $\mathcal{A}$ multipliziert, so folgt

$$\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^t Q_l^{-1}\mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{A}^t Q_l^{-1}\ell = \ell + v = \hat{\ell} \tag{4-2}$$

oder im Hinblick auf (3-16)

$$\hat{\ell} = \mathcal{P}_{Q^{-1}l}[\mathcal{A}]\,\ell \quad . \tag{4-3}$$

Der Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\ell}$ wird durch Q_l^{-1}-orthogonale Projektion des Beobachtungsvektors ℓ auf den Spaltenraum von $\mathcal{A}$ erhalten. Die Methode der kleinsten Quadrate bewirkt also eine Q_l^{-1}-orthogonale Zerlegung des Vektors $\ell \in E^m$ in die Summe der Vektoren $\hat{\ell} \in S(\mathcal{A})$ und $\ell - \hat{\ell} = -v \in S_{Q^{-1}}^{\perp}(\mathcal{A})$. Aus den Eigenschaften der Q_l^{-1}-orthogonalen Projektion folgt sofort, daß die Zerlegung eindeutig ist und folgende Beziehungen gelten:

$$\hat{\ell}^t Q_l^{-1} v = 0 \;\forall\; \hat{\ell} \in S(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{A}^t Q_l^{-1} v = \mathcal{O} \tag{4-4}$$

$$(\ell - \hat{\ell})^t Q_l^{-1} (\ell - \hat{\ell}) = \min \; .$$

Die Suche nach besten linearen Schätzern gemäß Definition 2 erfolgt in zwei Schritten. Die Forderung der Erwartungstreue führt für $y = b^t x = c^t \ell$ zu

$$E(c^t \ell) = c^t E(\ell) = c^t \mathcal{A} x = b^t x \tag{4-5}$$

und damit zu der Bedingung

$$c^t \mathcal{A} = b^t \quad \text{bzw.} \quad b \in S(\mathcal{A}^t) \; . \tag{4-6}$$

Da nach Modelldefinition $r(\mathcal{A}) = n$ ist, liegen alle n-Vektoren b im $S(\mathcal{A}^t)$. Daraus folgt, daß jede lineare Funktion $y = b^t x$ durch $c^t \ell$ erwartungstreu schätzbar ist. Aus (4-6) erhält man für c die allgemeine Lösung

$$c = (\mathcal{A}^t)^- b + (\mathcal{I} - (\mathcal{A}^t)^- \mathcal{A}^t) z \quad , \quad z \text{ beliebig.} \tag{4-7}$$

Um unter allen erwartungstreuen Schätzern $c^t \ell$ jenen mit minimaler Varianz zu erhalten, ist $V(c^t \ell) = \sigma_0^2 c^t Q_l c$ zu minimieren, und zwar durch geeignete Wahl von $(\mathcal{A}^t)^-$ und z. Wegen der in den nächsten Abschnitten auftretenden Besonderheiten ist es zweckmäßig, den Vektor c mit Hilfe der Lagrangeschen Funktion

$$L = c^t Q_l c + 2\lambda^t (\mathcal{A}^t c - b) \tag{4-8}$$

direkt zu bestimmen. Die Ableitungen von L nach c und λ werden null gesetzt und führen auf das konsistente Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} Q_l & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & \mathcal{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ b \end{bmatrix} \tag{4-9}$$

mit der Lösung

$$\begin{bmatrix} c \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_l^{-1} - \mathcal{G} \mathcal{A} Q_l^{-1} & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^t & -\mathcal{N}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ b \end{bmatrix} \; , \tag{4-10}$$

in der zur Abkürzung

$$\mathcal{N} = \mathcal{A}^t \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A}\, \mathcal{N}^{-1} \tag{4-11}$$

gesetzt wurde. Es erweist sich also

$$\boldsymbol{c} = \mathcal{G}\boldsymbol{b} = \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A} \left(\mathcal{A}^t \mathcal{Q}_1^{-1} \mathcal{A} \right)^{-1} \boldsymbol{b} \tag{4-12}$$

als der gesuchte Vektor für die beste lineare Schätzung von $\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x}$

$$\hat{y} = \boldsymbol{b}^t \mathcal{G}^t \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{b}^t \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^t \hat{\boldsymbol{\ell}} \quad . \tag{4-13}$$

Für die Varianz erhält man

$$V(\hat{y}) = \sigma_0^2\, \boldsymbol{c}^t \mathcal{Q}_1 \boldsymbol{c} = \sigma_0^2\, \boldsymbol{b}^t \mathcal{Q}_{\hat{x}}\, \boldsymbol{b} \quad . \tag{4-14}$$

Gleichung (4-13) ist eine Verallgemeinerung von (4-1) und (4-2). Soll nämlich $\boldsymbol{y} = \mathcal{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ nach (4-13) geschätzt werden, so ist $\boldsymbol{b}$ durch die Einheitsmatrix $\mathcal{I}$ zu ersetzen, womit sofort (4-1) folgt. Ist dagegen $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\ell}$ zu schätzen, so findet man mit $\mathcal{A}$ für $\boldsymbol{b}^t$ in (4-13) das Ergebnis (4-2). Diese Identitäten zeigen die Äquivalenz der Methode der kleinsten Quadrate und der besten linearen Schätzung.

Als Schätzwert für σ_0^2 wird bei der Methode der kleinsten Quadrate der Schätzer

$$s_0^2 = \boldsymbol{v}^t \mathcal{Q}_1^{-1} \boldsymbol{v} \,/\, (m - n) \tag{4-15}$$

benutzt. Es soll nun noch gezeigt werden, daß s_0^2 ein bester quadratischer Schätzer gemäß Definition 3 ist.

Aus $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\ell}} - \boldsymbol{\ell} = (\mathcal{P} - \mathcal{I})\boldsymbol{\ell}$ mit $\mathcal{P}$ nach (4-3) folgt

$$s_0^2 = \boldsymbol{\ell}^t \mathcal{Q}_1^{-1} (\mathcal{I} - \mathcal{P})\, \boldsymbol{\ell} \,/\, (m - n) = \boldsymbol{\ell}^t \mathcal{B}\, \boldsymbol{\ell} \tag{4-16}$$

$$E(s_0^2) = E(\boldsymbol{\ell}^t \mathcal{B}\, \boldsymbol{\ell}) = \sigma_0^2\, \mathrm{sp}[\mathcal{B}\, \mathcal{Q}_1] + \boldsymbol{x}^t \mathcal{A}^t \mathcal{B}\, \mathcal{A}\, \boldsymbol{x} \quad . \tag{4-17}$$

Wird nun in (4-17)

$$\mathcal{B} = \mathcal{Q}_1^{-1} (\mathcal{I} - \mathcal{P}) \,/\, (m - n) \tag{4-18}$$

eingesetzt, so findet man nach Ausmultiplizieren, daß $E(s_0^2) = \sigma_0^2$ erfüllt ist. Fernerzeigt sich, daß wegen $\mathcal{A}^t\mathcal{B} = \mathcal{O}$ der Schätzer invariant ist. Daß s_0^2 nach (4-16) auch minimale Varianz besitzt, läßt sich ebenfalls durch Einsetzen zeigen,

$$\mathrm{sp}(\mathcal{B}\mathcal{Q}_1\mathcal{B}\mathcal{Q}_1) = \frac{1}{(m-n)}$$

$$\boldsymbol{\ell}^t\mathcal{B}\,\mathcal{Q}_1\mathcal{B}\,\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}^t\mathcal{B}\,\boldsymbol{\ell}\,/\,(m-n)$$

$$s_0^2 = (\mathrm{sp}[\mathcal{B}\mathcal{Q}_1\mathcal{B}\mathcal{Q}_1])^{-1}\boldsymbol{\ell}^t\mathcal{B}\,\mathcal{Q}_l\mathcal{B}\,\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}^t\mathcal{B}\,\boldsymbol{\ell} \tag{4-19}$$

5. SCHÄTZUNG IM $\mathcal{A}$-SINGULÄREN GAUSS-MARKOFF-MODELL

Im ersten Schritt der Verallgemeinerung des in (2-1) formulierten Modells

$$\boldsymbol{\ell} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} + \varepsilon \;,\; V(\boldsymbol{\ell}) = \sigma_0^2\,\mathcal{Q}_1$$

soll gemäß Definition 1.2 angenommen werden, daß der Rang der $m \times n$-Matrix $\mathcal{A}$ kleiner als n ist,

$$r(\mathcal{A}) = p < n \;.$$

Bildet man nun nach der Methode der kleinsten Quadrate die Normalgleichungen

$$\mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}\,\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}\boldsymbol{\ell} \;, \tag{5-1}$$

so können diese bekanntlich nicht in gewohnter Weise aufgelöst werden, da wegen $r\left(\mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}\right) = r(\mathcal{A})<n$ die Inverse von $\mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}$ nicht existiert. Die Gleichung (5-1) hat keinen eindeutigen Lösungsvektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ sondern eine Lösungsmenge

$$\boldsymbol{L} = \left\{\hat{\boldsymbol{x}},\, \hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{N}^-\mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}\boldsymbol{\ell} + \left(\mathcal{I} - \mathcal{N}^-\mathcal{N}\right)\boldsymbol{z}\right\} \tag{5-2}$$

mit $\mathcal{N} = \mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}$, $\mathcal{N}\mathcal{N}^-\mathcal{N} = \mathcal{N}$ und $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{E}^n$ beliebig.

Im singulären Gauß-Markoff-Modell ist die Frage nach dem Parametervektor $\boldsymbol{x}$ offenbar nicht sinnvoll. Es kann nur nach der Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$ gefragt werden, die durch alle Vektoren, die (5-1) befriedigen, gegeben ist. $\boldsymbol{L}$ enthält genau $n-p+1$ linear unabhängige Vektoren $\hat{\boldsymbol{x}}$. Für praktische Zwecke kann es sinnvoll sein, ein Element $\hat{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{L}$ unter ganz bestimmten Gesichtspunkten auszuwählen, die dann am einfachsten in $n-p$ geeignete

Bedingungsgleichungen $\mathcal{R}\hat{x} - g = \mathcal{O}$ gekleidet werden. Einzelheiten dazu sind in **CASPARY** 1978 behandelt.

Wird (5-2) linksseitig mit $\mathcal{A}$ multipliziert, so erhält man den eindeutigen Vektor

$$\mathcal{A}\,\hat{x} = \mathcal{A}\,\mathcal{N}^{-}\mathcal{A}^{t}\mathcal{Q}_{l}^{-1}\ell = \ell + v = \hat{\ell} \quad . \tag{5-3}$$

Ein Vergleich mit (3-16) zeigt, daß $\mathcal{A}\,\mathcal{N}^{-}\mathcal{A}^{t}\mathcal{Q}_{l}^{-1} = \mathcal{P}_{Q^{-1}l0}[\mathcal{A}]$ der $\mathcal{Q}_{l}^{-1}$-orthogonale Projektor auf $S(\mathcal{A})$ ist. Auch im $\mathcal{A}$-singulären Modell bewirkt also die Methode der kleinsten Quadrate eine eindeutige $\mathcal{Q}_{l}^{-1}$-orthogonale Zerlegung des Beobachtungsvektors ℓ. Die in (4-4) formulierten Beziehungen gelten daher unverändert im $\mathcal{A}$-singulären Modell.

Die Überlegungen zur Erwartungstreue einer linearen Funktion $y = \boldsymbol{\ell}^{t}\boldsymbol{x}$ in Abschnitt 4 sind unabhängig von $r(\mathcal{A})$ durchgeführt worden, so daß das Ergebnis $\boldsymbol{\ell}^{t} \in S(\mathcal{A}^{t})$ seine Gültigkeit behält. Da $r(\mathcal{A}) = p < n$ vorausgesetzt ist, liegen allerdings nicht mehr alle n-Vektoren im $S(\mathcal{A}^{t})$, so daß sich eine Beschränkung der Zahl der zulässigen Vektoren $\boldsymbol{\ell}$ ergibt. Im $\mathcal{A}$-singulären Modell (2-1) sind nur die Funktionen $y = \boldsymbol{\ell}^{t}\boldsymbol{x}$ erwartungstreu schätzbar, für die $\mathcal{N}\mathcal{N}^{-}\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}$ bzw. $\mathcal{A}^{t}(\mathcal{A}^{t})^{-}\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}$ gilt.

Die Forderung nach minimaler Varianz führt genau wie im 4. Kapitel auf das Gleichungssystem für c

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{l} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{t} & \mathcal{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \boldsymbol{\ell} \end{bmatrix} \quad , \tag{5-4}$$

das nun jedoch einen Rangdefekt hat. Nach **PRINGLE/RAYNER** 1971, S. 50 ff., hat dieses System die Lösung

$$\begin{bmatrix} c \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{l}^{-1} - \mathcal{G}\,\mathcal{A}\,\mathcal{Q}_{l}^{-1} & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^{t} & -\mathcal{N}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \boldsymbol{\ell} \end{bmatrix} , \tag{5-5}$$

wobei $\mathcal{N}^{-} = \left(\mathcal{A}^{t}\mathcal{Q}_{l}^{-1}\mathcal{A}\right)^{-}$ eine beliebige g-Inverse von $\mathcal{N}$ ist und $\mathcal{G} = \mathcal{Q}_{l}^{-1}\mathcal{A}\,\mathcal{N}^{-}$ gesetzt wurde. Für den gesuchten Vektor erhält man analog zu (4-12) die Lösung

$$c = \mathcal{G}\,\boldsymbol{\ell} = \mathcal{Q}_{l}^{-1}\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{t}\mathcal{Q}_{l}^{-1}\mathcal{A}\right)^{-}\boldsymbol{\ell} \quad , \tag{5-6}$$

mit der der beste lineare Schätzer lautet

$$\hat{y} = \mathcal{b}^t \mathcal{G}^t \ell = \mathcal{b}^t (\mathcal{N}^-)^t \mathcal{A}^t \mathcal{Q}_1^{-1} \ell \quad . \tag{5-7}$$

Da nach (4-6) $\mathcal{b}^t = c^t \mathcal{A}$ gilt, folgt aus (5-7)

$$\hat{y} = c^t \mathcal{A} \mathcal{G}^t \ell = \mathcal{b}^t \hat{x} = c^t \hat{\ell} \quad . \tag{5-8}$$

Das Produkt $\mathcal{A}\mathcal{G}^t$ ist $\mathcal{Q}_1^{-1}$-symmetrisch. Dies folgt aus der Invarianz des Ausdrucks $\mathcal{A}\mathcal{N}^-\mathcal{A}^t$ bezüglich der benutzten g-Inversen. Wegen $\mathcal{N}\mathcal{N}^-\mathcal{N} = \mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{N}^-)^t\mathcal{N}$ ist auch $(\mathcal{N}^-)^t$ g-Inverse von $\mathcal{N}$, so daß ebenfalls in (5-7) $(\mathcal{N}^-)^t$ durch $\mathcal{N}^-$ ersetzt werden darf. Die Eindeutigkeit des Schätzers $\hat{y}$ kann in (5-8) abgelesen werden, da $\hat{\ell}$ nach (5-3) und ebenfalls c eindeutig sind. Die Varianz von $\hat{y}$ lautet

$$V(\hat{y}) = \sigma_0^2\, c^t \mathcal{Q}_1 c = \sigma_0^2\, \mathcal{b}^t \mathcal{N}^- \mathcal{b} \quad .$$

Gleichung (5-7) ist eine Verallgemeinerung von (5-3), die man erhält, indem man $\mathcal{b}$ durch $\mathcal{A}^t$ ersetzt.

Der beste quadratische Schätzer für σ_0^2 wird ganz entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 4 abgeleitet. Mit $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_1^{-1}(\mathcal{I} - \mathcal{P}) / (m - p)$, wobei $\mathcal{P} = \mathcal{A}\mathcal{N}^-\mathcal{A}^t\mathcal{Q}_1^{-1}$ der $\mathcal{Q}_1^{-1}$-orthogonale Projektor nach (5-3) ist, erhält man

$$sp[\mathcal{B}\mathcal{Q}_1\mathcal{B}\mathcal{Q}_1] = \frac{1}{(m - p)}$$

$$\ell^t \mathcal{B} \mathcal{Q}_1 \mathcal{B} \ell \qquad \ell^t \mathcal{B} \ell / (m - p)$$

und schließlich

$$s_0^2 = \ell^t \mathcal{B} \ell = \frac{\ell^t \mathcal{Q}_1^{-1} (\mathcal{I} - \mathcal{P}) \ell}{m - p} \quad . \tag{5-9}$$

6. DAS ALLGEMEINE GAUSS-MARKOFF-MODELL

Die allgemeine Form des in (2-1) formulierten Gauß-Markoff-Modells

$$\ell = \mathcal{A}x + \varepsilon \ , \quad V(\ell) = \sigma_0^2\, \mathcal{Q}_1 = \Sigma_1$$

ist in Definition 1.4 spezifiziert. Es wird angenommen, daß sowohl die Koeffizientenmatrix $\mathcal{A}$ als auch die Kofaktorenmatrix $\mathcal{Q}_1$ einen Rangdefekt besitzen:

$r(\mathcal{A}) = p < n \;,\; r(Q_1) = q < m$

Eine gesonderte Behandlung des Q-singulären Falles gemäß Definition 1.3 ist entbehrlich, da die dort benötigten Schätzfunktionen sofort aus den Ergebnissen dieses Kapitels abgelesen werden können.

Will man im allgemeinen Modell zur Ableitung von Schätzern die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, so stößt man auf die Schwierigkeit, daß die Berechnung der Gewichtsmatrix $\mathcal{G}$ aus der singulären Kofaktorenmatrix Q_1 nicht so ohne weiteres möglich ist. Es ist also zu untersuchen, welche Matrix $\mathcal{G}$ zur Bildung der zu minimierenden quadratischen Form zu verwenden ist.

Ehe auf Lösungsmöglichkeiten für dieses Problem eingegangen wird, soll eine Analyse des Modells Klarheit darüber verschaffen, welche Vektorraumbeziehungen vorliegen.

Aus $\ell = \mathcal{A}x + \varepsilon$ folgt, daß $(\ell - \varepsilon) \in S(\mathcal{A})$ gilt. Da nur mit dem Modell verträgliche Schätzverfahren betrachtet werden sollen, muß auch für die ausgeglichene Beobachtung gelten: $\ell + v = \hat{\ell} \in S(\mathcal{A})$. Für den wahren Fehler ε gilt definitionsgemäß $\varepsilon \in S(\Sigma_1)$, so daß man für den Beobachtungsvektor $\ell \in S(\mathcal{A} \vdots Q_1)$ erhält. Das Modell (2-1) belegt also den Vektorraum $S(\mathcal{A} \vdots Q_l) = S(\mathcal{T})$, der im allgemeinen Fall ein Unterraum des E^m ist. Der Modellraum $S(\mathcal{T})$ wird durch die Spalten der Matrizen $\mathcal{A}$ und Q_1 aufgespannt

$$S(\mathcal{A} \vdots Q_1) = S(\mathcal{A}) + S(Q_1) = S(\mathcal{T}) \quad . \tag{6-1}$$

Weitere Klarheit bringt eine orthogonale Zerlegung des E^m entsprechend ***CASPARY*** 1983 mit den im folgenden definierten Matrizen bzw. Vektorunterräumen

$$S(\mathcal{K}) = S(\mathcal{A}) \cap S^{\perp}(Q_1) \quad , \quad \mathcal{K}^t Q_l = \mathcal{O} \tag{6-2}$$

$$S(\mathcal{L}) = S(\mathcal{A}) \cap S(Q_1) \quad , \quad \mathcal{L}^t \mathcal{K} = \mathcal{O} \tag{6-3}$$

$$S(\mathcal{M}) = S(Q_1) \cap S^{\perp}(\mathcal{A}) \quad , \quad \mathcal{L}^t \mathcal{M} = \mathcal{O} \;,\; \mathcal{M}^t \mathcal{A} = \mathcal{O} \tag{6-4}$$

$$S(\mathcal{N}) = S^{\perp}(Q_1) \cap S^{\perp}(\mathcal{A}) \quad , \quad \mathcal{N}^t \mathcal{A} = \mathcal{O} \;,\; \mathcal{N}^t Q_1 = \mathcal{O} \tag{6-5}$$

$$S(\mathcal{K}) \oplus S(\mathcal{L}) \oplus S(\mathcal{M}) \oplus S(\mathcal{N}) = E^m \tag{6-6}$$

$$S(\mathcal{K}) \oplus S(\mathcal{L}) = S(\mathcal{A}) \quad , \quad S(\mathcal{L}) \oplus S(\mathcal{M}) = S(Q_1) \tag{6-7}$$

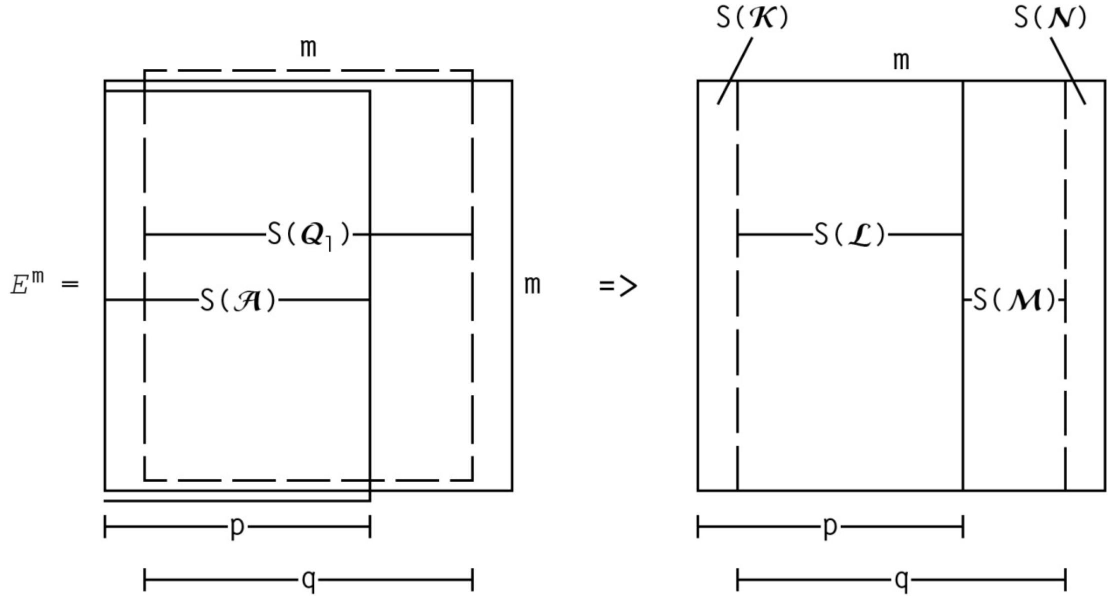


Abbildung 3   Vektorraumbelegung im allgemeinen Gauß-Markoff-Modell

Aus $\mathcal{K}^t \ell = \mathcal{K}^t \mathcal{A} x + \mathcal{K}^t \varepsilon$ folgt wegen $\mathcal{K}^t \varepsilon = \mathcal{O}$, daß die Parameter die Bedingung $\mathcal{K}^t \mathcal{A} x = \mathcal{K}^t \ell$ erfüllen müssen, deren rechte Seite erst nach Ausführung der Beobachtungen angegeben werden kann. Diese Bedingung verschwindet nur in dem Sonderfall $S(\mathcal{A}) \subset S(\mathcal{Q}_1)$, da dann $\mathcal{K} \equiv \mathcal{O}$ ist. Ferner müssen die Beobachtungen die Gleichung $\mathcal{N}^t \ell = \mathcal{O}$ erfüllen, mit der geprüft werden kann, ob die Beobachtungen modellkonform sind.

Nach ***MITRA/RAO*** 1968 erhält man eine Darstellung der Matrix $\mathcal{X}$ für $S(\mathcal{X}) = S(\mathcal{Y}) \cap S(\mathcal{Z})$ durch die Gleichung

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y}\left(\mathcal{Y}^t \mathcal{Z}^\perp\right)^\perp \quad \text{mit} \quad r(\mathcal{X}) = r(\mathcal{Y}) + r(\mathcal{Z}) - r(\mathcal{Y} \vdots \mathcal{Z}) \quad , \tag{6-8}$$

wobei unter $\mathcal{A}^\perp$ eine Matrix verstanden wird, deren Spalten das orthogonale Komplement zum $S(\mathcal{A})$ bilden.

Die Anwendung dieser Beziehung ergibt zum Beispiel mit

$$\mathcal{M} = \mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_1\mathcal{A})^\perp \tag{6-9}$$

eine Möglichkeit zur Bestimmung einer Matrix $\mathcal{M}$, deren Spalten den Unterraum $S(\mathcal{M})$ aufspannen. Mit der orthogonalen Zerlegung (6-2) bis (6-5) erhält man folgende Darstellungsmöglichkeiten für die in (6-1) eingeführte Modellraummatrix $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{K}^t \tag{6-10}$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A}^t \tag{6-11}$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{K}\mathcal{X}\mathcal{K}^t + \mathcal{L}\mathcal{Y}\mathcal{L}^t + \mathcal{M}\mathcal{Z}\mathcal{M}^t \quad , \tag{6-12}$$

bei denen $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ Matrizen passender Ordnung sind, die lediglich die offensichtlichen Rangbedingungen, wie z.B. $r(\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{K}^t) = r(\mathcal{K})$, erfüllen müssen.

Die Schätzaufgabe kann nun so formuliert werden: Der Beobachtungsvektor $\ell \in S(\mathcal{T})$ ist $\mathcal{G}$-orthogonal in die Summe der Vektoren $\hat{\ell} = \ell + v \in S(\mathcal{A})$ und $-v \in S(\mathcal{M})$ zu zerlegen. Daher muß analog (4-4) gelten

$$\hat{\ell}^t \mathcal{G} v = 0 \;\forall\; \hat{\ell} \in S(\mathcal{A}) \quad \text{und} \quad -v \in S(\mathcal{M}) \quad . \tag{6-13}$$

Gleichung (6-13) kann mit $\hat{\ell} = \mathcal{A}y$ und $-v = \mathcal{M}z$ umgeformt werden in $y^t\mathcal{A}^t\mathcal{G}\mathcal{M}z = 0 \;\forall\; y \in E^n$ und $z \in E^{r(M)}$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\mathcal{A}^t\mathcal{G}\mathcal{M} = \mathcal{O} \quad . \tag{6-14}$$

Nach (3-16) erhält man diese Zerlegung durch die Projektion mit

$$\mathcal{P}_{G0}[\mathcal{A}] = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^t\mathcal{G}\mathcal{A}\right)^- \mathcal{A}^t\mathcal{G} \quad . \tag{6-15}$$

Um die zunächst noch unbekannte Gewichtsmatrix $\mathcal{G}$ zu bestimmen, wird gefordert, daß die ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\ell} = \mathcal{P}\ell$ erwartungstreu sind und minimale Varianz aufweisen. Die Erwartungstreue ist wegen $\ell \in S(\mathcal{A})$ gewährleistet wenn

$$\mathcal{P}\mathcal{A} = \mathcal{A} \tag{6-16}$$

gilt, das heißt, $\mathcal{P}$ und $\mathcal{A}$ müssen denselben Spaltenraum aufspannen.

Damit die Varianzen der ausgeglichenen Beobachtungen minimal werden, ist

$$\mathrm{sp}\left[\mathcal{P}\,\mathcal{Q}_1\mathcal{P}^t\right] = \min \tag{6-17}$$

zu fordern. Um (6-16) und (6-17) gleichzeitig zu erfüllen, ist die Lagrange-Funktion

$$L = \mathrm{sp}\left[\mathcal{P}\,\mathcal{Q}_1\mathcal{P}^t\right] + 2\,\mathrm{sp}\,\Lambda\,(\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{A})$$

zu minimieren. Die Verallgemeinerung des schon in (4-8) verwendeten Verfahrens führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & \mathcal{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}^t \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^t \end{bmatrix} \quad . \tag{6-18}$$

Da die Koeffizientenmatrix nicht den vollen Rang hat, ist die Lösung von (6-18) nicht eindeutig. Mit einer beliebigen g-Inversen

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & \mathcal{O} \end{bmatrix}^- = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 \end{bmatrix} \tag{6-19}$$

und einer frei wählbaren Matrix $\mathcal{Z}$ erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}^t \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^t \end{bmatrix} + \left\{ \mathcal{I} - \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & \mathcal{O} \end{bmatrix} \right\} \mathcal{Z} \quad ,$$

woraus für $\mathcal{P}^t$ folgt

$$\mathcal{P}^t = \mathcal{C}_2\mathcal{A}^t + \left\{ \mathcal{I} - \mathcal{C}_1\mathcal{Q}_1 - \mathcal{C}_2\mathcal{A}^t \right\} \mathcal{Z}_1 - \mathcal{C}_1\mathcal{A}\mathcal{Z}_2 \quad . \tag{6-20}$$

Führt man die Abkürzungen

$$\mathcal{T} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\,\mathcal{A}^t \qquad \mathcal{N} = \mathcal{A}^t\,\mathcal{T}^-\mathcal{A} \tag{6-21}$$

ein, so findet man nach ***PRINGLE/RAYNER*** 1971, S. 48

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{T}^- - \mathcal{T}^-\mathcal{A}\,\mathcal{N}^-\mathcal{A}^t\mathcal{T}^- \qquad & \mathcal{C}_3 &= \mathcal{N}^-\mathcal{A}^t\mathcal{T}^- \\ \mathcal{C}_2 &= \mathcal{T}^-\mathcal{A}\,\mathcal{N}^- & \mathcal{C}_4 &= \mathcal{N}^-\mathcal{N} - \mathcal{N}^- \end{aligned} \tag{6-22}$$

als Lösungen für (6-19), in die beliebige g-Inversen eingesetzt werden können. Als eine der möglichen Formen für den Projektor kann die Sonderlösung mit $\mathcal{Z}_i = \mathcal{O}$ gewählt werden.

$$\mathcal{P} = \mathcal{A}\,\mathcal{C}_2^t \; = \; \mathcal{A}\,(\mathcal{N}^-)^t\,\mathcal{A}^t\,(\mathcal{T}^-)^t \tag{6-23}$$

Da $\mathcal{T}$ und $\mathcal{N}$ nach (6-21) symmetrisch sind und da Produkte der Form $\mathcal{A}\mathcal{B}^-\mathcal{C}$ mit $S(\mathcal{A}^t) \subset S(\mathcal{B}^t)$ und $S(\mathcal{C}) \subset S(\mathcal{B})$ invariant in Bezug auf die Wahl für $\mathcal{B}^-$ sind, kann für (6-23) vereinfacht geschrieben werden

$$\mathcal{P} = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^t\left(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\,\mathcal{A}^t\right)^-\mathcal{A}\right)^-\mathcal{A}^t\left(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\,\mathcal{A}^t\right)^- \quad . \tag{6-24}$$

Der Vergleich mit (6-15) und (6-11) zeigt, daß für die Gewichtsmatrix

$$\mathcal{G} = \left(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\,\mathcal{A}^t\right)^- = \mathcal{T}^- \tag{6-25}$$

gesetzt werden kann. Mit Satz 5 ist leicht überprüft, daß (6-24) tatsächlich ein $\mathcal{T}^-$-orthogonaler Projektor ist, der alle Vektoren aus $S(\mathcal{T})$ in den

S($\mathcal{A}$) abbildet.

$$\hat{\ell} = \mathcal{P}_{T^-0}\,\ell \quad , \qquad -v = \left(\mathcal{I} - \mathcal{P}_{T^-0}\right)\ell \quad , \tag{6-26}$$

wobei

$$\hat{\ell}^t \mathcal{T}^- v = \ell^t \mathcal{P}^t \mathcal{T}^- (\mathcal{I} - \mathcal{P})\,\ell = 0$$

ist.

Der Projektor (6-24) ist eine Verallgemeinerung des in Satz 5 und 6 behandelten Projektors, da er nur über dem Vektorunterraum S($\mathcal{T}$) definiert ist und da wegen $r(\mathcal{T}^-) \leq m$ in (3-18) eine Seminorm minimiert wird. Wie die in (6-10) bis (6-12) angegebenen Möglichkeiten zur Darstellung von $\mathcal{T}$ zeigen, ist $\mathcal{P}_{T^-0}[\mathcal{A}]$ nicht eindeutig festgelegt. Außerdem ist wegen (3-11) und (6-5) $\mathcal{P}_{T^-0} + \mathcal{N}\mathcal{B}\mathcal{N}^t$ mit $\mathcal{B}$ beliebig ebenfalls ein Projektor, der alle Kriterien befriedigt.

Aus (6-26) folgt

$$\hat{\ell} = \mathcal{A}\,\hat{x} = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A}\right)^- \mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \ell \ . \tag{6-27}$$

Als Lösungsvektor im allgemeinen Gauß-Markoff-Modell ist offensichtlich jeder Vektor $\hat{x}$ der Lösungsmenge

$$L = \left\{\hat{x}, \hat{x} = \left(\mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A}\right)^- \mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \ell + \left[\mathcal{I} - \left(\mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A}\right)^- \mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A}\right] z\right\} \tag{6-28}$$

zulässig, wobei z frei gewählt werden kann.

Diese Mehrdeutigkeit für den Parametervektor legt wieder die Frage nahe, ob es außer den ausgeglichenen Beobachtungen weitere lineare Funktionen der Parameter gibt, die erwartungstreu und mit minimaler Varianz schätzbar sind.

Gemäß Definition 2 sei für $y = b^t x$ eine lineare Schätzfunktion $c^t \ell$ gesucht, die erwartungstreu ist, woraus für b wie früher folgt, daß $b \in S(\mathcal{A}^t)$ sein muß, und die ferner minimale Varianz aufweist, also $V(y) = \sigma_0^2\, c^t \mathcal{Q}_1 c$ minimiert. Den Ableitungen in Abschnitt 4 folgend führen diese beiden Forderungen auf das (4-9) entsprechende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & \mathcal{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ b \end{bmatrix} \quad , \tag{6-29}$$

das nun aber wie in (6-18) durch einen Rangdefekt in $\mathcal{Q}_1$ und $\mathcal{A}$ gekennzeichnet ist. Die in (6-19) und (6-22) angegebene g-Inverse kann auch hier zur Lösung benutzt werden:

$$c = \mathcal{C}_2 b + \left[\mathcal{I} - \mathcal{C}_1 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{C}_2 \mathcal{A}^t \right] z_1 - \mathcal{C}_1 \mathcal{A} z_2 \quad . \tag{6-30}$$

Dies führt auf die Schätzfunktion

$$\hat{y} = b^t \mathcal{C}_2^t \ell + z_1^t \left[\mathcal{I} - \mathcal{Q}_1 \mathcal{C}_1^t + \mathcal{A} \mathcal{C}_2^t \right] \ell - z_2^t \mathcal{A}^t \mathcal{C}_1^t \ell \quad ,$$

die sich vereinfacht, wenn man berücksichtigt, daß wegen $\ell \in S(\mathcal{T})$ die Darstellung $\ell = \mathcal{T} g$ folgt, die mit $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ nach (6-22) auf

$$\left[\mathcal{I} - \mathcal{Q}_1 \mathcal{C}_1^t + \mathcal{A} \mathcal{C}_2^t \right] \mathcal{T} = \mathcal{O} \qquad ; \qquad \mathcal{A}^t \mathcal{C}_1^t \mathcal{T} = \mathcal{O} \tag{6-31}$$

führt, so daß

$$\hat{y} = b^t \mathcal{C}_2^t \ell \tag{6-32}$$

übrig bleibt. Nach (6-22) ist $\mathcal{C}_2 = \mathcal{T}^- \mathcal{A} \left(\mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A} \right)^-$. Wird dies in (6-32) eingesetzt, so zeigt der Vergleich mit (6-28), daß $\hat{y} = b^t \hat{x}$ für jedes Element von L gilt. Darüber hinaus kann wegen $b^t = c^t \mathcal{A}$ mit (6-27) auch $\hat{y} = c^t \ell$ geschrieben werden.

Die Varianz von $\hat{y}$ lautet mit $\mathcal{N} = \mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} V(\hat{y}) &= \sigma_0^2 \, b^t \mathcal{C}_2^t \mathcal{Q}_1 \mathcal{C}_2 b \\ &= \sigma_0^2 \, b^t \mathcal{N}^- \mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{Q}_1 \mathcal{T}^- \mathcal{A} \mathcal{N}^- b \quad . \end{aligned} \tag{6-33}$$

Setzt man in (6-33) $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{T} - \mathcal{A}\mathcal{A}^t$ ein und berücksichtigt, daß $\mathcal{T}\mathcal{T}^- \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1$ und $\mathcal{T}\mathcal{T}^- \mathcal{A} = \mathcal{A}$ ist, so erhält man die einfachere Form

$$V(\hat{y}) = \sigma_0^2 \, b^t \left(\mathcal{N}^- - \mathcal{N}^- \mathcal{N} \right) b = -\sigma_0^2 \, b^t \mathcal{C}_4 \, b \tag{6-34}$$

mit $\mathcal{C}_4$ nach (6-22). Nun ist aber $b \in S\left(\mathcal{A}^t\right)$, so daß $b^t \mathcal{N}^- \mathcal{N} = b^t$, eingesetzt in (6-34), die endgültige Varianzschätzung liefert:

$$V(\hat{y}) = \sigma_0^2 \, b^t \left[\left(\mathcal{A}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A} \right)^- - \mathcal{J} \right] b \quad . \tag{6-35}$$

Der quadratische Schätzer für σ_0^2 gemäß Definition 3 lautet im allgemeinen Modell

$$s_0^2 = \frac{\mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v}}{f} = \frac{\ell^t \mathcal{T}^-(\mathcal{I} - \mathcal{P})\,\ell}{f} = \ell^t \mathcal{B}\,\ell \qquad (6\text{-}36)$$

mit $f = r(\mathcal{T}) - r(\mathcal{A})$.

Die Erwartungstreue dieses Schätzers kann auf dem üblichen Weg gezeigt werden:

$$E(\mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v}) = E(\mathrm{sp}\,[\mathcal{T}^- \mathcal{v}\mathcal{v}^t]) = \mathrm{sp}\,[\mathcal{T}^- \Sigma_v] \ .$$

Setzt man

$$\Sigma_v = \sigma_0^2\,(\mathcal{P} - \mathcal{I})\,\mathcal{Q}_1(\mathcal{P}^t - \mathcal{I})$$

ein und multipliziert aus, wobei die Beziehungen $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\,\mathcal{A}^t$ und $\mathrm{sp}[\mathcal{A}\mathcal{B}] = \mathrm{sp}[\mathcal{B}\mathcal{A}]$ benutzt werden, so erhält man

$$\begin{aligned} E(\mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v}) &= \sigma_0^2\,\mathrm{sp}[\mathcal{T}\mathcal{T}^- - \mathcal{N}\mathcal{N}^-] \\ &= \sigma_0^2\,[r(\mathcal{T}) - r(\mathcal{A})] = \sigma_0^2\, f \ . \end{aligned}$$

Ferner liest man wegen $\mathcal{A}^t\mathcal{B} = \mathcal{O}$ mit $\mathcal{B} = \mathcal{T}^-(\mathcal{I} - \mathcal{P})/f$ die Invarianz des Schätzers ab. Auch das Kriterium der minimalen Varianz entsprechend (4-19) erweist sich durch Einsetzen und Ausmultiplizieren als erfüllt. Wie man leicht zeigen kann, darf (6-36) noch etwas vereinfacht werden, da für beliebige g-Inverse von $\mathcal{Q}_1$ die Beziehung

$$\mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v} = \mathcal{v}^t \mathcal{Q}_1^- \mathcal{v} \qquad (6\text{-}37)$$

gilt.

Nach (6-13) ist $-\mathcal{v} \in S(\mathcal{M})$, und wegen $\mathcal{M} = \mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_1\mathcal{A})^\perp$ nach (6-9) kann $\mathcal{v} = \mathcal{M}a = \mathcal{Q}_1\bar{a}$ gesetzt werden. Führt man dies in (6-37) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v} &= \mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{Q}_1 \bar{a} \\ &= \mathcal{v}^t \mathcal{T}^- [\mathcal{T} - \mathcal{A}\mathcal{A}^t]\,\bar{a} \end{aligned}$$

$$\mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v} = \mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{T} \bar{a} - \mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{A}\mathcal{A}^t \bar{a} \ . \qquad (6\text{-}38)$$

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite ist null, was sich sogleich durch Einsetzen von $\mathcal{v}^t = \ell^t(\mathcal{P}^t - \mathcal{I})$ ergibt. Es bleibt damit

$$\mathcal{v}^t \mathcal{T}^- \mathcal{v} = \bar{a}^t \mathcal{Q}_1 \mathcal{T}^- \mathcal{T} \bar{a} = \bar{a}^t \mathcal{Q}_1 \bar{a}$$

und nach Rückwärtseinsetzen mit $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_1^- \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1$ folgt die behauptete Beziehung (6-37).

Im allgemeinen Gauß-Markoff-Modell spielt die Matrix $\mathcal{T}^-$, wobei $\mathcal{T}$ mit (6-10), (6-11) oder (6-12) gegeben ist, die Rolle der Gewichtsmatrix. Die Beschränkung der vorstehenden Ableitungen auf den Sonderfall $\mathcal{T} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{A}\mathcal{A}^t$ diente lediglich der Vereinfachung der Formeln.

Wenn im Modell $S(\mathcal{A}) \subset S(\mathcal{Q}_1)$ gilt, so kann in allen Formeln die Matrix $\mathcal{T}^-$ durch eine beliebige g-Inverse $\mathcal{Q}_1^-$ ersetzt werden.

Falls $\mathcal{A}$ vollen Rang hat, also ein $\mathcal{Q}$-singuläres Modell vorliegt, so ändert sich nichts an den Formeln, die für Schätzungen im allgemeinen Modell abgeleitet wurden.

7. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die mit Hilfe von Projektionsmatrizen mögliche direkte Lösung der Schätzaufgaben im allgemeinen Gauß-Markoff-Modell wurde unter den Kriterien Erwartungstreue und minimale Varianz entwickelt. Wegen der Äquivalenz dieser Kriterien mit der Methode der kleinsten Quadrate handelt es sich bei den Ergebnissen um Verallgemeinerungen der klassischen Formeln der Ausgleichungsrechnung.

Wie in **CASPARY** 1983 gezeigt wurde, ist es jedoch auch möglich, einen anderen Weg zu wählen, der auf ein reguläres Modell mit Bedingungsgleichungen führt, in dem die bekannten Schätzformeln ihre Gültigkeit behalten. Dazu ist lediglich eine Transformation des Modells nötig.

Der hier eingeschlagene Weg hat allerdings den Vorteil, daß die in (6-27), (6-32) und (6-36) gefundenen Schätzfunktionen in allen Modellen nach Definition 1 gültig sind.

LITERATUR

CASPARY, W.: ***Zur Lösung singulärer Ausgleichungsmodelle durch Bedingungsgleichungen.*** Allgemeine Vermessungsnachrichten 2 (1978), S. 81-87

CASPARY, W.: ***Zur Singularität von Varianz-Kovarianzmatrizen.*** Zeitschrift für Vermessungswesen, 1983, S. 209-215

KOCH, K.-R.: ***Parameterschätzung und Hypothesentest in linearen Modellen.*** Dümmlers Verlag, Bonn 1980

MITRA, S.K.: ***Unified Least Squares Approach to Linear Estimation in a General Gauss-Markov Model.*** SIAM J. Appl. Math. Vol. 25, 1973, S. 671-680

MITRA, S.K., RAO, C.R.: ***Some results in estimation and tests of linear hypotheses under the Gauss-Markoff Model.*** Sankhya, Ser. A 30, 1968, S. 281-290

MITRA, S.K., RAO, C.R.: ***Projections under Seminorms and Generalized Moore-Penrose Inverses.*** Linear Algebra and its Applications 9, 1974, S. 155-167

PRINGLE, R.M., RAYNER, A.A.: ***Generalized Inverse Matrices with Applications to Statistics.*** Griffin's Statistical Monographs & Courses, London 1971

RAO, C.R.: ***Representations of Best Linear Unbiased Estimators in the Gauss-Markoff Model with a Singular Dispersion Matrix.*** Journal of Multivariate Analysis 3, 1973, S. 276-292

RAO, C.R.: ***Projectors, Generalized Inverses and the BLUE's.*** Journal of the Royal Statistic Society, Serie B, Vol. 36, 1974, S. 442-446

ZYSKIND, G.: ***On Canonical Forms, Non-negative Covariance Matrices and Best and Simple Least Squares Linear Estimations in Linear Models.*** Annals of Mathematical Statistics 38, 1967, S. 1092-1109

ZYSKIND, G.: ***Error Structures, Projections and Conditional Inverses in Linear Model Theory.*** In J.N. Srivastava (Hrsg.): ***A Survey of Statistical Design and Linear Models,*** 1975, S. 647-663

ZYSKIND, G., MARTIN, F.: ***On Best Linear Estimation and a General Gauss-Markov Theorem in Linear Models with Arbitrary Non-negative Covariance Structure.*** SIAM Journal on Applied Mathem. 17, 1969, S. 1190-1202