

Heft 4

München, Juli 1979

Seminar über

Deformationsanalysen

gehalten an der
Hochschule der Bundeswehr München
mit Beiträgen von

E. Baumann

W. Caspary

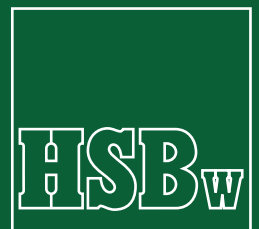
H. Dupraz / W. Niemeier / H. Pelzer

E. Kuntz / G. Schmitt

W. Welsch

SCHRIFTENREIHE

Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen
Hochschule der Bundeswehr München



Heft 4

München, Juli 1979

Seminar über

Deformationsanalysen

gehalten an der
Hochschule der Bundeswehr München
mit Beiträgen von

E. Baumann

W. Caspary

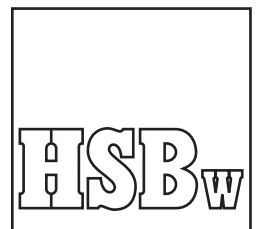
H. Dupraz / W. Niemeier / H. Pelzer

E. Kuntz / G. Schmitt

W. Welsch

SCHRIFTENREIHE

Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen
Hochschule der Bundeswehr München



Der Druck dieses Heftes wurde aus Haushaltsmitteln der Hochschule der Bundeswehr München gefördert.

Verantwortlich für die Herausgabe der Schriftenreihe: Prof. Dr. G. Neugebauer
Dipl.-Ing. J. Peipe

Bezugsnachweis:
Hochschule der Bundeswehr München
Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen
Studiengang Vermessungswesen
Werner-Heisenberg-Weg 39
8014 Neubiberg

V O R W O R T

Im letzten Jahrzehnt haben sich die Methoden der Analysen von Deformationen geometrisch definierter Objekte geändert.

Das grundsätzliche geodätische Verfahren, Veränderungen wiederholt eingemessener Punkte, die das zu untersuchende Objekt diskretisieren und in ihrer Gesamtheit ein geodätisches Netz bilden, der Deformationsanalyse zugrunde zu legen, ist das gleiche geblieben. Geändert haben sich dagegen die Mittel, mit denen die die Punkte verbindenden Elemente, insbesondere die Entfernungen innerhalb des Netzes beobachtet werden, und die Hilfsmittel, mit denen die ausgeführten Beobachtungen ausgewertet und ausgeglichen werden. Die Möglichkeiten elektronischer Messungen und Berechnungen haben einer umfassenderen und strengen Lösung der anstehenden Probleme den Weg geebnet und dem allgemeinen Trend zu digitaler und numerischer Behandlung neue Möglichkeiten eröffnet.

Eine ausgleichungstechnisch strenge Verarbeitung aller Beobachtungen und Informationen ist Voraussetzung für die statistisch abgesicherte Beurteilung und Interpretation der Ergebnisse, die gerade bei Deformationsuntersuchungen häufig von großer Bedeutung sind.

Dies erkennend und die modernen Möglichkeiten nutzend, wurde in den vergangenen Jahren eine Vielzahl von Verfahren entwickelt, die das Problem der statistischen Deformationsanalyse lösen.

Zum gegenwärtigen Stand ist es von Vorteil, die verschiedenen Methoden an einem Objekt mit denselben Meßdaten zu erproben und die erzielten Ergebnisse zu vergleichen. Eine Gelegenheit hierzu bot das Seminar, zu dem die Lehrstühle für Ingenieurgeodäsie und Vermessungskunde der Hochschule der Bundeswehr München eingeladen haben und über das in dem vorliegenden Heft berichtet wird.

Prof. Dr.-Ing. W. Caspary
Prof. Dr.-Ing. W. Welsch

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
Beschreibung der Testbeispiele	3
Welsch, W., München "Entwicklung der Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe geodätischer Netze"	5
Baumann, E., Stuttgart "Deformationsanalyse nach dem Nabla-Verfahren"	16
Kuntz, E., Schmitt, G., Karlsruhe "Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe relativer Fehlerellipsen"	26
Dupraz, H., Niemeier, W., Pelzer, H., Hannover "Analyse von Deformationsmessungen durch Klaffungszerlegung"	45
Caspary, W., München "Deformationsanalysen durch Untersuchung von Teilnetzen"	67
Anhang 1	84
Anhang 2	95

BESCHREIBUNG DER TESTBEISPIELE

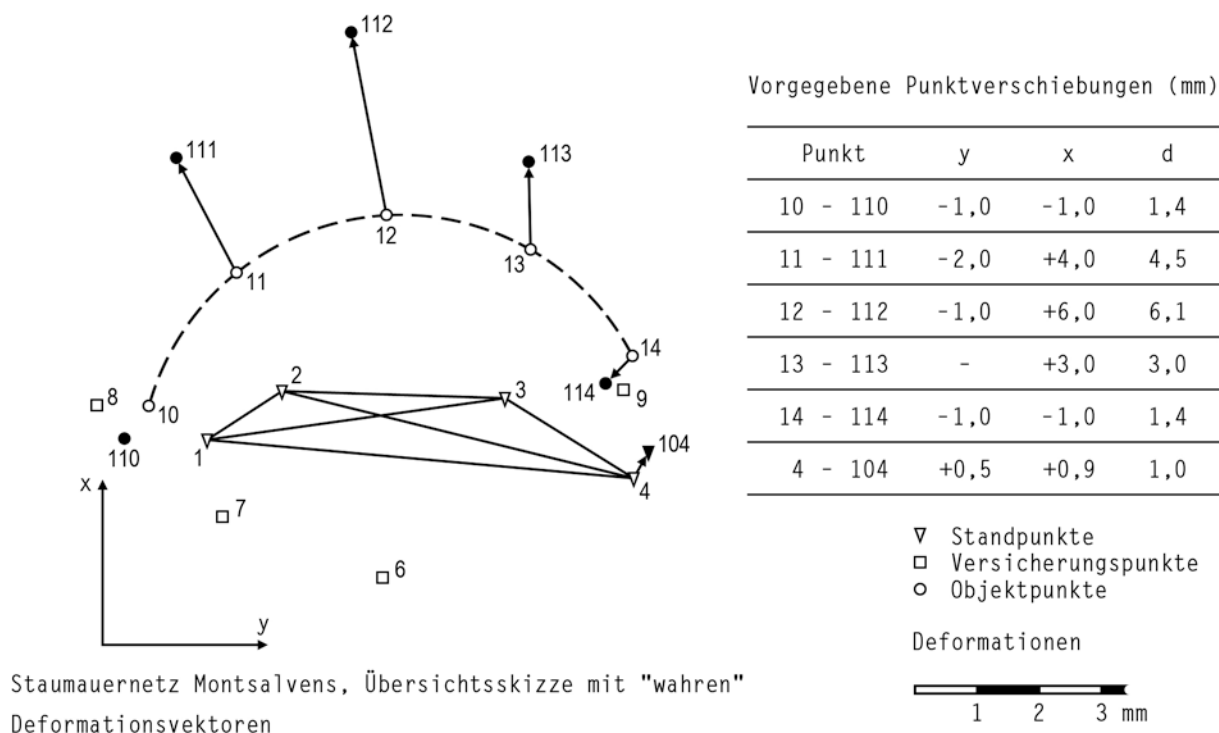
a) Simuliertes Staumauerüberwachungsnetz

Das erste Testbeispiel entstand mit geringfügigen Abänderungen nach dem Vorbild der Beobachtungsanlage, wie sie 1932 an der Staumauer Montsalvens* eingerichtet wurde und dient seit drei Jahren als Übungsaufgabe, die von den Studierenden des Studiengangs Vermessungswesen an der HSBwM im Rahmen der Vorlesung Ingenieurvermessung zu bearbeiten ist. Die Beobachtungsdaten und auch die Deformationen werden durch Programme auf einer EDV-Anlage erzeugt.

Der gewählte mittlere Richtungsfehler entspricht dem tatsächlich erzielten Wert, der von ROŠ mit 0,55" bis 0,70" für das Mittel aus zwei vollständigen Sätzen angegeben wird. Für die Streckenmessungen wurde eine Standardabweichung eingeführt, die der Richtungsgenauigkeit angepaßt ist. Sämtliche "Beobachtungsfehler" sind normalverteilt. Zwischen zwei Beobachtungsepochen wird jeweils ein Standpunkt geringfügig (≤ 2 mm) verändert. Außerdem werden die Objektpunkte auf der Staumauerkrone um Beträge verschoben, die den tatsächlichen Deformationen der Staumauer Montsalvens zwischen 1921 und 1937 entsprechen.

Den Vortragenden standen die Rechnerausdrucke (Anhang 1) zur Verfügung; nicht jedoch weitere Informationen über die "Meßgenauigkeit" und auch nicht die wahren Werte der Deformationen, die in der folgenden Übersichtsskizze für Vergleichszwecke angegeben sind.

Da bei diesem Beispiel die Sollwerte bekannt sind, ist es besonders gut geeignet, die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Verfahren für Deformationsanalysen zu testen und zu vergleichen.



StaumauerNetz Montsalvens, Übersichtsskizze mit "wahren" Deformationsvektoren

* M.R. ROŠ

Messungen und Beobachtungen an der Staumauer Montsalvens, Ct. de Fribourg,

Schweizerische Talsperrenkommission:

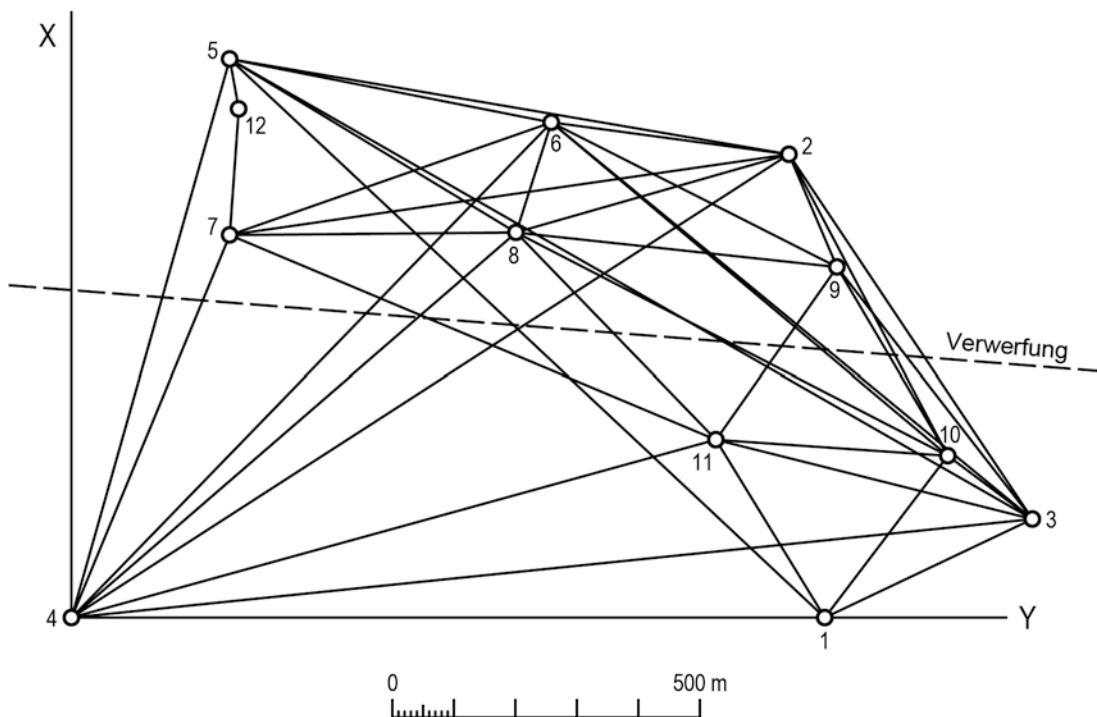
Messungen, Beobachtungen und Versuche an Schweizerischen Talsperren 1919 - 1945; Bern 1946

b) Huaytapallana Network, Peru

Der zweite Datensatz (Anhang 2) enthält die Richtungs- bzw. Winkel- und Streckenbeobachtungen für ein zweidimensionales 11-Punkte Präzisionsnetz aus drei Beobachtungsperioden 1975-1977.

In den Jahren 1975 und 1976 wurden Winkel, 1977 Richtungen jeweils in 4 Sätzen beobachtet (Wild T2, Altgrad). Die mittleren Fehler der Richtungs-/Winkelbeobachtungen und der Streckenbeobachtungen, sowie das "beste" Gewichtsverhältnis der beiden Beobachtungsgruppen wird wohl am besten durch Einzelausgleichungen zu ermitteln sein. Als Basis für den Streckenfehleransatz kann der Wert $m_s = \pm(4 \text{ mm} + 10 \text{ ppm})$ dienen, doch dürfte die tatsächlich erreichte Genauigkeit (HP 3800 A, Fuß) wesentlich besser sein. Eine Additionskonstante ist an den Streckenbeobachtungen noch nicht angebracht: sie ist angeblich Null (sagt die Firma). Einige mit "1x" gekennzeichnete Strecken sind nur einfach, alle übrigen hin und zurück beobachtet. In der Epoche 1977 wurde zur Verbesserung der Geometrie noch Punkt 12 zusätzlich eingeschaltet. Keiner der Punkte kann als Festpunkt angesehen werden.

Bei diesem Beispiel, das "echt" ist, weiß tatsächlich niemand, ob Deformationen vorliegen oder nicht. Es erscheint deshalb besonders geeignet, verschiedene Analyseverfahren zu testen und zu vergleichen.



ENTWICKLUNG DER ANALYSE VON DEFORMATIONSMESSUNGEN MIT HILFE GEODÄTISCHER NETZE

W. Welsch, München

Zusammenfassung: Es wird der Versuch unternommen, die richtungsweisende Literatur über die Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe geodätischer Netze zu ordnen und verfahrenstechnisch zu systematisieren.

Summary: It is endeavoured to disentangle and to systematize directive literature and techniques on the analysis of deformation measurements using geodetic networks.

1. Geodätische Deformationsanalyse

Die Bestimmung von Änderungen der geometrischen Eigenschaften eines Objektes ist die allgemeine Aufgabenstellung der Deformationsermittlung. Abb. 1 gibt hierüber einen Überblick.

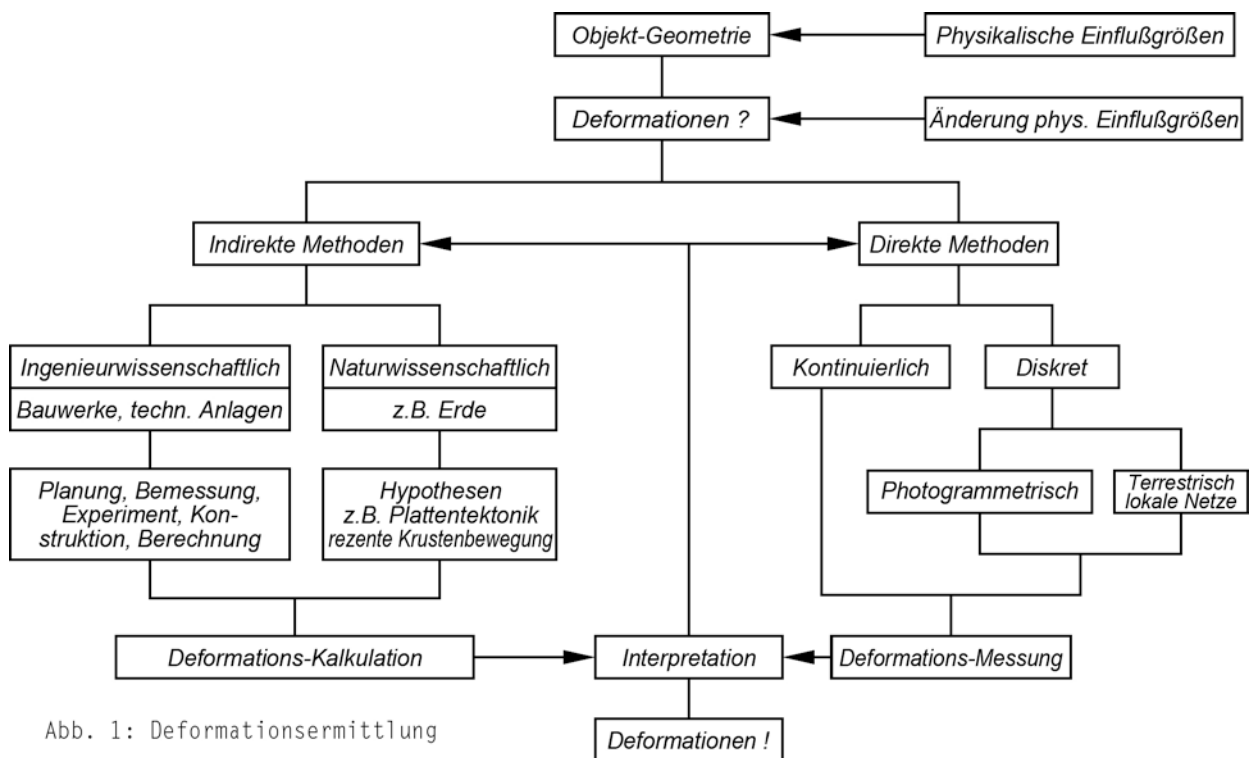


Abb. 1: Deformationsermittlung

Deformationen treten durch Änderung der physikalischen Einflußgrößen auf ein Objekt auf. Wichtige Einflußgrößen sind z.B. Temperatur- und Belastungsverhältnisse. Diese werden bei Ingenieurprojekten konstruktiv oder planerisch bemessen, die Auswirkung ihrer Änderungen rechnerisch oder experimentell vorherbestimmt. Im naturwissenschaftlichen Bereich, z.B. der Geotektonik, widerstrebt das Objekt "Erde" vielfach Modellierungsversuchen. Hier werden Konstruktion und Berechnung, Bemessung und Experiment häufig durch Hypothesen ersetzt. In beiden Bereichen, sowohl dem ingenieurwissenschaftlichen als auch dem naturwissenschaftlichen, wird die Bestätigung aller vorausberechneten oder hypothetischen Deformationen (indirekte Methode) durch geodätische Methoden als schlüssiger Beweis anerkannt. Auf dieser Tatsache beruht die fundamentale Bedeutung geodätischer

Deformationsmessungen.

Geodätische Meßverfahren erfassen nicht Änderungen von Einflußgrößen und mit ihrer Hilfe mittelbar Deformationen, sie messen vielmehr unmittelbar die Deformationen selbst. Man könnte sie deshalb als direkte Methoden bezeichnen. Durch Messungen mit Hilfe fest installierter Meßeinrichtungen können auftretende Deformationen kontinuierlich, mit Hilfe terrestrischer und photogrammetrischer Methoden (meist zeitlich) diskret überwacht werden. Die terrestrische Methode kann allgemein und konkret als die Methode der Deformationsmessung mit Hilfe lokaler geodätischer Netze angesprochen werden.

Den Ablauf einer mit diesem Verfahren durchgeführten Deformationsmessung zeigt das folgende Flußdiagramm (Pelzer u.a., 1976).

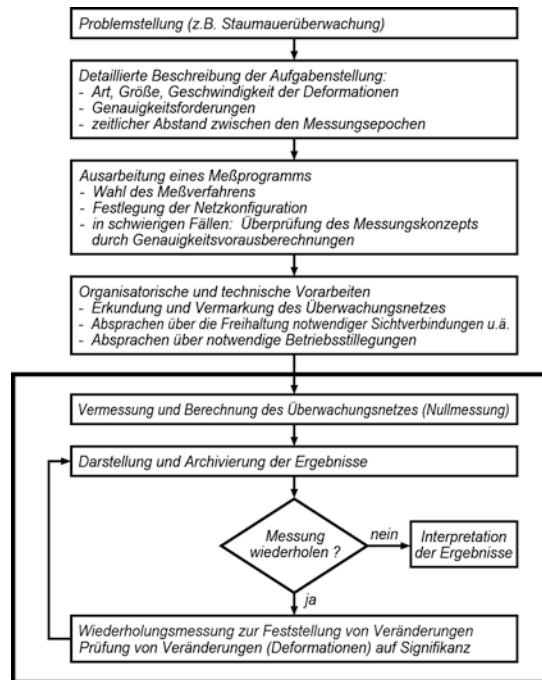


Abb. 2: Flußdiagramm zum Ablauf von Deformationsmessungen mit Hilfe lokaler geodätischer Netze (Pelzer u.a., 1976)

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit dem besonders gekennzeichneten Bereich der Abb. 2 als dem der Analyse der Deformationsmessungen.

2. Entwicklung, gegenwärtiger Stand und zukünftiger Trend

Die grundlegende Idee, Deformationen mit Hilfe terrestrischer Methoden zu ermitteln, ist in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts im Zusammenhang mit dem Bau von Staumauern geboren worden. Staumauern waren Objekte, für die man keine Vergleichswerte hatte. Um Erfahrungen zu gewinnen, beobachtete man sie besonders sorgfältig. Über die ersten Arbeiten berichtet Lang (1929).

Lokale Netze für Deformationsmessungen zeigten schon damals den prinzipiellen Aufbau, der auch heute noch beachtet wird: Die Aufgliederung des Netzes in Objektpunkte, Sicherungs- und Orien-

tierungspunkte.

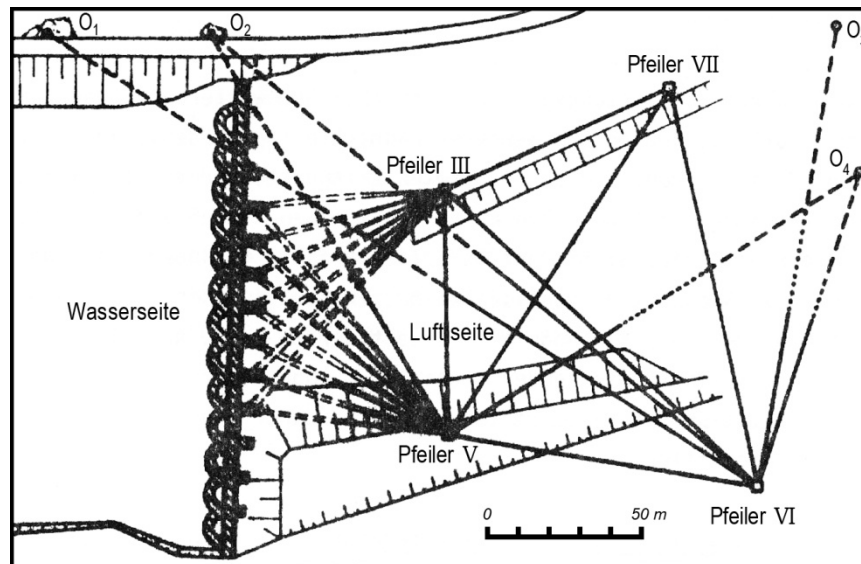


Abb. 3: Grundsätzlicher Aufbau eines Überwachungsnetzes (Pelzer u.a., 1976)

Bei der Deformationsanalyse wurde von Anfang an eine grundsätzliche Vorgehensweise eingehalten: In einem ersten Schritt wurde die Stabilität der Beobachtungspunkte überprüft und festgestellt, in einem zweiten die Verschiebung der Objektpunkte ermittelt.

Von den ersten Anfängen bis gegen Mitte der sechziger Jahre war man wohl hauptsächlich aus rechen-technischen Gründen auf mehr oder weniger strenge Verfahren zur Berechnung, auf analytisch-geometrische Verfahren zur Analyse und auf Plausibilität und einfache Tests zur Beurteilung von Stabilität und Deformation angewiesen. Insbesondere die Untersuchungen über die Stabilität von Punkten nahmen in der Literatur einen großen Raum ein. Über die Genauigkeit der Ergebnisse machte man kaum Aussagen. Diese Zeit könnte man als Periode der deskriptiven Deformationsanalyse ansprechen.

Durch die Entwicklung der Rechentechnik im Bereich von Hardware (Speicherkapazität) und Software (problemorientierte Programmiersprachen) hat sich die Methodik der Deformationsanalyse seit Mitte der sechziger Jahre bedeutend geändert: Die einfachen Berechnungen wurden durch strenge Ausgleichungen, Plausibilitätserklärungen durch statistische Tests ersetzt. Nach einer Übergangsphase bis zum Beginn der siebziger Jahre, in der man zu strengen Ausgleichungen und statistischen Tests überging, erlaubt es der heutige Stand der Analysetechnik, nach strenger Ausgleichung der Vergleichsmessungen die Stabilität von Punkten statistisch zu testen, veränderte Punkte auszuscheiden und über die Genauigkeit und Zuverlässigkeit aller Ergebnisse statistisch gesicherte Angaben zu machen. Vom Standpunkt der Analyse her nimmt die Bedeutung einer Unterscheidung verschiedener Punktarten in einem Überwachungsnetz ab: Man ist in der Lage, selbst im Bereich der Beobachtungsgenauigkeit Deformationen auch dann als signifikant nachzuweisen, wenn alle Punkte als instabil angesehen werden müssen. Wenn auch die Gesichtspunkte des Ausgleichungsansatzes ebenso verschieden sind wie die Strategien der Lokalisierung von Deformationen, so führen doch die verschiedenen subjektiven Anschauungen desselben Problems bei strenger Lösung zu identischen Ergebnissen. Diese

gegenwärtige, noch nicht einmal zehn Jahre alte Epoche könnte man die Periode der statistischen Deformationsanalyse nennen.

Die gegenwärtigen Arbeitsrichtungen tendieren neben dem weiteren Ausbau der bisher entwickelten Theorien zur simultanen Behandlung mehrerer Beobachtungsperioden. Beobachtungen werden als diskrete Stichproben angesehen, die zu bestimmten Zeitpunkten oder unter dem Eindruck der Änderung gewisser physikalischer Einflußgrößen einem dynamischen Prozeß entnommen werden. Auf dieser Stufe der Entwicklung können vielleicht kontinuierlich erfaßte Veränderungen und durch das hier behandelte Verfahren der Beobachtung von lokalen Netzen nachgewiesene Deformationen am günstigsten gekoppelt und zwangsfrei in einem Modell behandelt werden (vgl. Abb. 1). Diese Vorgehensweise führt fast zwangsläufig zu einer umfassenden statistisch abgesicherten, beschriebenen und prognostizierenden Interpretation des beobachteten Prozesses durch den Geodäten als interdisziplinär mitarbeitendem Wissenschaftler.

3. Zeitliche Zuordnung richtungsweisender Literatur

Abb. 4 gibt einen Überblick über die Entwicklung des Verfahrens, begründet auf richtungsweisende Veröffentlichungen.

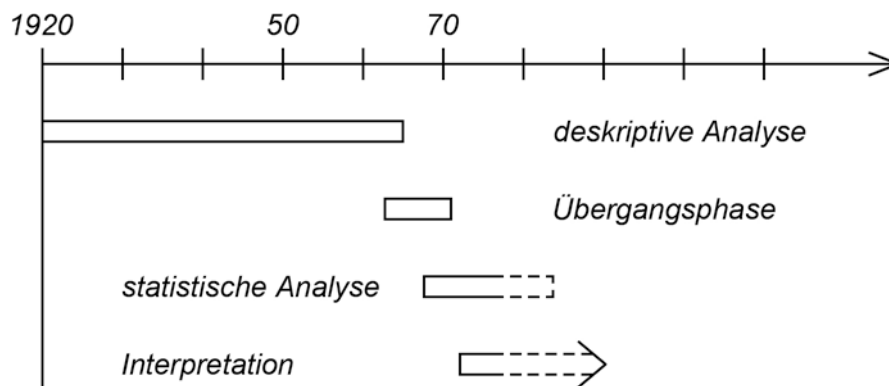


Abb. 4: Entwicklung des Verfahrens der Deformationsanalyse mit Hilfe lokaler geodätischer Netze

Periode der deskriptiven Analyse: Lang (1929), Schweizerische Talsperrenkommission (1946), Ulbrich (1956), Kobold (1958), Ney (1964), Lazzarini (1966), VI. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision (1970), Kobold (1977)

Periode der statistischen Analyse (einschließlich Übergangsphase): Statistik und univariate statistische Modelle: Baarda-Alberda (1962), Wolf (1963), Richardus (1964), Wolf (1964), Lazzarini (1966), Stanek (1966), Baarda (1967), Baarda (1968), Wolfrum (1970), Aeschlimann (1971), Pelzer (1971), Meier (1971), Baumann (1972), Pelzer (1972), Milev (1973), Pelzer (1974), Detreköi (1975 a,b), Koch (1975), Kraus (1975), Milev (1975), Mierlo (1975 a,b), Niemeier (1975), Pelzer (1975), Reinhardt (1975), Baarda (1976), Förstner (1976), Niemeier (1976), Pelzer (1976 a), Welsch (1976),

Heck-Kuntz-Hirmer (1977), Mierlo (1977), Buck (1978).

Multivariate und dynamische Modelle: Dorrer (1967), Ghitau (1970), Meier (1971 a,b), Ghitau (1973), Holdahl-Morrison (1974), Vaniček-Christodoulidis (1974), Holdahl (1975), Hoyer (1975), Ghitau (1976), Koch (1976 a,b), Kumar (1976), Pelzer (1976 b), Detreköi (1977 a,b), Hein (1977), Pelzer (1977), Hein (1978), Koch (1978), Wolf (1978).

Multivariate und dynamische Modelle gehören häufig bereits zur Periode der Interpretation: Wolf (1963), Czaja (1971), Meier (1971 a,b), Ghitau (1973), Janusz (1973), Milev (1973), Platek (1974), Baarda (1975), Flotron (1976), Koch (1976 a,b), Pelzer (1976 b), Ney (1977), Niemeier (1977), Pelzer (1977).

4. Literatur

- Aeschlimann, H. (1971), Zur Genauigkeit geodätischer Verschiebungsmessungen, Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich Nr. 13, Zürich (1971)
- Baarda, W. (1967), Statistical Concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, Nr. 4, Delft 1967
- Baarda, W. (1968), A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, Nr. 5, Delft 1968
- Baarda, W. (1975), Difficulties in Establishing a Model for Testing Crustal Movements, Progress in Geodynamics, Amsterdam 1975
- Baarda, W. (1976), Reliability and Precision of Networks, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Baarda, W. Alberda, J.E. (1962), The Connection of Geodetic Adjustment Procedures with Methods of Mathematical Statistics, Bulletin Géodésique (1962), p. 325
- Baumann, E. (1972), Die Anwendung statistischer Methoden bei der Untersuchung geodätischer Netze, DGK C 175, München 1972
- Buck, U. (1978), Numerische Auswertung und statistische Analyse von ingenieurphotogrammetrischen Deformationsmessungen, Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie der TU Hannover, Nr. 82, Hannover 1978
- Czaja, J. (1971), Die Approximation des Vektorfeldes von Verlagerungen und dessen geometrische und physikalische Interpretation (Übersetzung aus dem Polnischen), Geodezja i Kartografia 20 (1971), S. 295-317
- Detreköi, A. (1975 a), Anwendung der mathematisch-statistischen Tests bei der Auswertung der geodätischen Deformationsmessungen, Internationales Symposium über Deformationsmessungen, Krakau 1975
- Detreköi, A. (1975 b), Über die mathematischen Modelle der geodätischen Deformationsmessungen, Internationales Symposium über Deformationsmessungen, Krakau 1975
- Detreköi, A. (1977 a), Über das stochastische Modell ingenieurgeodätischer Deformationsmessungen, XV. FIG-Kongreß, Stockholm 1977
- Detreköi, A. (1977 b), Netzausgleichung bei ingenieurgeodätischen Deformationsmessungen, Periodica Polytechnica - Civil Engineering, Vol. 21, Nr. 1-2, Budapest 1977

- Dorrer, E. (1967), Die Bestimmung der Oberflächengeschwindigkeit ausgedehnter Gletschergebiete, Zeitschrift für Vermessungswesen 92 (1967), S. 183-189
- Flotron, A. (1976), Fels- und Eissturzprognosen aus Deformationsmessungen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Förstner, W. (1976), Die Suche grober Fehler in photogrammetrischen Lageblöcken, Dissertation, Stuttgart 1976
- Ghitau, D. (1970), Modellbildung und Rechenpraxis bei der nivellitischen Bestimmung säkularer Landhebungen, Dissertation, Bonn 1970
- Ghitau, D. (1973), Über ein Modell zur Bestimmung von zeitlichen Änderungen in dreidimensionalen geodätischen Netzen begrenzter Ausdehnung, Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Bonn 1973
- Ghitau, D. (1976), Über eine gemeinsame Auswertung von Pegel- und Nivellementsdaten zur Bestimmung säkularer Erdkrusten-Vertikalbewegungen, Mitteilungen des Instituts für Theoretische Geodäsie, Nr. 43, Bonn 1976
- Heck, B., Kuntz, E., Meier-Hirmer, B. (1977) Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen, Allgemeine Vermessungsnachrichten 84 (1977) 3, S. 78-87
- Hein, G.W. (1977), Multivariate Analysis of Releveling Data, International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron 1977
- Hein, G.W. (1978), Multivariate Analyse der Nivellementsdaten im Oberrheingraben und Rheinischen Schild, Zeitschrift für Vermessungswesen 103 (1978), S. 430-436
- Holdahl, S.R. (1975), Models and Strategies for Computing Vertical Crustal Movements in the United States, IUGG-Generalversammlung, Grenoble 1975
- Holdahl, S.R. Regional Investigations of Vertical Crustal Movements in the United States
Morrison, N.L. (1974), Using Precise Relevelings and Mareograph Data, Tectonophysics 23 (1974), pp. 373-390
- Hoyer, R. (1975), Beitrag zur Auswertung von Wiederholungsnivellements, Dissertation, Dresden 1975
- VI. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision (1970), Graz 1970
Mehrere Vorträge und presented papers
- Janusz, W. (1973), Probleme der geometrischen Interpretation für bestimmte Verschiebungen (Übersetzung aus dem Polnischen), Przegl. geod., Warszawa 45 (1973), S. 281-286

- Kobold, F. (1958), Geodätische Methoden zur Bestimmung von Geländebewegungen und von Deformationen an Bauwerken, Schweizerische Bauzeitung 76 (1958) 12 und 13
- Kobold, F. (1977), Über die Berücksichtigung von Festpunktverschiebungen bei Deformationsmessungen, Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Nr. 23, S. 299-306, Aachen 1977
- Koch, K.-R. (1975), Ein allgemeiner Hypothesentest für Ausgleichungsergebnisse, Allgemeine Vermessungsnachrichten 82 (1975) 10, S. 339-345
- Koch, K.-R. (1976 a), Ein allgemeiner Hypothesentest für die Ausgleichungsergebnisse von Wiederholungsmessungen, Allgemeine Vermessungsnachrichten 83 (1976) 7, S. 231-236
- Koch, K.-R. (1976 b), Hypothesenprüfungen für multivariate Ausgleichungen, Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Bonn 1976
- Koch, K.-R. (1978), Hypothesentests bei singulären Ausgleichungsproblemen, Zeitschrift für Vermessungswesen 103 (1978) 1, S. 1-10
- Kraus, K. (1975), Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler, Allgemeine Vermessungsnachrichten 82 (1975) 1, S. 23-34
- Kumar, M. (1976), Monitoring of Crustal Movements in the San Andreas Fault Zone by a Satellite-Borne Ranging System, The Ohio State University, Research Foundation, Columbus, Ohio
- Lang, W. (1929), Deformationsmessungen an Staumauern nach den Methoden der Geodäsie, Landestopographie, Bern 1929
- Lazzarini, T. (1966), Die gegenwärtigen polnischen Methoden und Erfahrungen bei geodätischen Deformationsmessungen an Bauwerken, DGK B 123, München 1966
- Meier, S. (1971 a), Schätzung des Punktabstandes für geodätische Verschiebungsmessungen, Vermessungstechnik 19 (1971), S. 466-468
- Meier S. (1971 b), Ausgleichung horizontaler Punktverschiebungen nach vermittelnden Beobachtungen und Beobachtungsdifferenzen, Geodätische und Geophysikalische Veröffentlichungen, Reihe III, Heft 25, Berlin 1971
- Mierlo, J.v. (1975 a), Testing and Adjusting 2- and 3-Dimensional Networks for Detecting Deformations, Internationales Symposium über Deformationsmessungen, Krakau 1975

- Mierlo, J.v. (1975 b), Statistical Analysis of Geodetic Networks Designed for the Detection of Crustal Movements, Progress in Geodynamics, Amsterdam 1975
- Mierlo, J.v. (1977), Systematic Investigation on the Stability of Control Points, XV. FIG-Kongreß, Stockholm 1977
- Milev, G. (1973), Ausgleichung, Analyse und Interpretation von Deformationsmessungen, DGK C 192, München 1973
- Milev, G.
Wonder, D. (1975), Neue Methoden zur Stabilitätsbestimmung der Stützpunkte für Deformationsmessungen, Internationales Symposium über Deformationsmessungen, Krakau 1975
- Ney, B. (1964), Klassifizierung und Überblick der Verfahren zur Beurteilung der Punktstabilität bei der periodischen trigonometrischen Bestimmung von Horizontalverschiebungen, polnisch, Przeglad geodezyjny (1964) 4, S. 128-131
- Ney, B. (1977), Determination of the Deformations of Horizontal Geodetic Networks by Approximation, International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron 1977
- Niemeier, W. (1975), Zur Generalisierung gemessener Deformationen mit statistischen Methoden, Internationales Symposium über Deformationsmessungen, Krakau 1975
- Niemeier, W. (1976), Grundprinzip und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Niemeier, W. (1977), Ansätze zur Interpretation der Ergebnisse geodätischer Deformationsmessungen, Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, Nr. 76, Hannover 1977
- Pelzer, H. (1971), Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen, DGK C 164, München 1971
- Pelzer, H. (1972), Nachweis von Staumauerdeformationen unter Anwendung statistischer Methoden, Referate der Arbeitsgruppe B, 57. Deutscher Geodätentag, Braunschweig 1972
- Pelzer, H. (1974), Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen, XIV. FIG-Kongreß, Washington 1974
- Pelzer, H. (1975), Zur Beurteilung der Güte geodätischer Überwachungsnetze, Internationales Symposium über Deformationsmessungen, Krakau 1975

- Pelzer, H. (1976 a), Über die statistischen Eigenschaften von Deformationsmessungen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Pelzer, H. (1976 b), Zur Analyse von permanent registrierten Deformationen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Pelzer, H. (1977), Ein Modell zur meßtechnischen und mathematischen Erfassung kontinuierlicher Deformationsvorgänge, XV. FIG-Kongreß, Stockholm 1977
- Pelzer, H. u.a. (1976), Deformationsmessungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 19 (1976), S. 31-62
- Platek, A. (1974), On the Application of Geodetic Methods in the Measurements of Spatial Deformations of Structures, XIV. FIG-Kongreß, Washington 1974
- Reinhart, E. (1975), Exakte Abschätzung von Maximalfehlern aus vorgegebenen Toleranzen der Beobachtungsgrößen, DGK C 211, München 1975
- Richardus, P. (1964), Triangulation oder Polygonierung im Lichte der mathematischen Statistik, Zeitschrift für Vermessungswesen 89 (1964) 11, S. 378-387, 89 (1964) 12, S. 461-465
- Schweizerische Talsperrenkommission (1946), Beobachtungen und Versuche an Talsperren 1919-1946, Bern 1946
- Stanek, V.B. (1966), Verfahren zur Bestimmung der Verschiebung von Beobachtungspunkten bei Deformationsmessungen, Vermessungstechnik 14 (1966) 7, S. 266-271
- Ulbrich, K. (1956), Geodätische Deformationsmessungen an Österreichischen Staumauern und Großbauwerken, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 17, Wien 1956
- Vaniček, P. (1974), A Method for Evaluation of Vertical Crustal Movements from Scattered Geodetic Relevelings, Can. J. Earth Sciences 11 (1974), pp. 605-610
- Christodoulidis, D.
- Welsch, W. (1976), Signifikanzen und Sensitivitäten in technischen Netzen, DGK B 216, S. 153-163, München 1976
- Wolf, H. (1964), Zur Anwendung von Verfahren der mathematischen Statistik in der Vermessungstechnik, Zeitschrift für Vermessungswesen 89 (1964) 11, S. 376-378
- Wolf, H. (1963), Zur Berechnung rezenter Höhenänderungen im Rahmen des Europäischen Nivellementnetzes, DGK B 104, München 1963

- Wolf, H. (1978), Hypothesentests bei gruppenweiser Ausgleichung, eine Erweiterung der linearen Test-Theorie, Zeitschrift für Vermessungswesen 103 (1978) 10, S. 461-469
- Wolfrum, O. (1970), Deformationsmessungen an einem Wohngebäude, Allgemeine Vermessungsnachrichten 77 (1970) 9, S. 370-373

Danksagung:

Herrn Dr.-Ing. W. Niemeier sei an dieser Stelle für die kritische Durchsicht und Ergänzung der Literaturangaben gedankt.

DEFORMATIONSANALYSE NACH DEM NABLA-VERFAHREN

E. Baumann, Stuttgart

1. Allgemeines zum Verfahren

Die Methode, die vor fast 10 Jahren entstand, beruht auf einem statistischen Verfahren zur Aufdeckung grober Meßfehler, das Baarda angegeben hat; sie ist ausführlich in Heft 175 Reihe C der DGK dargestellt. Der Grundgedanke ist in Kürze folgender:

Mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung läßt sich bekanntlich die Wirkung fehlerhafter Messungen auf abgeleitete Größen angeben. Benutzen wir statt des Meßfehlers den Grenzwert für eine grob falsche Messung, so können wir die abgeleitete Größe als signifikant verändert betrachten. Zunächst berechnen wir das Maß für die Verwerfung jeder einzelnen Messung und daraus deren Auswirkung auf jede einzelne Koordinate. Dies ergibt bei n Beobachtungen ebensoviele Koordinatenwerte, aus denen wir den größten, also den ungünstigsten Fall, herausziehen, um ihn als Grenzwert für eine signifikante Veränderung zu verwenden.

Auf den ersten Blick erscheint diese Berechnung aufwendig, sie läßt sich jedoch sehr übersichtlich programmieren.

Nehmen wir zunächst an, den Grenzwert für eine grob falsche Beobachtung zu kennen, so ergibt sich aus:

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l,$$

wenn wir die Koordinate als partielle Änderung im Sinne der Differentialrechnung betrachten:

$$\Delta x = Q_{xx} A^T P \Delta l.$$

Wie unten begründet, ist dabei vorausgesetzt, daß die n Beobachtungen durch einen einzigen Wert grob verfälscht sind, alle übrigen besitzen den Wert 0 :

$$\nabla l_i = (0, 0, 0, \dots, \nabla l_i, \dots, 0).$$

Diese Grenzwerte für unabhängige Beobachtungen berechnen sich aus:

$$\nabla l_i = c/p_i \sqrt{q_{v_i v_i}}.$$

Die statistische Größe c wird unten erläutert. Die Gewichtsreziproken der Verbesserungen berechnen sich bekanntlich aus:

$$Q_{vv} = Q_{ll} - Q_{ll}^{-1}.$$

mit den Gewichtsreziproken der ausgeglichenen Beobachtungen $Q_{ll}^{-1} = A Q_{xx} A^T$ und denen der ursprüng-

lichen Beobachtungen $Q_{1j} = p^{-1} = 1/p_j$ bei Unabhängigkeit.

Im allgemeinen ist $Q_{\bar{1}\bar{j}} < Q_{1j}$ und je größer die Redundanz und je stabiler das System, desto kleiner wird $Q_{\bar{1}\bar{j}}$ im Verhältnis zu Q_{1j} . Die Beziehung $(Q_{1j} - Q_{\bar{1}\bar{j}})/Q_{1j}$ wird auch als "Gewinn" der Beobachtungen durch die Ausgleichung bezeichnet. Ist nur eine geringe Überbestimmung vorhanden, geht der Gewinn gegen Null und damit der Grenzwert für die Beobachtungen gegen unendlich. Alle daraus abgeleiteten Grenzwerte für Koordinaten werden damit ebenfalls groß! Geometrisch gesehen bedeutet dies, daß eine schwach bestimmte Koordinate einen großen Grenzwert für eine eventuelle Verschiebung nach sich zieht, oder daß eine schlecht kontrollierte Messung das System bezüglich eventueller Verschiebungen unsicher macht, weil es große Koordinaten-Grenzwerte zur Folge hat.

Die statistische Größe c berechnet sich aus:

$$c = \sigma \sqrt{\lambda_0} ,$$

mit dem a priori Varianzfaktor σ . Dieser soll den "wahren Wert" repräsentieren, was den Vorteil hat, vom gerade zufälligen Gewichtseinheitsfehler unabhängig zu sein. Andererseits läßt er einen gewissen Spielraum, der mißbraucht werden könnte. Er muß also sorgfältig festgelegt werden, was nur auf Grund einer reichen Erfahrung und Kenntnis der Meßbedingungen und der eingesetzten Instrumente möglich ist. Diese Voraussetzungen fehlen bei den anschließend erarbeiteten Fällen, weshalb die Ergebnisse unter diesem Vorbehalt zu sehen sind. Da die Redundanz jedoch ausreichend groß ist, haben wir uns meist mit dem Varianzfaktor aus den einzelnen Systemen beholfen.

Die Größe λ_0 stellt den Unterschied dar zwischen Null- und Alternativhypothese einer Schätzfunktion, in unserem Falle von $v^{TP_{1j}}v/\sigma$. Sie hängt ab von α_0 , β_0 , b_1 und b_2 . α_0 ist das Risiko erster Art, für den eindimensionalen Test wird $\alpha_0 = 0,1\%$ verwendet. $1 - \beta_0$ bedeutet das Risiko 2. Art, $\beta_0 = 80\%$. Der Freiheitsgrad des eindimensionalen Tests ist $b_1 = 1$, der des "wahren Werts", mit dem er verglichen wird, $b_2 = \infty$. Es wird die Nullhypothese: "alle Beobachtungen sind richtig" getestet gegen die Alternativhypothese "nur eine Beobachtung ist grob falsch", was ausgedrückt ist durch $\nabla l^T = (0, 0, 0, \dots, \nabla l_i, \dots, 0)$. Eine Lösung ist überhaupt nur unter dieser Voraussetzung möglich. Vereinfacht kann man auch sagen, es wird die Grundgesamtheit, repräsentiert durch den a priori Gewichtseinheitsfehler verglichen mit einer Stichprobe, die durch einen Wert ∇l_i grob verfälscht ist, der sich in einer alternativen Verteilung bemerkbar macht. Da alle n Beobachtungen grob falsch sein können, haben wir n Alternativhypothesen aufzustellen.

In einem mehrdimensionalen Test (Nullhypothese) werden die Beobachtungen zunächst untersucht, ob überhaupt grob falsche Werte vorhanden sind. Der Varianzfaktor der Meßdaten $\hat{\sigma}$ wird mit Hilfe der Fisher-Verteilung mit dem a priori Varianzfaktor σ verglichen (einseitiger Test):

$$\hat{\sigma}/\sigma > \sqrt{F_{1-\alpha, b, \infty}} .$$

$F_{1-\alpha, b, \infty}$: Konfidenzintervall der Fisher-Verteilung, α setzen wir gleich 5% (signifikant) oder gleich 1% (hochsignifikant), b steht wieder für den Freiheitsgrad des Varianzfaktors. Falls 2 Varianzfaktoren untersucht werden sollen, ob sie derselben Grundgesamtheit entstammen (zweiseitiger Test), lautet die Formel mit den analogen Bezeichnungen:

$$\delta_1 / \delta_2 > \sqrt{F_{\alpha/2, b_1, b_2}} \cdot$$

Ist die Nullhypothese zu verwerfen, so läßt sich für jede einzelne Beobachtung der Grenzwert aus der eindimensionalen Alternativhypothese berechnen:

$$|\nabla v_i| = q_{v_i v_i} \nabla l_i \cdot$$

Falls die Verbesserung diesen Grenzwert überschreitet, so kann die Messung mit obigem Risiko als grob falsch gestrichen werden.

2. STAUMAUER MONTSALVENS

Vorbetrachtungen

Vier Beobachtungspfeiler erlauben alle möglichen Strecken- und Richtungsbeobachtungen untereinander sowie weitere Richtungsbeobachtungen zu 9 Versicherungsbolzen. Auf der Staumauer werden 7 Objektpunkte von allen 4 Pfeilern aus ebenfalls durch Richtungen beobachtet. Zunächst ist das aus den Pfeilern und Versicherungspunkten bestehende, kombinierte Überwachungsnetz auf eventuelle Veränderungen zwischen beiden Meßepochen zu untersuchen. Zu diesem Zweck sind die Richtungen zu den Objektpunkten von den übrigen, die für jeden Pfeiler in 2 Sätzen vorliegen, abzuspalten.

Das kombinierte Netz enthält somit in beiden Meßepochen die bei 4 Stationen möglichen 6 Strecken sowie Richtungen zu jeweils 8 Zielen, deren Gewichtsverhältnisse vorab festzulegen sind. Diese lassen sich bestimmen entweder durch eine getrennte Vorausgleichung der Strecken- und Richtungs-messungen oder aus den gegebenen Genauigkeiten der Strecken und jenen der Richtungen, die in den Differenzen der beiden Sätze stecken. Das erste Verfahren erscheint uns in diesem Beispiel zweifelhaft infolge der schwachen Redundanz des Streckennetzes im Vergleich zum Richtungsnetz. Betrachten wir deshalb die Meßgenauigkeiten, so zeigt sich eine - geringe - höhere Genauigkeit der Bezugs- gegenüber der Wiederholungsmessung. Da die jeweiligen Mittelwerte jedoch im gegenseitigen einfachen Streubereich liegen und keine Systematik erkennen lassen, können wir erwarten, daß sämtliche Beobachtungen derselben Grundgesamtheit angehören ohne Rücksicht auf Meßepoche und Streckenlänge. Als Mittelwerte finden wir für die Richtungen $\pm 0,30$ mgon und für die Strecken $\pm 0,25$ mm.

Allerdings ist festzustellen, daß die Streckenmessungen unwahrscheinlich gut zusammenpassen, der mittlere Fehler von $\pm 0,001$ mm der Bezugsmessung z.B. kann nicht mit Redundanz 1 erklärt werden, vielmehr stellt sich in diesem Falle die Frage nach dem dafür eingesetzten Meßverfahren! Dieses gute Ergebnis bewog uns letztlich, die Genauigkeit der Strecken heraufzusetzen und mit stark der Hälfte des obigen Werts, mit $\pm 0,13$ mm, anzunehmen, so daß bei Rechnung in Gon/Meter bzw. in Bruchteilen davon ungefähr das Verhältnis $m_s : m_r = 5 : 1$ entsteht. Dieser Ansatz bestätigt sich in den durchschnittlichen Genauigkeiten der Einzelausgleichungen von Bezugs- und Wiederholungs-

messung:

Meßepoche	vor der Ausgleichung		nach der Ausgleichung	
	Strecken [mm]	Richtungen [mgon]	Strecken [mm]	Richtungen [mgon]
Bezugsmessung	0,14	0,32	0,10	0,29
Wiederholungsmessung	0,18	0,39	0,12	0,27

Von entscheidender Wichtigkeit in diesem Zusammenhang ist für den Test der a priori festzulegende Varianzfaktor σ , der direkt auf die Nabla-Werte wirkt. Da nicht bekannt ist, unter welchen Bedingungen und mit welchen Instrumenten die Meßwerte ermittelt worden sind, ist dessen Bestimmung im vorliegenden Fall höchst problematisch. Mangels besserer Information wählen wir dafür den oben genannten Wert von 0,13 mm.

Der Vergleich der Strecken von Bezugs- und Wiederholungsmessung zeigt bereits, daß durch die beiden um ca. 0,5 mm länger gewordenen Strecken 1-4 und 2-4 Punkt 4 nach außen verschoben sein könnte. Die übrigen Streckendifferenzen ergeben kein einheitliches Bild.

Überwachungsnetz

Beide Meßepochen gleichen wir als freie Netze aus mit Minimierung der Verschiebungen in den beiden Koordinatenrichtungen und einer Drehung gegenüber den Näherungswerten. Die +y-Achse des Koordinatensystems wurde parallel zur Strecke 2 - 4 gelegt. Wegen eventueller Maßstabsunterschiede unterwerfen wir die Ergebnisse der Wiederholungsmessung anschließend einer Helmert-Transformation mit der Nullmessung als übergeordnetem System. In den Restklaffungen zeigen sich dann die Unterschiede zwischen Wiederholungs- und Bezugsmessung, sie sind zusammen mit den Nabla-Werten in der nächsten Tabelle zusammengestellt.

Die aus den $\sqrt{2}$ - fachen Nabla-Werten für die Koordinaten gebildeten Rechtecke betrachten wir als Grenze für signifikante Koordinatendifferenzen zweier Meßepochen. Darin kommt im Gegensatz zur Fehlerellipse, in der sich mehr die geometrische Netzfigur widerspiegelt, die Sicherheit der Messungen zum Ausdruck, d.h. wie gut oder wie schlecht sich die Beobachtungen gegenseitig kontrollieren. Eine einzige schlecht kontrollierte Messung erzeugt bereits einen großen Grenzwert, der dann eine entsprechend große Ausdehnung des Rechtecks zur Folge hat. Dies läßt sich an den verschiedenen Schnittfiguren recht gut erläutern:

Beim Überwachungsnetz fällt zunächst auf, daß sich alle Rechtecke in Querrichtung erstrecken. Ursache ist die quergestreckte Ausdehnung des Netzes, die jedoch günstig ist im Hinblick auf even-

tuelle Punktveränderungen in der uns wegen der Objektpunkte interessierenden dazu senkrechten Richtung. Als zweites fallen die beiden großen Flächen der Punkte 5 und 8 auf. Ursache dafür sind die spitzen Schnitte. Punkt 5 ist nicht nur in Querrichtung sondern auch senkrecht dazu schlecht kontrolliert. Im Vergleich dazu kontrollieren die flacheren Schnitte den Punkt 8 in senkrechter Richtung besser, allerdings auf Kosten der Querrichtung. Die Punkte 6 und 7 mit rechtwinkligen, einigermaßen kontrollierten Strahlen zeigen kleine Rechtecke, während bei Punkt 9 die senkrechte Richtung von Punkt 4 aus nicht kontrolliert ist, was sich wieder in Querrichtung auswirkt. Alle 4 Pfeilerpunkte zeigen die typische Querstreckung, zweifellos auch eine Folge der dominierenden Richtungsbeobachtung.

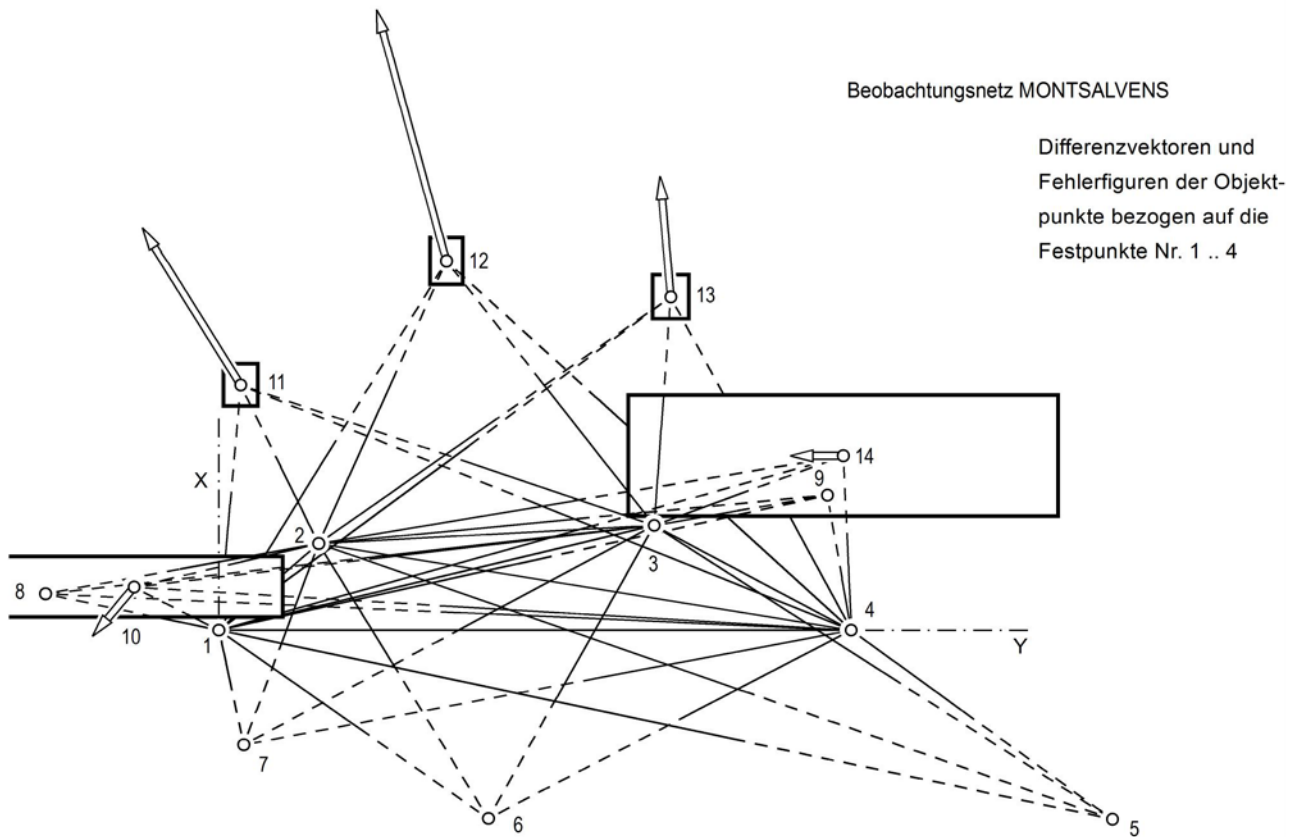
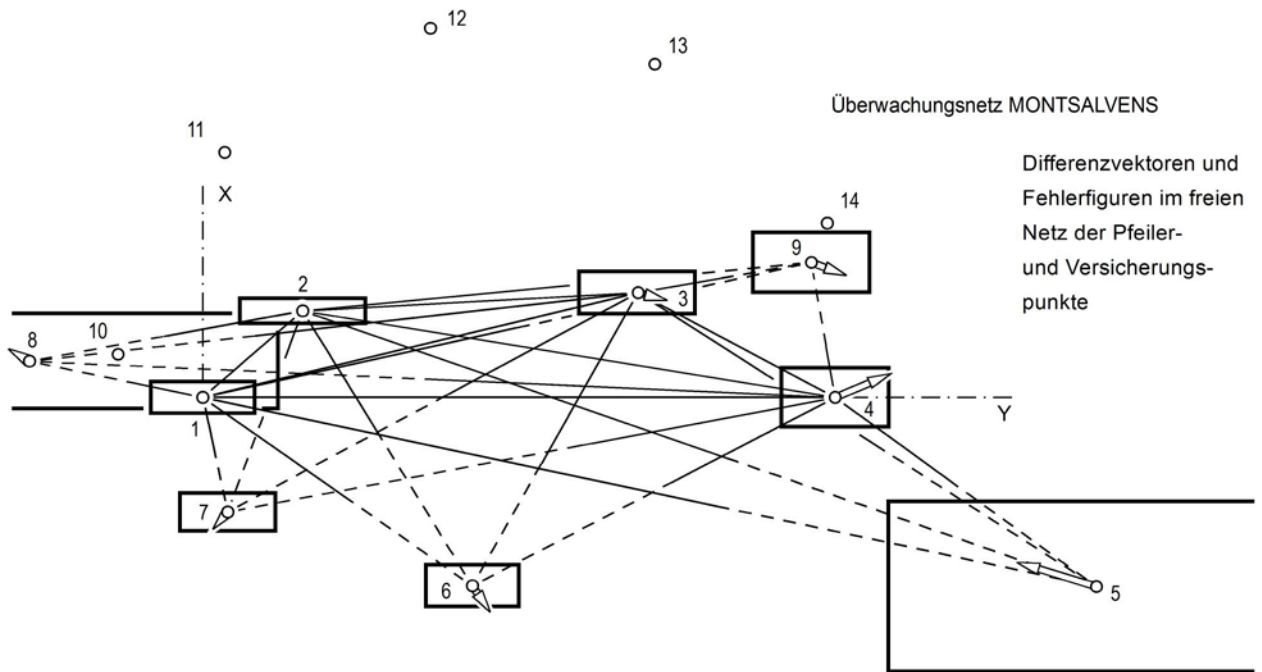
Punkt	Grenzwerte		Koordinatendifferenzen	
	∇x	∇y	Δx	Δy
1	0,35	1,17	0,03	0,19
2	0,26	1,39	-0,04	0,14
3	0,45	1,30	0,16	-0,37
4	0,63	1,20	-0,44	-1,09
5	1,87	4,64	-0,50	1,52
6	0,39	1,03	0,39	-0,20
7	0,34	1,12	0,30	0,20
8	1,01	5,57	-0,14	0,33
9	0,70	1,30	0,24	-0,74

Tabelle der Nabla-Koordinatengrenzwerte und der Koordinatendifferenzen
Wiederholungs-Bezugsmessung, alle Werte in mm

Größere Differenzen zwischen Wiederholungs- und Bezugsmessung treten auf im bereits erwähnten Punkt 4 sowie besonders in den auf der rechten Seite liegenden Versicherungspunkten 5, 6 und 9. Da sie jedoch hauptsächlich in Querrichtung verlaufen, überschreiten sie in keinem Falle die quergestreckten Fehlerfiguren. Als am ehesten verändert käme Punkt 6 in Frage, dessen Koordinatendifferenz in senkrechter Richtung gerade die Grenze erreicht.

Beobachtungsnetz

Zur Beurteilung der Objektpunkte betrachten wir also die Pfeilerpunkte als unverändert. Die jeweils von 4 Pfeilern aus vorwärtseingeschnittenen 5 Objektpunkte 10 - 14 sind für beide Meßepochen als angeschlossenes Netz auszugleichen. Wir führen wieder die Richtungen beider Meßepochen als gleichgewichtig ein. Zur Verbesserung der Orientierung laufen die Richtungen zu den Versicherungspunkten wieder mit, so daß in beiden Netzen insgesamt 52 Richtungen bei 7 x 2 Koordinaten- und 4 Orientierungsunbekannten auftreten.



Lage: 0 10 20 30 m

Fehlerfiguren: 0 1 2 3 4 5 mm

In der Wiederholungsmessung müssen allerdings 5 Richtungen als grob falsch gestrichen werden, die Verbesserungen der Beobachtungen 2-3: -0,84, 3-4: 2,95, 4-3: 1,12, 4-9: 1,53 und 4-5: -3,04 [mgon] übersteigen jeweils den Grenzwert von 0,76 mgon z.T. erheblich.

In der folgenden Tabelle finden sich die $\sqrt{2}$ - fachen Grenzwerte und Koordinatendifferenzen der Objektpunkte [mm]:

Punkt	Grenzwerte		Koordinatendifferenzen		
	∇_x	∇_y	Δ_x	Δ_y	$\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$
10	0,63	3,26	-1,0	-1,0	1,4
11	0,44	0,34	3,7	-2,4	4,4
12	0,50	0,32	5,7	-1,6	5,9
13	0,43	0,38	2,9	-0,2	3,0
14	1,31	4,86	0,0	-1,2	1,2

Vergleichen wir zunächst die mit demselben a priori Varianzfaktor wie beim Überwachungsnetz berechneten Koordinatengrenzwerte, so fallen auf den ersten Blick die beiden großen Rechtecke der Punkte 10 und 14 auf. Für Punkt 10 gilt ähnliches wie für Punkt 8: durch die günstigere Lage von 8 gehen jedoch die Werte auf etwa 60 Prozent zurück. Umgekehrt bei Punkt 14 im Vergleich zu Punkt 9: durch die ungünstigere Lage von 14 mit der nicht kontrollierten Richtung 9 - 14 wächst die Unsicherheit in Querrichtung gewaltig. In den 3 mittleren Objektpunkten zeigen sich die guten Schnittfiguren. Damit sind alle Koordinatendifferenzen bis auf die von Punkt 14 eindeutig signifikant.

3. Deformationsnetz Huaytapallana/Peru

Das Netz besteht in den beiden ersten Meßperioden 1975 und 1976 aus 11 Punkten, die als gleichwertig ohne Rangordnung einer klassischen Deformationsmeßanlage anzusehen sind. Der in der 3. Meßperiode hinzugenommene Punkt 12 bleibt ohne wesentlichen Einfluß auf das Gesamtnetz, da er nur eine zusätzliche Verbindung zweier seitheriger Punkt darstellt. Die durch Strecken- und Richtungsmessungen zusammengeschlossenen Punkte zu beiden Seiten einer Verwerfungslinie können möglicherweise alle gegenüber der Bezugsmessung verändert sein. Dies soll durch eine freie Netzausgleichung aller 3 Meßperioden untersucht werden, wobei unsere Koordinatengrenzwerte als Maß für eine eventuelle Signifikanz der auf die Bezugsmessungen Helmert-transformierten Koordinatendifferenzen gelten sollen.

Im Gegensatz zum Montsalvens-Beispiel weisen die Streckenmessungen eine ausreichende Redundanz auf, so daß ihre Genauigkeit, wie die der Richtungen, separat bestimmt werden kann, um die wiederum

unbekannten Gewichtsverhältnisse zu ermitteln. Beim 11-Punkte-Netz sind dazu von 55 möglichen im Jahr 1975 35 und im Jahr 1976 36 sowie bei 12 Punkten im Jahr 1977 40 Strecken beobachtet. Da in der 3. Meßperiode die Winkel- durch die Richtungsmessung ersetzt wurde, bietet sich an, die Winkel als Richtungen aufzufassen, so daß sich die Ausgleichungen aus folgenden Größen zusammensetzen:

Meßepoche	Richtungen	Strecken	Orient.-	Koord.-	Freiheitsgr.	Redundanz
			Unbekannte			
1975	148	35	74	22	3	90
1976	162	36	81	22	3	98
1977	99	40	23	24	3	95

Die Vorausgleichungen zur Ermittlung der Gewichtsverhältnisse ergeben eine starke Streuung der Genauigkeiten. Insbesondere läßt sich die Frage, ob die Streckengenauigkeit entfernungsabhängig ist, nicht eindeutig beantworten (vgl. Interpretation der Ergebnisse am Schluß des Abschnitts). Auf alle Fälle ist die Bemerkung zum Streckenfehleransatz von $m_s = \pm (4 \text{ mm} \pm 10 \text{ ppm})$ "wahrscheinlich wesentlich besser" sicher richtig. Da jedoch die a priori Genauigkeit der Beobachtungen nicht nur das Ergebnis entscheidend, sondern auch unsere Koordinatengrenzwerte direkt beeinflusst, andererseits aber bei unterschiedlichen Ansätzen der Vergleich verschiedener Verfahren stark beeinträchtigt wäre, haben wir uns entschlossen, die in Hannover berechneten Genauigkeiten zu übernehmen, nämlich:

Meßepoche	Genauigkeit der	
	Richtungen [mgon]	Strecken [mm]
1975	0,57	2,9
1976	0,49	1,8
1977	0,84	1,5

Die Strecken ohne Abhängigkeit von der Streckenlänge. Die wieder $\sqrt{2}$ - fachen Nabla-Koordinatengrenzwerte, berechnet für die 3. Meßepoche mit $\sigma = 0,84 \text{ mgon}$, sowie die Koordinatendifferenzen zwischen den beiden Wiederholungsmessungen und der Bezugsmessung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt (sämtliche Werte [mm]):

Punkt	Grenzwerte		K o o r d i n a t e n d i f f e r e n z e n						
			1976	-	1975	1977	-	1975	
			Δx		Δy	Δx		Δy	
1	5,6	4,9	2,4		-0,8		2,8		0,6
2	4,0	2,9	-3,6		-3,3		-2,1		-0,1
3	3,6	3,4	0,0		-2,6		1,0		-4,5
4	6,5	4,0	1,2		4,4		0,7		3,0
5	6,9	3,4	-0,7		3,9		1,2		5,0
6	4,5	2,5	1,5		1,3		-0,1		-2,0
7	7,2	4,0	-0,5		0,0		-1,2		0,5
8	4,5	2,2	-0,9		0,0		-3,9		-0,5
9	5,2	4,3	-0,9		-0,1		0,2		-0,7
10	4,3	3,6	0,7		-2,5		0,6		-3,3
11	5,6	3,4	0,7		2,5		0,8		2,2
12	10,3	3,1	-		-		-		-

Dank der starken und offensichtlich durchweg gut kontrollierten Überbestimmung des Netzes treten bei den Fehlerfiguren keine solchen Extremfälle wie in den Montsalvens-Netzen auf, wenn man von Punkt 12 absieht, wo die Streckenmessung nicht ausreicht, dem Rechteck eine günstigere Form zu verleihen. Die kleinsten Fehlerfiguren finden wir dort, wo sich die Bestimmungsstrahlen gegenseitig am besten kontrollieren, am günstigsten also, wenn mindestens 2 Strahlen in der gleichen Richtung verlaufen und im übrigen keine unkontrollierten Messungen auftreten.

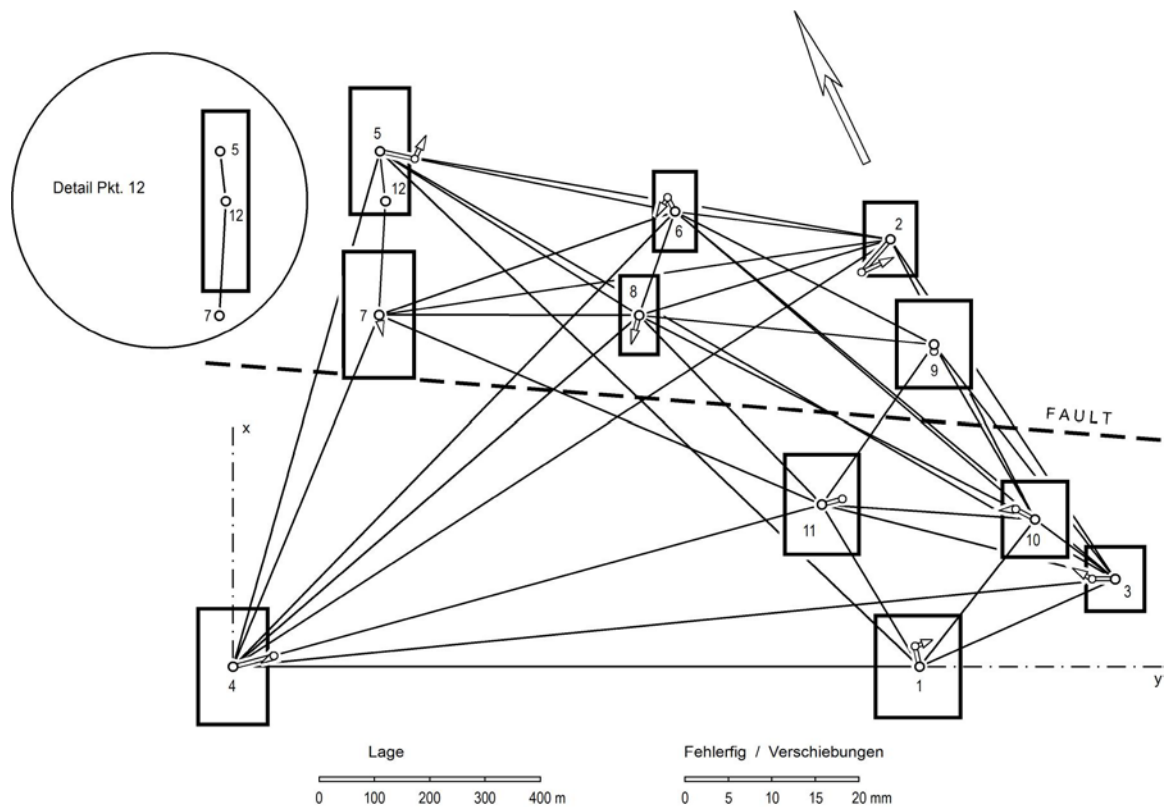
Als besonders stabil erweisen sich die unmittelbar nördlich der Verwerfungslinie befindlichen Punkte 7, 8 und 9, während die als signifikant verändert anzusehenden Punkte 2, 3, 4 und 5 durchweg an der Netzperipherie liegen. Merkwürdigerweise liegen die nur in der 1. Wiederholungsmessung veränderten Punkte 2 und 4 gerade einander diagonal gegenüber wie auch die in der 2. Wiederholungsmessung veränderten Punkte 3 und 5, wobei 5 bereits in der 1. Wiederholungsmessung als signifikant erscheint. Bei Punkt 3 wird die Bewegungstendenz der 1. Wiederholungsmessung erst nach Verstärkung in der 2. Wiederholungsmessung signifikant. Da jedoch alle 4 Vektoren hauptsächlich gegen das Netzinne gerichtet sind, was sich auch darin zeigt, daß z.B. 1977 alle über 1.300 m langen Strecken eine negative Verbesserung erhalten, stellt sich die Frage, ob der Gewichtsansatz für die Strecken tatsächlich richtig ist, wenn er als streckenunabhängig eingeführt wird!

4. Schlußbemerkung

Unser Verfahren hat, gegenüber der traditionellen Beurteilungsmethode mit Hilfe der Punktfehlerellipse, den Blick geschärft für die Sicherheit der Punktbestimmung. Wie die beiden Beispiele wieder zeigen, liefert es bei starker Redundanz und bei durchweg gut kontrollierter Punktbestimmung

brauchbare Ergebnisse. Solche Netze stellen jedoch die Ausnahme dar, da die Praxis andere Prioritäten setzen muß. In diesen Fällen liefern die subtileren statistischen Strategien brauchbarere Resultate. Das aktuelle Anwendungsgebiet unseres Verfahrens liegt darin, auf verhältnismäßig einfache Weise, schwach bestimmte Stellen in einem Netz herauszufinden und grobe Meßfehler aufzudecken.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. Caspary und Prof. Dr.-Ing. Welsch sei an dieser Stelle der Dank ausgesprochen für ihre Initiative, durch einen solchen interessanten Vergleich zur Klärung dieses Problems beizutragen.



ANALYSE VON DEFORMATIONSMESSUNGEN MIT HILFE RELATIVER FEHLERELLIPSEN

E. Kuntz und G. Schmitt, Karlsruhe

1. Vorbemerkungen

Wir sind der Einladung der Bundeswehrhochschule München zur Teilnahme an einem Seminar über die Analyse von Deformationsmessungen, in dem wir das in den letzten Jahren in Karlsruhe entwickelte Analyseverfahren vorstellen und an vorgegebenen Beispielen erproben sollten, sehr gerne gefolgt. Der Anlaß zur Entwicklung dieses Verfahrens waren ganz konkrete Aufgaben, die in Zusammenarbeit mit der Landesvermessung Baden-Württemberg an unser Institut herangetragen wurden. Dabei konnten wir glücklicherweise auf so wohlbekannte und ausgezeichnete Arbeiten wie die von Koch, Pelzer und Welsch, um nur einige wichtige Namen zu nennen, zurückgreifen.

2. Beschreibung des Verfahrens

Bei der Analyse von Deformationsmessungen hat man es immer mit mindestens zwei, je nach der zu erwartenden Größe der Bewegungsgeschwindigkeit und der möglichen Meßgenauigkeit mehr oder weniger zeitlich auseinanderliegenden Meßepochen zu tun. Innerhalb der einzelnen Meßepochen bleiben die Punktbewegungen im allgemeinen unterhalb der Meßgenauigkeit, so daß das gesamte Feld der Stütz- und Objektpunkte als stabil betrachtet werden kann. Man wird deshalb die Messungen jeder Epoche zunächst einer Ausgleichung unterziehen und zwar am besten einer freien Netzausgleichung mit minimiertem Lösungsvektor, um zugleich die innere Fehlersituation des Deformationsnetzes zu erfassen.

Um nun festzustellen, ob zwischen "Nullmessung" und "Wiederholungsmessung" Deformationen eingetreten sind, müssen beide Netze "richtig" miteinander verknüpft werden. Es ist von vornherein auch zu beachten, daß in beiden Meßepochen nach dem gleichen Beobachtungsplan und mit den gleichen Instrumenten gearbeitet wird, damit nicht durch eventuell vorhandene unterschiedliche Systematik Deformationen vorgetäuscht werden. Die beiden ausgeglichenen Netze sind selbst bei Ausgleichung mit den gleichen Näherungskordinaten in Verschiebung und Drehung und bei reinen Richtungsnetzen auch im Maßstab gegeneinander frei, so daß die Koordinaten nicht unmittelbar miteinander verglichen werden können. Man muß deshalb beide Netze zunächst gemeinsam darauf hin untersuchen, welche Punkte zwischen Null- und Wiederholungsmessung gegenseitig unverändert geblieben sind und als Stützpunkte für eine Netzverknüpfung verwendet werden können. In den meisten Fällen hat man aus der groben Kenntnis von Bewegungsvorgängen bereits bei der Planung das Deformationsnetz auf solche Punkte aufgebaut. Zur Oberprüfung ihrer Stabilität kann die bekannte Helmerttransformation herangezogen werden. Als Kriterium genügt hierbei im allgemeinen ein Vergleich der Restklaffungen mit den mittleren Punktlagefehlern aus den Ausgleichungen, wobei man im Zweifelsfalle zunächst zugunsten einer Nichtstabilität entscheiden sollte.

Hat man die Stabilität der Stützpunkte überprüft, so ist der exakte weitere Weg des Analyseverfahrens eine gemeinsame freie Ausgleichung beider Meßepochen, bei der die Stützpunkte als identische Punkte nur einmal Koordinatenunbekannte erhalten. Eventuell ist bei vorliegender elektro-

nischer Entfernungsmessung zuvor die Wiederholungsmessung auf den Maßstab der Nullmessung zu reduzieren. Die hierfür benötigte Maßstabsverbesserung kann der Helmerttransformation entnommen werden. Sollten die Vorausgleichungen in ihren Genauigkeitsaussagen zeigen, daß die Messungen der einzelnen Epochen nicht der gleichen Grundgesamtheit angehören - bei stark unterschiedlichen Wetterlagen sind unterschiedliche Genauigkeiten sowohl bei Richtungsbeobachtungen als auch bei elektronischen Streckenmessungen durchaus denkbar - , so kann dies durch entsprechende Gewichtung berücksichtigt werden. Die Genauigkeitsaussage der gemeinsamen Ausgleichung wird derjenigen der Einzelausgleichungen entsprechen, wenn durch die Einführung der als identisch angenommenen Stützpunkte keinerlei Zwang ausgeübt wird, d. h. wenn diese Stützpunkte in ihrer gegenseitigen Lage tatsächlich unverändert geblieben sind.

Es gilt nun, die sich in den Differenzen der endgültigen Koordinaten von Null- und Wiederholungsmessung darstellenden Punktverschiebungen von Objektpunkten und nicht stabil angesehenen Stützpunkten statistisch zu analysieren. Es liegt der Gedanke nahe, für diese Untersuchung die zu jeder Punktverschiebung gehörende relative Fehlerellipse heranzuziehen. Ihre Daten stellt die gemeinsame Ausgleichung zur Verfügung. Die relative Fehlerellipse hat den Vorteil, ein zweidimensionales Genauigkeitsmaß anschaulich zu repräsentieren. Erhält bei dieser Analyse ein als veränderlich angenommener Stützpunkt einen nicht signifikant von Null verschiedenen Verschiebungsvektor, so wäre die gemeinsame Ausgleichung durch Hinzunahme dieses Punktes als weiteren Stützpunkt zu wiederholen.

Die Methode der Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen ist unseres Erachtens ein sehr elegantes Verfahren, das man leicht auch auf mehrere Wiederholungsmessungen anwenden kann. Es ist nur noch die Frage offen, wie sich diese Methode statistisch begründen läßt.

3. Theoretischer Abriß

Die Modellierung der eigentlichen Deformationsanalyse nach vorausgegangener Identifizierung der Stützpunkte wollen wir nun anhand zweier Beobachtungsepochen t_1 und t_2 vornehmen. Die Beobachtungen l_1 und l_2 der beiden Epochen fassen wir zu dem Vektor

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (1a)$$

zusammen. Der Parametervektor der gemeinsamen freien Ausgleichung

$$y = \begin{pmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1b)$$

setzt sich aus den beiden Epochen gemeinsamen Stützpunktkoordinaten z und den Objektpunktkoordinaten x_1 zur Epoche t_1 und x_2 zur Epoche t_2 zusammen.

Als Ergebnis der freien Ausgleichung $A'PAy - A'Pl = 0$ erhalten wir die Schätzungen \hat{z} , \hat{x}_1 , \hat{x}_2 für die Koordinaten und $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz der Gewichtseinheit. Die Varianz-Kovarianzmatrix minima-

Der Spur der Parameter setzt sich aus den Submatrizen

$$Q = (A'PA)^+ = \begin{pmatrix} Q_{ZZ} & Q_{ZX_1} & Q_{ZX_2} \\ Q'_{ZX_1} & Q_{X_1X_1} & Q_{X_1X_2} \\ Q'_{ZX_2} & Q'_{X_1X_2} & Q_{X_2X_2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

oder nach Zusammenfassung der Objektpunktkoordinaten zu

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{ZZ} & Q_{ZX} \\ Q'_{ZX} & Q_{XX} \end{pmatrix}$$

zusammen.

Eine allgemeine Hypothese bezüglich der Objektpunkte läßt sich nach Koch (1975) in der Form $C'x = w$ formulieren. Unter dem globalen Deformationstest verstehen wir den Test der Hypothese $x_1 - x_2 = 0$, die besagt, daß in keinem der Objektpunkte zwischen den Epochen t_1 und t_2 eine Verschiebung erfolgt ist. Koeffizientenmatrix und Absolutgliedvektor der Hypothese lauten also $C' = (E|-E)$, $w = 0$. Die Aussage dieses Globaltests ist jedoch wenig hilfreich, da eventuelle Deformationen nicht lokalisiert werden. Wesentlich sinnvoller erscheint daher die zweidimensionale Analyse der einzelnen Objektpunkte.

Betrachten wir den Punkt P_i zu den Epochen t_1 und t_2 , so lautet die Hypothese, daß P_i sich nicht verändert hat,

$$y_{1i} - y_{2i} = 0, \quad x_{1i} - x_{2i} = 0,$$

wenn y nun für den Rechtswert und x für den Hochwert des Koordinatensystems steht. Die Koeffizientenmatrix ist also

$$C' = \begin{matrix} & (P_{1,1}) & (P_{1,i}) & (P_{1,px}) & (P_{2,1}) & (P_{2,i}) & (P_{2,px}) \\ (N & | \dots & | N & | E & | N & | \dots & | N & | N & | \dots & | N & | -E & | N & | \dots & | N) \end{matrix}$$

$$\text{mit } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und den Absolutgliedvektor } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei px die Anzahl der Objektpunkte bedeutet.

Der in der gemeinsamen Ausgleichung der beiden Epochen für den Punkt P_i geschätzte Verschiebungsvektor lautet

$$\hat{d}_i = \begin{pmatrix} \hat{y}_{1,i} - \hat{y}_{2,i} \\ \hat{x}_{1,i} - \hat{x}_{2,i} \end{pmatrix} = C' \hat{x}.$$

Seine Kofaktorenmatrix berechnet sich aus

$$Q_{\hat{d}_i} = C' Q_{xx} C = \begin{pmatrix} q_{yyd} & -q_{yxd} \\ q_{yxd} & -q_{xxd} \end{pmatrix} .$$

Die Elemente von $Q_{\hat{d}_i}$ lauten, wie sich leicht aus dem Aufbau von C entnehmen läßt, in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} q_{yyd} &= q^{11}_{y_i y_i} + q^{22}_{y_i y_i} - 2q^{12}_{y_i y_i} \\ q_{xxd} &= q^{11}_{x_i x_i} + q^{22}_{x_i x_i} - 2q^{12}_{x_i x_i} \\ q_{yxd} &= q^{11}_{y_i x_i} + q^{22}_{y_i x_i} - q^{12}_{y_i x_i} - q^{21}_{y_i x_i} , \end{aligned}$$

wobei sich die hochgestellten Indizes nach (1b) auf die Beobachtungsepochen und die entsprechenden Submatrizen von Q in (2) beziehen. Nach Koch (1975) lautet dann die Testgröße für unsere auf P_i bezogene Hypothese

$$T = \frac{\hat{d}_i' Q_{\hat{d}_i}^{-1} \hat{d}_i}{2\hat{\sigma}^2}$$

Wir können diese Hypothese mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $100 \cdot \alpha$ % annehmen, wenn

$$T < F_{2, f; \alpha}$$

gilt, wobei $F_{2, f; \alpha}$ das Fraktile der Fisher-Verteilung für 2 und $f = n - u + d$ Freiheitsgrade ist (n = Anzahl der Beobachtungen, u = Anzahl der Unbekannten und d = Defekt der gemeinsamen freien Ausgleichung).

Für die praktische Anwendung sehr hilfreich ist, daß sich der Test geometrisch anschaulich darstellen läßt. Setzt man nämlich

$$\frac{Q_{\hat{d}_i}^{-1}}{\hat{\sigma}^2} = \sum_{\hat{d}_i}^{-1} ,$$

so ist der Rand des Konfidenzbereichs für die Testgröße

$$\hat{d}_i' \sum_{\hat{d}_i}^{-1} \hat{d}_i = 2 \cdot F_{2, f; \alpha}$$

die Gleichung einer Ellipse, die mit der relativen Fehlerellipse für die Koordinatenunterschiede zwischen den Punkten P_{1_i} und P_{2_i} identisch ist, wenn man deren Halbachsen um den Faktor $2 \cdot F_{2, f; \alpha}$

vergrößert. Wir können also die Halbachsen der Konfidenzellipse nach

$$a_i^2 = 2 \cdot F_{2, f; \alpha} \cdot \hat{\sigma}^2 \cdot \lambda_i \quad , \quad i = 1, 2$$

berechnen, wo λ_i die Eigenwerte der Kofaktorenmatrix $Q_{\hat{d}_i}$ darstellen, die sich bekanntlich aus

$$\lambda_1 = \frac{q_{xxd} + q_{yyd} + \kappa}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{q_{xxd} + q_{yyd} - \kappa}{2}$$

$$\kappa = \sqrt{(q_{xxd} - q_{yyd})^2 + 4q_{yxd}^2}$$

ergeben.

Der Richtungswinkel θ der großen Halbachse a_1 gegen die x-Koordinatenachse ist gegeben durch

$$\tan 2\theta = \frac{2q_{yxd}}{q_{xxd} - q_{yyd}} \quad .$$

Die geometrische Interpretation des Einzelpunkttests ist dann folgendermaßen möglich. Wir kartieren die beiden Punktlagen P_{1i} und P_{2i} und zeichnen um einen der beiden Punkte die Konfidenzellipse für \hat{d}_i . Liegt der zweite Punkt innerhalb der Ellipse, so können wir die Hypothese annehmen; liegt er jedoch außerhalb, so müssen wir die Hypothese verwerfen und annehmen, daß zwischen t_1 und t_2 eine Verschiebung des Punktes stattgefunden hat.

Die Verschiebungsanalysen für die einzelnen Objektpunkte werden voneinander unabhängig vorgenommen, wobei die Korrelationen zwischen den Punkten vernachlässigt werden. Streng genommen sind die wahren Konfidenzbereiche also geringfügig größer, womit bei diesem Verfahren unter Umständen Fehler erster Art auftreten können, die jedoch bei Deformationsanalysen im Gegensatz zu Fehlern zweiter Art durchaus in Kauf genommen werden können.

4. Untersuchungsergebnisse

1. Beispiel: Staumauer Montsalvens

Bei diesem Deformationsnetz handelt es sich um ein kombiniertes Strecken- und Richtungsnetz. Das Gewichtsverhältnis zwischen Strecken- und Richtungsbeobachtungen war durch entsprechende Genauigkeitsangaben vorgegeben. Es wurde durch die Ausgleichung bestätigt. Die Genauigkeitsaussagen der getrennten freien Netzausgleichungen von Null- und Erstmessung sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Meßepoche	mittl. Beobachtungsfehler vor der Ausgleichung		durchschn. mittl. Streckenfehler nach der Ausgleichung [mm]	durchschn. mittl. Punktlagefehler [mm]
	Richtungen [mgon]	Strecken [mm]		
Nullmessung	± 0,27	± 0,23	± 0,12	± 0,20
Erstmessung	± 0,35	± 0,29	± 0,16	± 0,26

Tabelle 1: Genauigkeiten der freien Netzausgleichungen

Als Stützpunkte waren die Punkte 1 bis 9 vorgegeben. Eine Prüfung dieser Punkte durch Helmerttransformation der Erstmessung auf die Nullmessung ergab die in Tabelle 2 zusammengestellten Restklaffungen.

Pkt.	Restklaffungen					
	über alle Stützpunkte		über die Stützpunkte			
	ΔR	ΔH	ohne 5		ohne 4 + 5	
ΔR			ΔH	ΔR	ΔH	
1	+0,11	+0,08	-0,08	+0,01	-0,08	+0,02
2	-0,03	-0,02	-0,05	+0,04	-0,04	-0,01
3	-0,25	+0,17	+0,26	+0,26	+0,20	+0,07
4	-1,10	-0,40	-0,27	-0,46	-	-
5	+1,58	-0,45	-	-	-	-
6	-0,23	+0,32	+0,02	-0,04	-0,12	-0,10
7	+0,17	+0,33	+0,04	+0,08	-0,02	+0,10
8	+0,52	-0,17	+0,06	-0,18	+0,12	-0,11
9	-0,77	+0,14	+0,02	+0,28	-0,07	+0,01
Maßstabsdifferenz					$(0,93 \pm 1,38) \cdot 10^{-6}$	

Tabelle 2: Restklaffungen der einzelnen Helmerttransformationen in Millimetern

Zunächst erkennt man, daß bei der Transformation über alle Stützpunkte im Punkt 5 die größte Restklaffung auftritt. Ein Vergleich mit den Punktlagefehlern der Ausgleichung und ein Blick auf die Netzskizze zeigt deutlich, daß dieser Punkt lediglich Orientierungsfunktion ausübt und in einer Richtung eine relativ große Lageunsicherheit aufweist. Er muß daher aus der Transformation entfernt werden. Nach Wiederholung der Transformation ohne Punkt 5 erhält nunmehr der Punkt 4 die größte Restklaffung. Sie erreicht das doppelte des durchschnittlichen mittleren Punktlagefehlers der Ausgleichung. Es muß hier eine Bewegung vermutet und der Punkt 4 aus der Reihe der Stützpunkte in die der Objektpunkte übertragen werden. Auch Punkt 5 wird zunächst als Objektpunkt behandelt. Die Restklaffungen der Helmerttransformation ohne die Punkte 4 und 5 liegen alle innerhalb der durchschnittlichen mittleren Punktlagefehler, so daß an der Identität der restlichen Stützpunkte nicht gezweifelt werden kann. Sie werden als identische Punkte in die gemeinsame Ausgleichung eingeführt. Mit Hilfe der Fisherschen Verteilung und der mittleren Gewichtseinheitsfehler der Einzelausgleichungen kann man in bekannter Weise feststellen, daß die Messungen beider Epochen als gleich genau angesehen und ohne besondere Gewichtung gemeinsam ausgeglichen werden können.

Die erste gemeinsame Ausgleichung berücksichtigt nur 7 identische Punkte (ohne Punkt 4 und 5). Ihre Analyse ist in Abb. 1 veranschaulicht. Die Konfidenzbereiche für die Punktverschiebungen in Form der auf eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % vergrößerten relativen Fehlerellipsen sind um die Spitzen der Verschiebungsvektoren eingezeichnet. Nur bei Vektoren, die nicht ganz innerhalb dieses Bereiches liegen, ist die Nullhypothese (keine Verschiebung!) abzulehnen. Abb. 1 zeigt deutlich, daß alle Objektpunkte und auch der Punkt 4 eine signifikante Verschiebung erfahren haben, während im Punkt 5 eine solche nicht signifikant nachweisbar ist. Aus diesem Grunde wurde die gemeinsame Ausgleichung mit Punkt 5 als identischem Stützpunkt wiederholt. Die Analyse dieser Ausgleichung veranschaulicht Abb. 2. Sie unterscheidet sich in ihrer Aussage nicht von Abb. 1. Die Genauigkeitswerte der gemeinsamen Ausgleichungen sind in Tabelle 3 angegeben. Sie stimmen überein und liegen zwischen bzw. unter den Genauigkeitswerten der getrennten Ausgleichungen (Tabelle 1). Die als identisch eingeführten Stützpunkte üben damit keinerlei Zwang in der gemeinsamen Ausgleichung aus und bestätigen ihre Identität, zumindest im Rahmen der vorhandenen Netzgenauigkeit.

Gemeinsame Ausgleichung der Null- und Erstmessung	mittl. Beobachtungsfehler vor der Ausgleichung		durchschn. mittlerer Streckenf. nach der Ausgleichung [mm]	durchschn. mittlerer Punktlagef. der Stützpunkte [mm]	durchschn. mittlerer Punktlagef. der Objektpunkte [mm]
	Richtungen [mgon]	Strecken [mm]			
mit 7 Stützpunkten (ohne 4 und 5)	0,30	0,25	0,10	0,16	0,20
mit 8 Stützpunkten (ohne 4)	0,30	0,25	0,10	0,15	0,19

Tabelle 3: Genauigkeiten der gemeinsamen freien Netzausgleichungen

2. Beispiel: Deformationsnetz Huaytapallana

Bei diesem Beispiel handelt es sich ebenfalls um ein kombiniertes Strecken- und Richtungsnetz. Genauigkeitsangaben zu den Beobachtungen konnten a priori nicht gemacht werden, außerdem war der Wert der Additionskonstante des verwendeten elektronischen Streckenmeßgeräts unbekannt. Nachdem das Netz sowohl für Richtungen als auch für Strecken eine gute Kondition besitzt und genügend Überbestimmungen vorhanden sind, konnten diese offenen Fragen durch Vorausgleichungen geklärt werden. Die Genauigkeitswerte dieser Vorausgleichungen sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Abb. 3 zeigt als Beispiel die mittleren Punktfehlerellipsen für die kombinierte Ausgleichung der Zweitmessung. Man erkennt, daß der in Tabelle 4 angegebene durchschnittliche mittlere Punktlagefehler als repräsentativ für alle Netzpunkte angesehen werden kann.

Für die Ausgleichung der Streckenmessungen wurde der Gewichtsansatz nach der vorgegebenen, unseres Erachtens für elektrooptische Entfernungsmessung allerdings sehr unrealistischen Streckenmeßgenauigkeit $\pm (4 \text{ mm} + 10 \text{ ppm})$ so festgelegt, daß die Gewichtseinheit für die doppelt gemessene Strecke der durchschnittlichen Länge von 700 m gilt. Als Additionskonstante ergab sich in allen drei Meßepochen der signifikante Wert von rund $3 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$. Die Strecken wurden für die weiteren Ausgleichungen entsprechend reduziert. Der mittlere Streckenfehler a posteriori beträgt im Durchschnitt rund $\pm (1 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$, also etwa ein Viertel des vorgegebenen. In Anbetracht der Kleinheit und Unsicherheit dieser Werte haben wir bei den nachfolgenden gemeinsamen Ausgleichungen die Streckenmessungen der einzelnen Epochen als gleichgewichtig angesehen. Die Gewichtsrelation zwischen Streckenmessungen und Richtungsbeobachtungen ist durch die Genauigkeitswerte der Tabelle 4 festgelegt, ebenso die bei diesem Beispiel berücksichtigte unterschiedliche Gewichtung der einzelnen Meßepochen bei der gemeinsamen Ausgleichung.

Bei der Zweitmessung 1977 wurde ein zusätzlicher Punkt zur Netzstabilisierung mitbeobachtet (Neupunkt 12). Wie Tabelle 4 zeigt und zu erwarten ist, hat er keinen Einfluß auf die Netzgenauigkeit. Er wurde aus den bereits genannten grundsätzlichen Erwägungen - einheitlicher Beobachtungsplan für alle Meßepochen - bei der Deformationsanalyse nicht verwendet.

Die weitere Bearbeitung des Beispiels gestaltet sich insofern etwas problematisch, als keinerlei Angaben über vorhandene Stützpunkte gemacht werden. Es ist lediglich der Hinweis zu finden, daß mitten durch das Deformationsnetz eine Verwerfungszone führt, die das Punktfeld in zwei Teile spaltet: Die Punkte 1, 3, 4, 10, 11 liegen auf der einen, die Punkte 2, 5, 6, 7, 8, 9 auf der anderen Seite dieser Verwerfung. Man muß daher damit rechnen, daß das eine Punktfeld gegenüber dem anderen im Laufe der Zeit Verschiebungen erfährt und sich bei der Suche nach Stützpunkten für eines der beiden Punktfelder entscheiden. Wir haben uns für die erstgenannte Punktgruppe 1, 3, 4, 10, 11 entschieden und, um Einblick in die gegenseitige Stabilität innerhalb dieser Punktgruppe zu erhalten, die endgültigen Punktlagen der kombinierten Ausgleichungen der einzelnen Meßepochen mit Hilfe von Helmerttransformationen miteinander verknüpft. Die verbliebenen Restklaffungen sind in Tabelle 5 angegeben. Um bei der Entscheidung, welche Punkte aus der Reihe der Stützpunkte entfernt werden sollten, sicher zu gehen, kann man den relativen Punktlagefehler, wie er sich aus den getrennten freien Ausgleichungen für jeden Punkt leicht bilden läßt, als Kriterium heranziehen. Im Beispiel ergibt sich nach Tabelle 4 dafür ein Durchschnittswert von rund 2 mm. Alle Restklaffungen, die diesen Wert überschreiten, sollten zunächst als kritisch angesehen werden. Nach Ta-

Meßepoche	Richtungsnetz		Streckennetz			kombiniertes Netz		
	mittlerer Richt.-f. vor Ausgl. [mgon]	durchschn. mittlerer Punktlagef. [mm]	mittlerer Streckenf. vor Ausgl. [mm]	durchschn. mittlerer Punktlagef. [mm]	Additions-konstante [mm]	mittlerer Richt.-f. vor Ausgl. [mgon]	mittlerer Streckenf. vor Ausgl. [mm]	durchschn. mittlerer Punktlagef. [mm]
Nullmessung reduziert	$\pm 0,57$	$\pm 3,95$	$\pm 2,93$	$\pm 2,89$	$+ 3,28 \pm 1,30$			
			$\pm 2,84$	$\pm 2,65$		$\pm 0,65$	$\pm 3,24$	$\pm 1,74$
Erstmessung reduziert	$\pm 0,49$	$\pm 3,10$	$\pm 1,92$	$\pm 1,68$	$+ 3,31 \pm 0,74$			
			$\pm 1,82$	$\pm 1,54$		$\pm 0,56$	$\pm 2,00$	$\pm 1,15$
Zweitmessung reduziert mit Pkt. 12	$\pm 0,84$	$\pm 5,56$	$\pm 1,48$	$\pm 1,34$	$+ 2,75 \pm 0,63$			
			$\pm 1,46$	$\pm 1,30$		$\pm 0,92$	$\pm 1,60$	$\pm 1,15$
						$\pm 0,93$	$\pm 1,61$	$\pm 1,11$

Tabelle 4: Genauigkeiten der einzelnen getrennten freien Netzausgleichungen

Stützpunkt Nr.	R e s t k l a f f u n g e n											
	über alle Stützpunkte						über die Stützpunkte ohne 11					
	Erst - ΔR	Null ΔH	Zweit - ΔR	Erst ΔH	Zweit - ΔR	Null ΔH	Erst - ΔR	Null ΔH	Zweit - ΔR	Erst ΔH	Zweit - ΔR	Null ΔH
1	2,10	-0,67	-1,70	-1,01	0,40	-1,67	1,58	-0,73	-1,73	-0,96	-0,14	-1,69
3	-0,34	0,77	0,67	0,37	0,33	1,14	-0,92	0,78	0,65	0,43	-0,26	1,21
4	0,16	0,71	0,49	-0,04	0,65	0,68	-0,29	-0,34	0,44	0,00	0,14	0,34
10	0,22	-0,36	0,66	0,46	0,87	0,11	-0,37	-0,39	0,64	0,52	0,27	0,14
11	-2,13	-0,46	-0,11	0,21	-2,25	-0,25	-	-	-	-	-	-
Maßstabs- differenz							(+2,52 ±0,88) · 10 ⁻⁶	(+0,78 ±0,88) · 10 ⁻⁶	(+0,78 ±0,92) · 10 ⁻⁶	(+3,31 ±0,85) · 10 ⁻⁶		

Tabelle 5: Restklaffungen der einzelnen Helmerttransformationen in Millimetern

belle 5 treten die größten Klaffungswerte in den Punkten 1 und 11 auf, insbesondere im Punkt 11. Eine Wiederholung der Transformationen ohne Punkt 11 liefert zwar für Punkt 1 wiederum Klaffungswerte von nahezu 2 mm, die aber als unbedenklich angesehen werden, so daß die gemeinsame Ausglei-
chung von je zwei Meßepochen mit den Stützpunkten 1, 3, 4 und 10 durchgeführt werden kann. Die Maßstabsdifferenzen aus den Helmerttransformationen von rund 2 bis 3 ppm sind nach den Voraus-
gleichungen nicht signifikant und bleiben unberücksichtigt.

Die Genauigkeitswerte der gemeinsamen Ausgleichungen finden sich in Tabelle 6. Ein Vergleich mit den entsprechenden Werten der Einzelausgleichungen in Tabelle 4 zeigt Übereinstimmung, womit deutlich wird, daß die als identisch angenommenen Stützpunkte keinen Zwang auf die gemeinsame Ausglei-
chung ausüben.

Die Analyse der gemeinsamen Ausgleichungen ist in Abb. 4, 5 und 6 veranschaulicht. Man kann fol-
gendes feststellen:

Nullmessung - Erstmessung (Abb. 4)

Nur Punkt 2 erweist sich als signifikant verschoben; Punkt 11 erreicht fast die Bereichsgrenze.

Erstmessung - Zweitmessung (Abb. 5)

Hier überschreiten die Verschiebungsvektoren der Punkte 2 und 8 den 95 %-Konfidenzbereich; aller-
dings ist im Vergleich zu Abb. 4 der Verschiebungsvektor des Punktes 2 nahezu entgegen gerichtet.

Nullmessung - Zweitmessung (Abb. 6)

Punkt 2 ist nicht mehr als signifikant verschoben auszuweisen, dagegen wiederum Punkt 8, während
Punkt 11 nur knapp die Bereichsgrenze erreicht.

Zusammenfassend kann bei diesem Beispiel festgestellt werden, daß signifikant nachweisbare Punkt-
bewegungen nur knapp den 95 %igen Konfidenzbereich überschreiten. Bei der vorliegenden Meßgenau-
igkeit ist der zeitliche Abstand der einzelnen Meßepochen offenbar zu kurz, um eventuell vorhan-
dene Bodenbewegungen deutlicher nachweisen zu können.

5. Schlußbemerkung

Die sehr umfangreichen Rechenarbeiten, die zur Vorbereitung dieses Beitrages erforderlich waren,
wurden alle von unserer wissenschaftlichen Mitarbeiterin, Frau Birgit Meier-Hirmer, durchgeführt.
Wir sind ihr sehr zu Dank verpflichtet. Als Rechenanlage stand die UNIVAC 1108 des Rechenzentrums
der Universität Karlsruhe zur Verfügung.

Meßepochen	mittl. Richt.-f. vor d. Ausgl. [cc]	mittl. Streckenf. vor d. Ausgl. [mm]	durchschn. mittl. Punkt- lagefehler [mm]	durchschn. mittl. Punktlagefehler d. Stützpunkte [mm]	durchschn. mittl. Punktlagefehler d. Objektunkte [mm]	signifikante Punktverschie- bung 95 % Sicher- heitswahrscheinl. Nr. Größe [mm]
Nullmessung 1975	± 6,3	± 3,13	± 1,58	± 1,05	± 1,67	2
Erstmessung 1976	± 5,4	± 2,02			± 1,47	
Erstmessung 1976	± 5,3	± 1,99			± 1,33	2
Zweitmessung 1977	± 9,1	± 1,58	± 1,22	± 0,85	± 1,33	8
Nullmessung 1975	± 6,5	± 3,25			± 2,06	
Zweitmessung 1977	± 9,6	± 1,67	± 1,63	± 1,09	± 1,79	8
					± 1,51	5,7

Tabelle 6: Genauigkeiten der gemeinsamen freien Netzausgleichungen von je zwei Meßepochen mit den Punkten 1, 3, 4, 10 als identische Stützpunkte

Abbildung 1

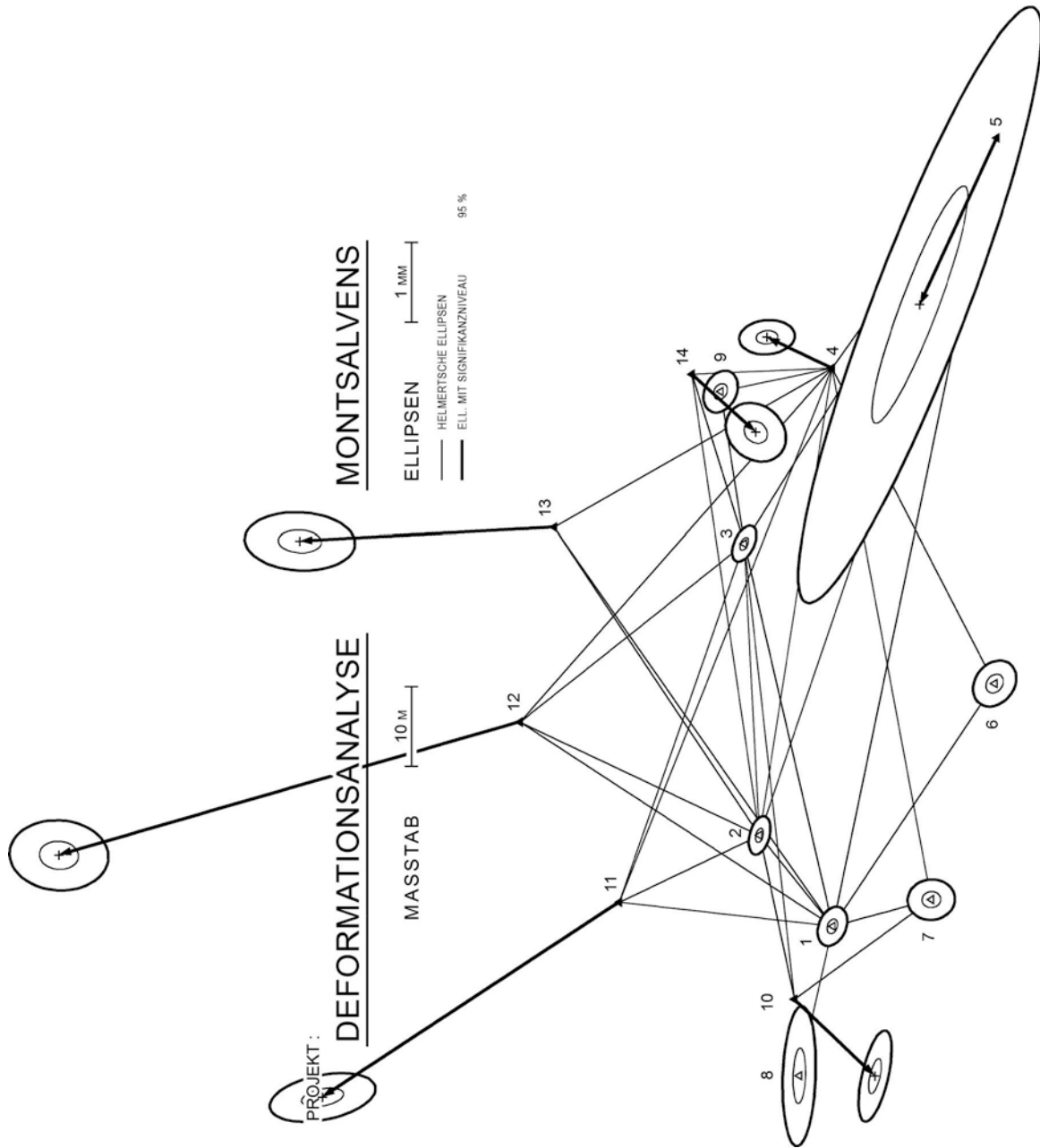
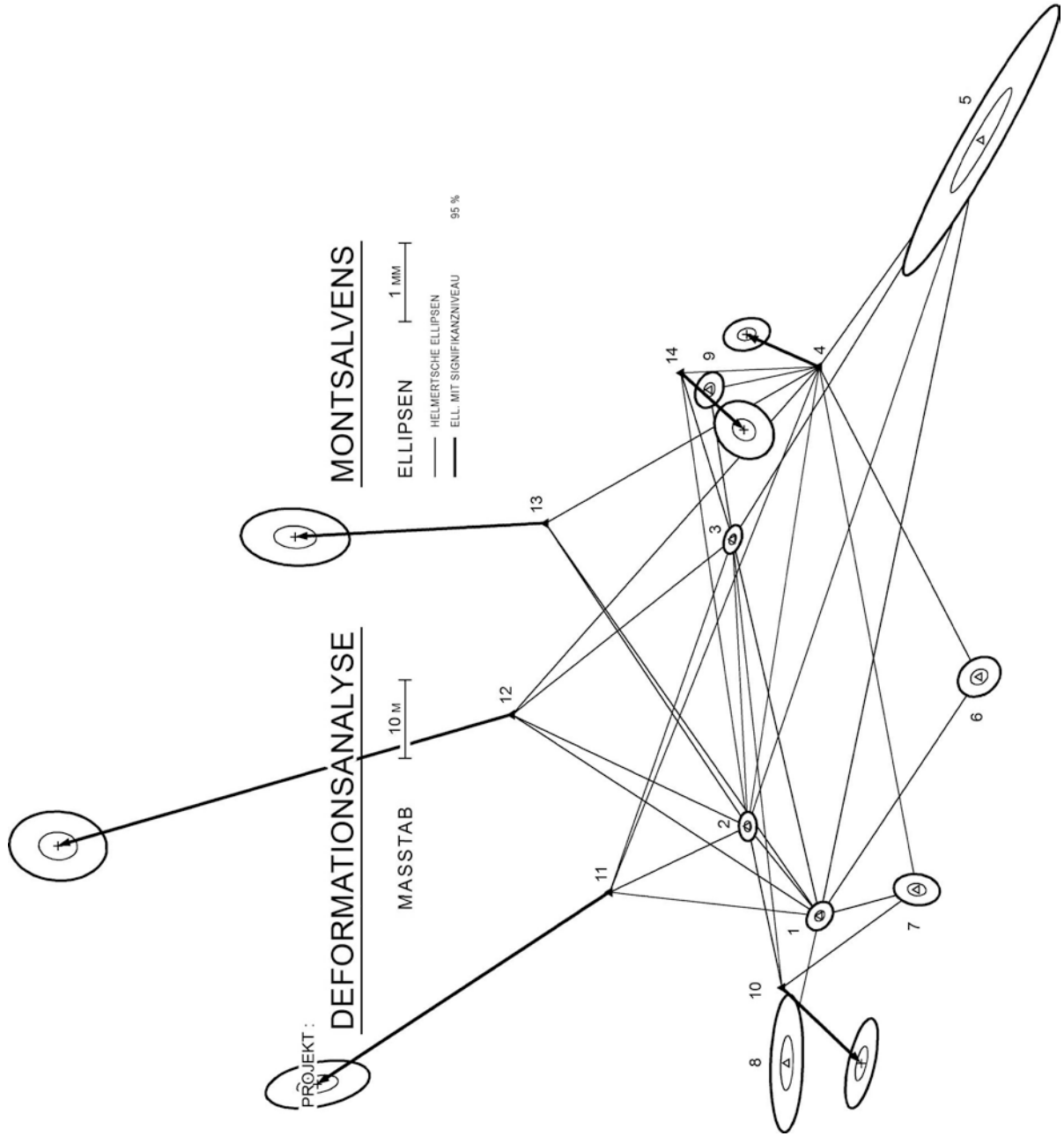


Abbildung 2



PROJEKT :

HUAYTAPALLANA

ZWEITMESSUNG 1977

MASSTAB |-----| 200 M

ELLIPSEN |-----| 1 mm

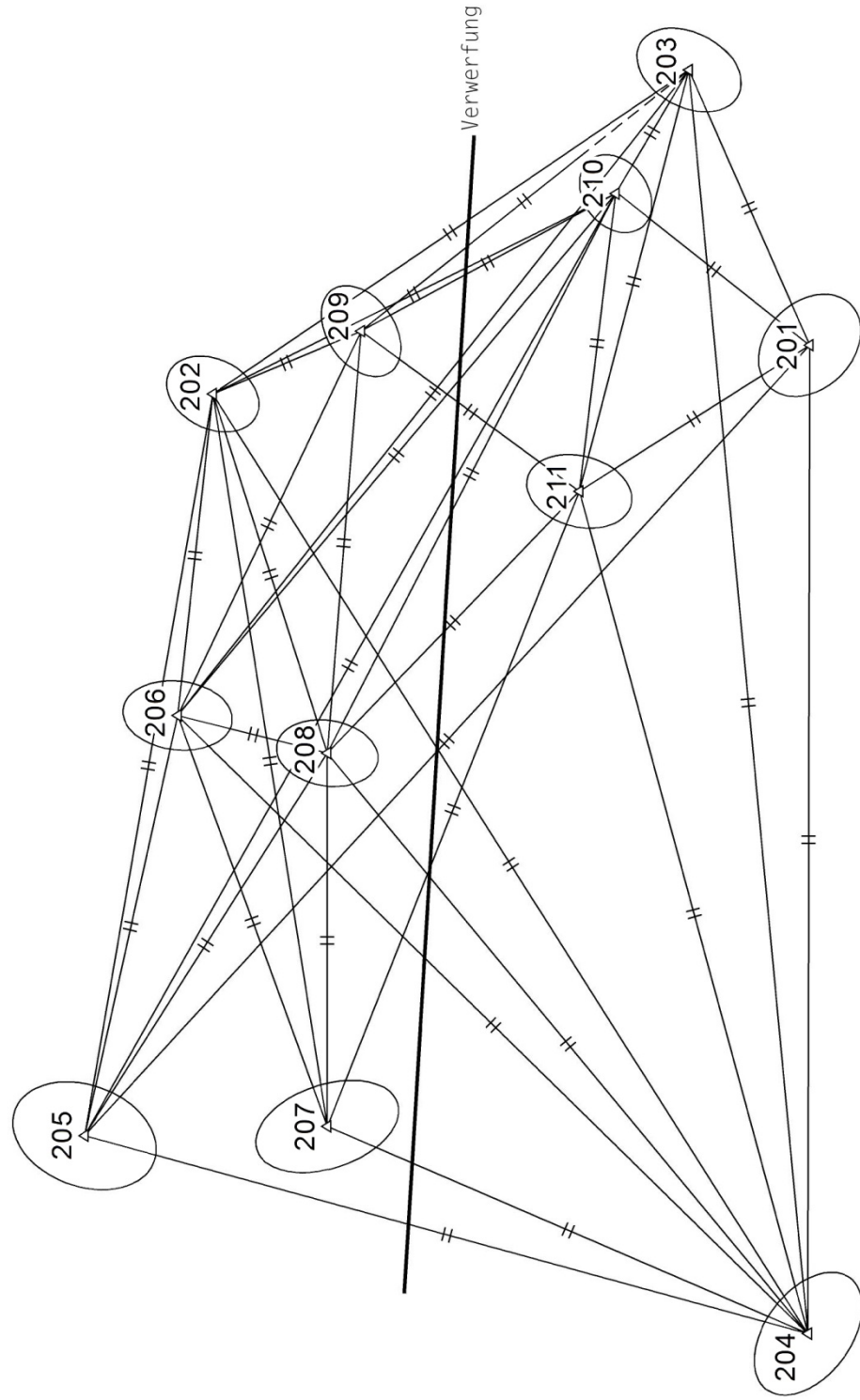


Abbildung 3

PROJEKT :

HUAYTAPALLANA

ZWEITMESSUNG 1977

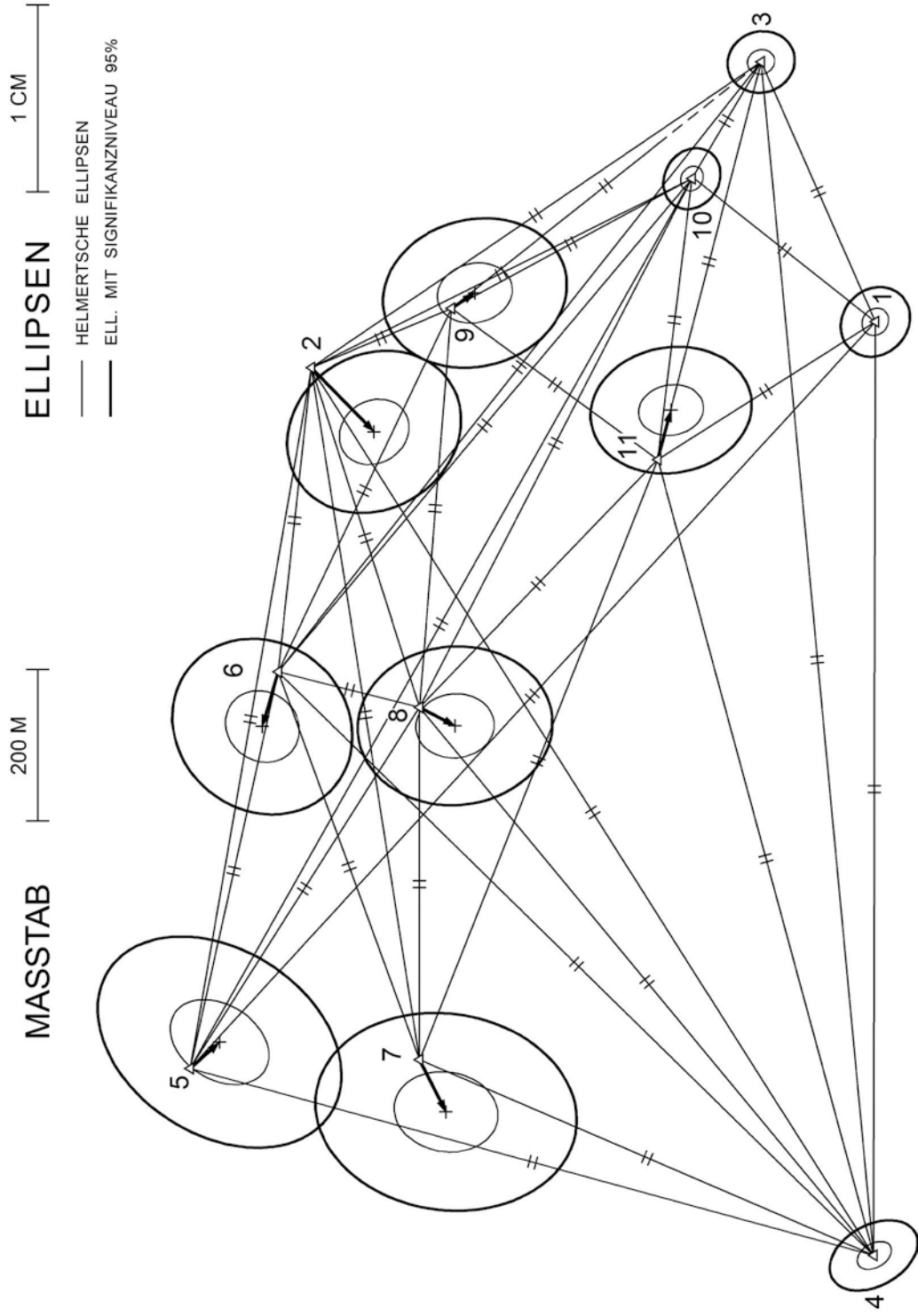


Abbildung 4

PROJEKT :

HUAYTAPALLANA

ERST ZWEITMESSUNG

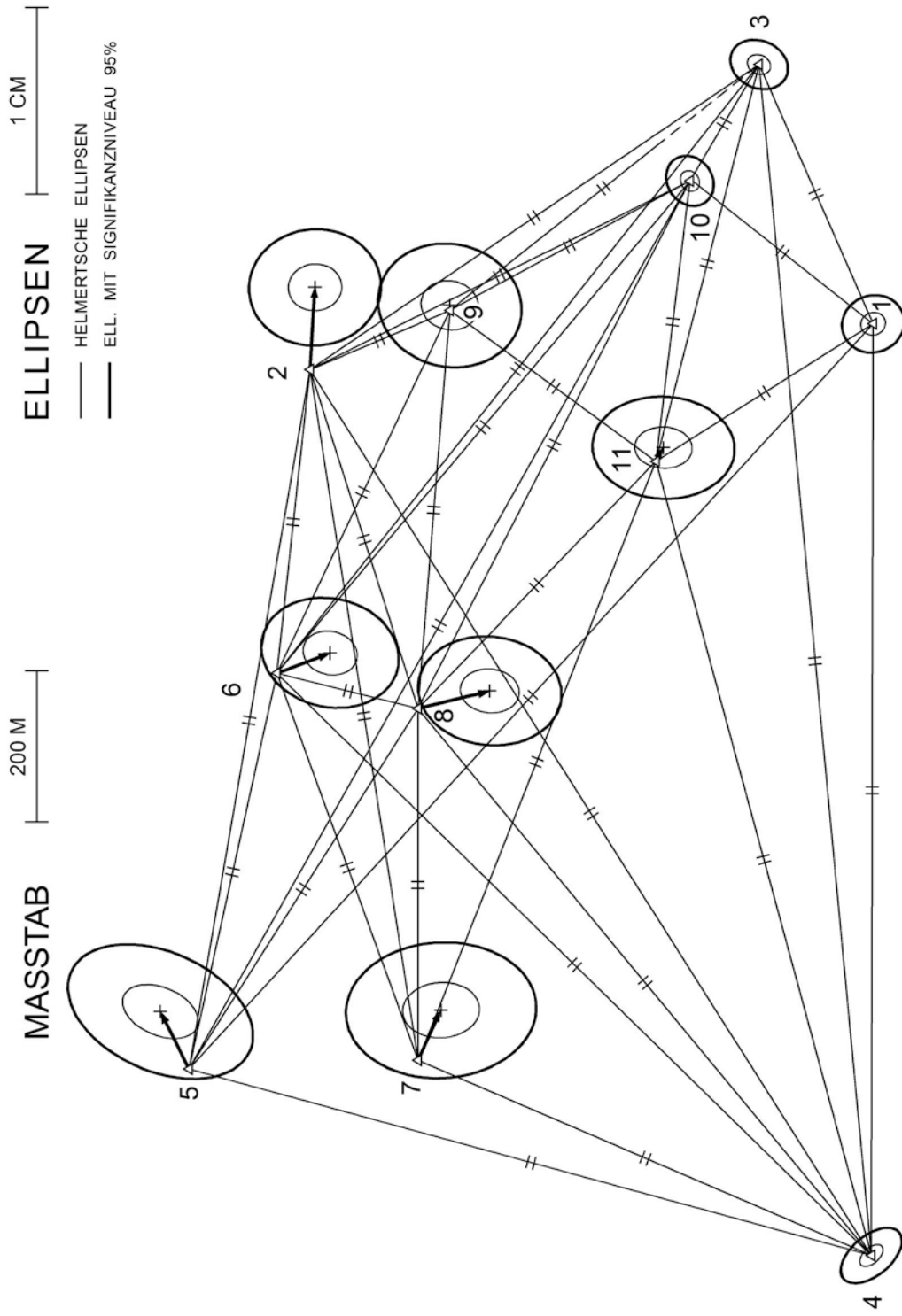


Abbildung 5

PROJEKT :

HUAYTAPALLANA

NULL ZWEITMESSUNG

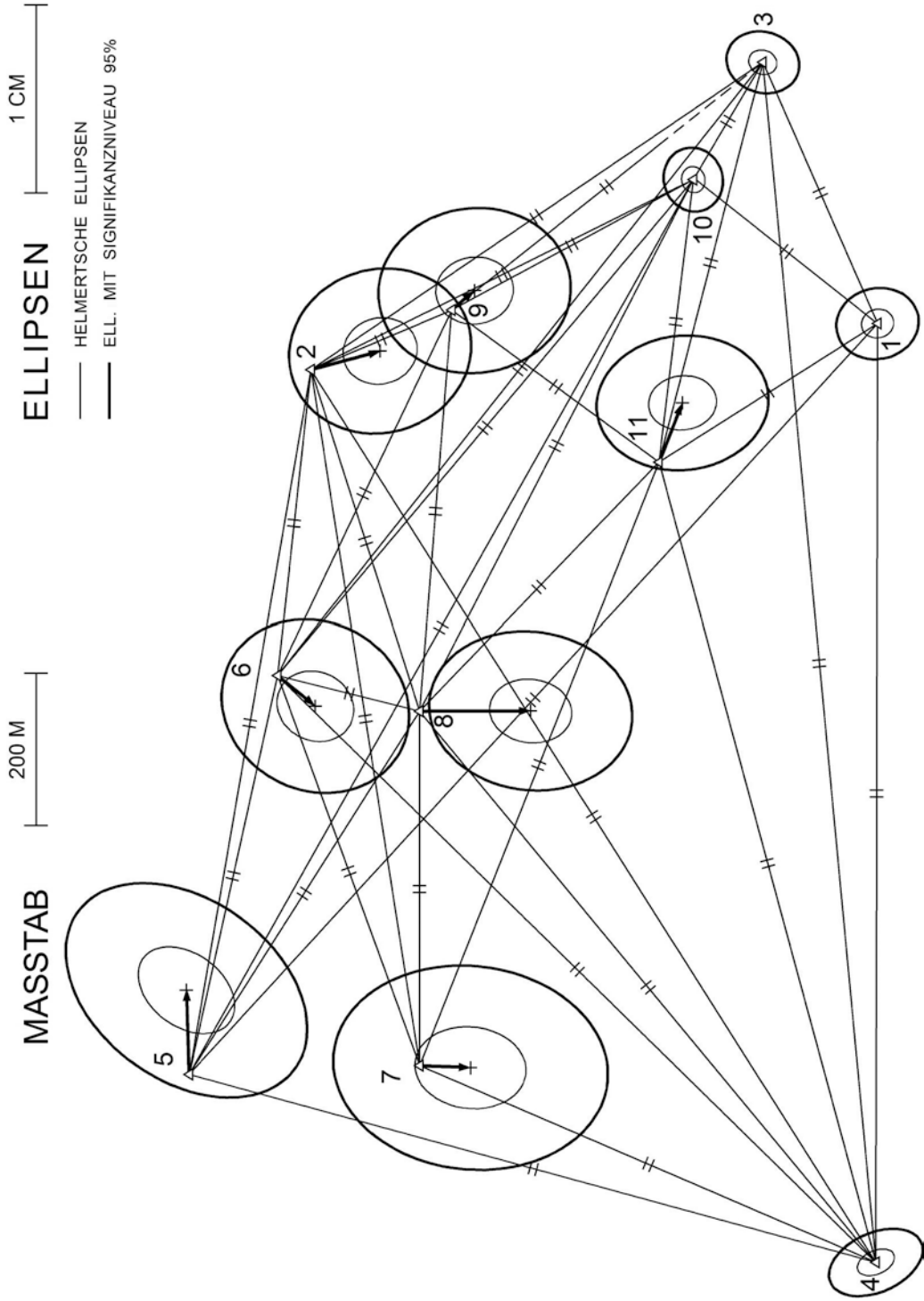


Abbildung 6

Literatur

- Pelzer, H.: Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. DGK, Reihe C, Nr. 164, München 1971.
- Koch, K.R.: Ein allgemeiner Hypothesentest für Ausgleichungsergebnisse. AVN 10/1975, S. 339-345.
- Welsch, W.: Signifikanzen und Sensitivitäten in technischen Netzen. DGK, Reihe B, Nr. 216, München 1976.
- Heck, B., Kuntz, E., Meier-Hirmer, B.: Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen. AVN 3/1977, S. 78-87.

ANALYSE VON DEFORMATIONSMESSUNGEN DURCH KLAFFUNGSZERLEGUNG

angewandt auf die Netze "MONTSALVENS" und "HUAYTAPALLANA"

H. Dupraz, W. Niemeier und H. Pelzer, Hannover

1. Vorbemerkung

Im vorliegenden Beitrag wird zur Ermittlung der Deformationen von zweimal ausgemessenen Punkthaufen das von PELZER [1971 a + b] entwickelte Auswerte- und Analyseverfahren benutzt. Dieses Verfahren basiert auf einer konsequenten Anwendung varianzanalytischer Methoden der mathematischen Statistik und kommt ohne die - meist doch hypothesenbehaftete - Annahme von Festpunkten aus.

Vor Anwendung der eigentlichen Testverfahren wird als erster Bearbeitungsschritt für jede der zwei Messungsepochen eine freie Netzausgleichung [HEISSEL, 1969; MITTERMAYER, 1971, 1972; PELZER, 1974 a] durchgeführt, als deren Ergebnis Schätzwerte für die Punktkoordinaten und die erreichten Genauigkeiten vorliegen. Durch einen globalen Kongruenztest, der auf der Berechnung der mittleren Klaffung von zweimal ausgemessenen Punkthaufen basiert, wird geprüft, ob zwischen den Beobachtungsepochen im Netz überhaupt Deformationen nachweisbar sind. Wird das Vorhandensein von signifikanten Punktlageänderungen angezeigt, ist durch weitergehende Tests eine Lokalisierung des oder der tatsächlich verschobenen Einzelpunkte durchzuführen.

Das hier benutzte Verfahren ist in den Arbeiten von PELZER [1974 b, 1976] in Teilen modifiziert und ergänzt worden und in den Veröffentlichungen von PELZER [1972] und NIEMEIER [1976] für einige Anwendungsbeispiele praxisgerecht aufbereitet worden. Im vorliegenden Beitrag wird das Grundprinzip des Globaltests als Verallgemeinerung des entsprechenden eindimensionalen Tests hergeleitet, und es werden noch einmal alle für die Untersuchung der Netze "Montsalvens" und "Huaytapallana" notwendigen Formeln aufgeführt.

2. Untersuchung einer eindimensionalen Variablen auf Veränderungen

Es sei eine eindimensionale Variable, etwa eine Strecke oder ein Winkel

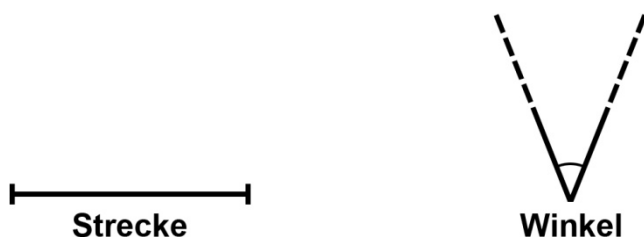


Abb. 1: Beispiele für eindimensionale Variable

zu zwei Zeitpunkten $i = 1, 2$ mehrfach beobachtet worden. Faßt man die einzelnen Meßwerte l_{ji} der i -ten Epoche zu Vektoren \underline{l}_i zusammen, so gilt

$$\underline{l}_1 = \begin{array}{c} \text{1. Epoche} \\ \left[\begin{array}{c} l_{11} \\ l_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{n1} \end{array} \right] \end{array} \quad \underline{l}_2 = \begin{array}{c} \text{2. Epoche} \\ \left[\begin{array}{c} l_{12} \\ l_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{m2} \end{array} \right] \end{array} \quad (1)$$

wobei n und m die Anzahl der Beobachtungen in den Einzelepochen ist. Betrachtet man die Messungen der Epochen unabhängig voneinander, so gelten nach den üblichen Formeln der Ausgleichsrechnung für die Mittelwerte x_i , die Verbesserungsvektoren \underline{v}_i und die empirischen Varianzen s_i^2 der Mittel die Formeln

$$\begin{array}{cc} \text{1. Epoche} & \text{2. Epoche} \\ \text{emp. Mittelwerte} & x_1 = \frac{\underline{e}^T \underline{l}_1}{n} \quad x_2 = \frac{\underline{e}^T \underline{l}_2}{m} \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{cc} \text{1. Epoche} & \text{2. Epoche} \\ \text{Verbesserungs-} & \underline{v}_1 = \underline{e} x_1 - \underline{l}_1 \quad \underline{v}_2 = \underline{e} x_2 - \underline{l}_2 \\ \text{vektoren} & \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{cc} \text{1. Epoche} & \text{2. Epoche} \\ \text{empirische Vari-} & s_1^2 = \frac{\underline{v}_1^T \underline{v}_1}{n(n-1)} \quad s_2^2 = \frac{\underline{v}_2^T \underline{v}_2}{m(m-1)} \\ \text{anz der Mittel} & \end{array} \quad (4)$$

mit dem Vektor \underline{e} als Einsvektor.

Die Frage, ob zwischen den Messungsepochen signifikante Veränderungen vorgekommen sind, ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Gleichheit der Mittelwerte. Hierzu kann in der Denkweise der mathematischen Statistik ein Test der Nullhypothese

$$\boxed{H_0 : E(x_1) = E(x_2)} \quad (5)$$

durchgeführt werden, wobei $E(x_i)$ für den Erwartungswert des empirischen Mittels steht. Zur Ableitung des entsprechenden Tests muß man von der Gültigkeit der Basishypothese

$$\boxed{H_B : E(s_1^2) = E(s_2^2) = \sigma^2} \quad (6)$$

ausgehen, d.h. von gleichen Meßgenauigkeiten in beiden Epochen (siehe Abschnitt 3).

Mit der Differenz der empirischen Mittel

$$d = x_2 - x_1 \quad (7)$$

und der zugehörigen Standardabweichung

$$s_d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \quad (8)$$

kann die Testgröße t zum Prüfen von H_0 gebildet werden:

$$t = \frac{d}{s_d} \quad (9)$$

Der Quotient t folgt bei Gültigkeit von H_0 der sogenannten "t-Verteilung", so daß die folgende Wahrscheinlichkeitsbeziehung als Grundlage des Tests dient:

$$P \{ t > t_{f,1-\alpha} \mid H_0 \} = \alpha \quad (10)$$

mit $f = n + m - 2$

Formel (10) läßt sich wie folgt deuten:

Für eine beliebig gewählte Irrtumswahrscheinlichkeit α ist bei Gültigkeit von H_0 , d.h. bei unveränderter Variabler, der empirisch ermittelte Quotient t nur in α % aller Fälle größer als der tabulierte Grenzwert $t_{f,1-\alpha}$. Die entsprechende Testaussage lautet: ist bei einer praktischen Anwendung t größer als $t_{f,1-\alpha}$, so kann mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α eine signifikante Veränderung der Variablen angenommen werden.

3. Erweiterung des Tests für das Kongruenzproblem bei geodätischen Netzen

3.1 Ausgleichung der Einzelepochen

Es sei als einfaches Beispiel ein geodätisches Netz, wie in der Abbildung 2 dargestellt, in zwei Messungsepochen ausgemessen.

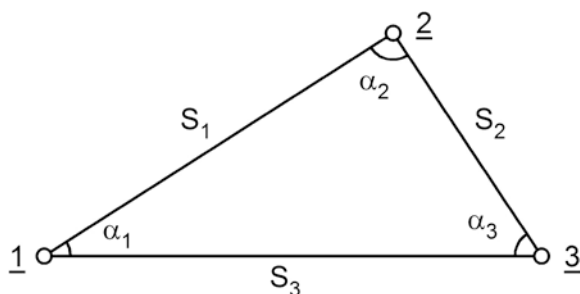


Abb. 2: Einfaches Beispiel für ein geodätisches Netz

Faßt man auch hier die einzelnen Meßwerte l_{ji} zu Beobachtungsvektoren \underline{l}_i zusammen, so gilt

$$\begin{array}{cc} \underline{l}_1 = & \underline{l}_2 = \\ \begin{array}{c} \text{1. Epoche} \\ \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} \\ (n_{1,1}) \end{array} & \begin{array}{c} \text{2. Epoche} \\ \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} \\ (n_{2,1}) \end{array} \end{array} \quad (11)$$

Zur Bestimmung der Koordinaten der Netzkpunkte werden getrennte Netzausgleichungen durchgeführt. Das funktionale Modell oder das Verbesserungsgleichungssystem hierfür ist gegeben durch

$$\underline{l}_i + \underline{v}_i = \underline{A}_i \underline{x}_i \quad (12)$$

und das stochastische Modell oder die Kovarianzmatrix durch vorgegebenes

$$\underline{K}_{l_i} = \sigma_0^2 \cdot \underline{Q}_{l_i} \quad (13)$$

Wie in der Geodäsie üblich, gelten hierbei die Bezeichnungen:

- \underline{A}_i Koeffizienten- oder Fehlergleichungsmatrix
- \underline{x}_i Unbekanntenvektor (Vektor der Koordinatenzuschläge)
- \underline{v}_i Verbesserungsvektor
- \underline{Q}_{l_i} Kofaktormatrix der Beobachtungen
- σ_0^2 Varianz der Gewichtseinheit

Für die Einzelepochen ergeben sich damit die Normalgleichungen

$$\underline{A}_i^T \underline{Q}_{l_i}^{-1} \underline{A}_i \cdot \underline{x}_i = \underline{A}_i^T \underline{Q}_{l_i}^{-1} \underline{l}_i \quad (14)$$

die hier in der abgekürzten Schreibweise

$$\underline{N}_i \cdot \underline{x}_i = \underline{n}_i \quad (15)$$

weiterverwendet werden. Da die Untersuchung von Deformationsmessungen möglichst hypothesenfrei sein sollte, wird ohne die Annahme von Festpunkten gearbeitet. Damit ist die Lagerung und Orien-

tierung des Netzes im vorgegebenen Koordinatenrahmen nicht bestimmt, es liegt - als Besonderheit der freien Ausgleichung - ein Datumsdefekt vor. Dieser Defekt drückt sich als Rangabfall von \underline{N}_i aus, so daß es eine Vielzahl von Lösungen für (15) gibt. Benutzt man jedoch als verallgemeinerte Inverse von \underline{N}_i die MOORE-PENROSE-Pseudoinverse \underline{N}_i^+ [z.B. RAO u. MITRA 1971], so erhält man wieder einen eindeutigen Unbekanntenvektor $\hat{\underline{x}}_i$,

$$\hat{\underline{x}}_i = \underline{N}_i^+ \underline{n}_i \quad , \quad (16)$$

der sich auszeichnet durch die kleinste Norm unter sämtlichen Lösungen und dessen Kofaktormatrix

$$\underline{Q}_{x_i} = \underline{N}_i^+ \quad (17)$$

minimale Spur unter sämtlichen möglichen Kofaktormatrizen aufweist.

Die Berechnung der Pseudoinverse ist besonders anschaulich, wenn man von einer Spektralzerlegung Normalgleichungsmatrix \underline{N}_i ausgeht:

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} \underline{H}_i & \underline{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_{H_i} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{H}_i^T \\ \underline{G}_i^T \end{bmatrix} = \underline{H}_i \underline{\Delta}_{H_i} \underline{H}_i^T \quad (18)$$

mit $\underline{\Delta}_{H_i}$: Spektralmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_i > 0$

\underline{H}_i : Modalmatrix zu den Eigenwerten $\lambda_i > 0$

\underline{G}_i : Modalmatrix zu den verschwindenden
Eigenwerten $\lambda_i = 0$

Die MOORE-PENROSE-Pseudoinverse ist dann nach der Formel

$$\underline{N}_i^+ = \underline{H}_i \underline{\Delta}_{H_i}^{-1} \underline{H}_i \quad (19)$$

zu berechnen, wobei die Inverse $\underline{\Delta}_{H_i}^{-1}$ der Spektralmatrix leicht aus den Reziprokwerten der nicht verschwindenden Eigenwerte zu bilden ist.

Aus den Verbesserungsvektoren, die analog zu Formel (3) gebildet werden,

$$\underline{v}_i = \underline{A}_i \hat{\underline{x}}_i - \underline{l}_i \quad (20)$$

kann wie üblich ein Schätzwert s_i^2 für die Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 aus

$$s_i^2 = \frac{\underline{v}_i^T \underline{Q}_i^{-1} \underline{v}_i}{f_i} \quad (21)$$

berechnet werden. Die Anzahl der Freiheitsgrade f_i errechnet sich nach der Formel

$$f_i = n_i - u_i + d_i \quad (22)$$

mit den Bezeichnungen

- n_i Anzahl der Beobachtungen
- u_i Anzahl der Unbekannten
(Koordinaten- und Orientierungsunbekannte)
- d_i Rangabfall (Defekt) von \underline{N}_i .

3.2 Herleitung der Teststatistik

Die Frage, ob zwischen den Messungsepochen Deformationen aufgetreten sind, kann bei geometrischer Betrachtungsweise als Frage nach der Kongruenz der Netze aufgefaßt werden.

Für das recht einfache Netz der Abbildung 2 ist die Analogie zum Problem der "kongruenten Dreiecke" aus der Schulmathematik besonders deutlich. Bei statistischer Betrachtungsweise sind zweimal ausgemessene Netze genau dann kongruent, wenn die Nullhypothese

$$\boxed{H_0 : E(\underline{x}_1) = E(\underline{x}_2)} \quad (23)$$

gilt, also die Erwartungswerte der Koordinatenvektoren gleich sind. Als Ausgangsgröße für einen Test wird daher entsprechend (7) sinnvollerweise der Differenzvektor

$$\underline{d} = \underline{\hat{x}}_2 - \underline{\hat{x}}_1 \quad (24)$$

aus den Koordinatenschätzungen der einzelnen Epochen gebildet, dessen Kofaktorenmatrix gegeben ist durch

$$\underline{Q}_d = \underline{Q}_{x_1} + \underline{Q}_{x_2} \quad (25)$$

Auch bei diesen mehrdimensionalen Untersuchungen muß von der Gültigkeit der Basishypothese

$$\boxed{H_B : E(s_1^2) = E(s_2^2) = \sigma^2} \quad (26)$$

ausgegangen werden, also von gleichen Genauigkeiten in beiden Messungsepochen. Zum Prüfen von H_B wird ein F-Test der empirischen Schätzungen s_i^2 durchgeführt, dessen Wahrscheinlichkeitsbeziehung

$$P\left\{\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \mid H_B\right\} = \alpha \quad (27)$$

besagt, daß der Quotient s_1^2 / s_2^2 bei Gültigkeit der Basishypothese nur in α -Prozent aller Fälle größer als der tabulierte Grenzwert $F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ ausfällt.

Ist der empirisch ermittelte Quotient größer als der Grenzwert, muß die Hypothese H_B abgelehnt werden und die Gewichtsansätze der Einzelausgleichungen müssen entsprechend modifiziert werden.

Bei Gültigkeit von H_B läßt sich durch Zusammenfassung der beiden Einzelschätzungen ein statistisch besser bestimmter Schätzwert berechnen:

$$s^2 = \frac{\underline{v}_1^T \underline{Q}_1^{-1} \underline{v}_1 + \underline{v}_2^T \underline{Q}_2^{-1} \underline{v}_2}{f} \quad (28)$$

mit $f = f_1 + f_2$.

Zur Vorbereitung des eigentlichen Tests möge nun die folgende Überlegung dienen. Bei Gültigkeit von H_0 dürften die Koordinatendifferenzen im Vektor \underline{d} nur zufälliger Natur sein, d. h. als Auswirkung zufällig verteilter Messungsfehler erklärbar sein. Dann kann die erzielte Meßgenauigkeit aber auch aus dem Vektor \underline{d} abgeschätzt werden. Nach PELZER [1971] ist der entsprechende Schätzwert nach der Formel

$$\theta^2 = \frac{\underline{d}^T \underline{Q}_d^+ \underline{d}}{h} \quad (29)$$

mit $h = u - d$

zu berechnen. Da dieser zweite Schätzwert θ^2 für die Meßgenauigkeit aus Koordinatendifferenzen berechnet ist, wird er auch als "mittlere Klaffung" bezeichnet. Es kann gezeigt werden, daß θ^2 von s^2 aus (28) stochastisch unabhängig ist. Damit folgt der Quotient

$$\bar{F} = \frac{\theta^2}{s^2} \quad (30)$$

im allgemeinen Fall einer nichtzentralen Fisher-Verteilung, die bei Gültigkeit von (23), d.h. bei kongruenten Netzen, in die zentrale F-Verteilung übergeht. Dieser Quotient \bar{F} kann damit direkt als Testgröße zum Überprüfen von H_0 benutzt werden und es gilt die Wahrscheinlichkeitsbeziehung

$$P \{ \bar{F} > F_{h, f, 1-\alpha} \mid H_0 \} = \alpha \quad (31)$$

Ist der berechnete Wert \bar{F} in einem praktischen Beispiel größer als der tabulierte Grenzwert $F_{h, f, 1-\alpha}$, so wird die Nullhypothese verworfen. Die Koordinatendifferenzen in \underline{d} sind dann nicht mehr zufälliger Natur, es muß auf das Vorliegen signifikanter Deformationen geschlossen werden. Dieser allgemeine Kongruenztest wird auch Globaltest genannt, da als Testergebnis eine allgemeine Aussage gewonnen werden kann, ob irgendwo im Netz Deformationen vorgekommen sind, ob also global

Abweichungen von der Kongruenz vorliegen. In modifizierter Form wird im nächsten Abschnitt dieses Testverfahren jedoch auch zur Lokalisierung von Deformationen, d.h. zum Erkennen von Einzelpunktverschiebungen benutzt.

Bemerkungen:

- a) Es ist nicht erforderlich, daß für die beiden Epochen derselbe Beobachtungsplan gilt. Sowohl die Art der Messungselemente (z.B. Richtungen oder Strecken) als auch die Anzahl der Beobachtungen kann variieren. Damit sind Unterschiede im Design 2. Art [GRAFAREND, 1974] zulässig.
- b) Es ist nicht erforderlich, daß in beiden Epochen dieselben Punkte angemessen sind. In der Praxis kommen Punktzerstörungen ja auch relativ häufig vor. Eine Aussage über die Kongruenz der Netze ist natürlich nur für die in beiden Epochen identischen Punkte zu machen. Die numerische Behandlung dieser Unterschiede im Design 1. Art [GRAFAREND, 1974] erfolgt durch Elimination der nichtidentischen Punkte bereits bei der Ausgleichung [PELZER, 1974 b; und NIEMEIER, 1976].
- c) Es ist nicht erforderlich, daß als Ausgleichungsunbekannte Punktkoordinaten eingeführt werden. Eine Formulierung mit schätzbaren Größen (z.B. Punktabstände, Winkel, Streckenverhältnisse) ändert an dem Testprinzip nichts. Wegen der geometrischen Anschaulichkeit und weiten Verbreitung in der Geodäsie wird in diesem Artikel jedoch durchgehend die Koordinatendarstellung benutzt.

4. Erkennen des stabilen Netzteils durch "Lokalisierung" der verschobenen Punkte

Kann nach dem Ergebnis des globalen Kongruenztests auf das Vorliegen von signifikanten Punktverschiebungen irgendwo im Netz geschlossen werden, so sind in einer weiteren Bearbeitungsstufe der oder die tatsächlich verschobenen Einzelpunkte aufzuweisen. Diese Lokalisierung soll hier nach der Methode der maximalen Klaffungsanteile durchgeführt werden [PELZER, 1974 b; NIEMEIER, 1976], da die Testaussage bei diesem Vorgehen in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Globaltests steht.

Der Grundgedanke dieser Lokalisierungsmethode ist eine Zerlegung der mittleren Klaffung θ^2 nach (29) in zwei unabhängige Summanden. Dazu wird zunächst der Vektor \underline{d} aus (24) in zwei Subvektoren \underline{d}_F und \underline{d}_B aufgespalten

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_F \\ \underline{d}_B \end{bmatrix}, \tag{32}$$

und diese Aufteilung auch auf die Inverse der zugehörigen Kofaktormatrix \underline{Q}_d^+ ausgedehnt

$$\underline{Q}_d^+ = \begin{bmatrix} \underline{P}_{FF} & \underline{P}_{FB} \\ \underline{P}_{BF} & \underline{P}_{BB} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Für die quadratische Form (29) gilt damit die Summendarstellung

$$\underline{d}^T \underline{Q}_d^+ \underline{d} = \underline{d}_F^T \underline{P}_{FF} \underline{d}_F + 2 \underline{d}_F^T \underline{P}_{BF} \underline{d}_B + \underline{d}_B^T \underline{P}_{BB} \underline{d}_B \tag{34}$$

Eine Aufteilung in nur zwei Summanden gelingt, wenn man die folgenden Transformationen einführt:

$$\bar{\underline{d}}_B = \underline{d}_B + \underline{P}_{BB}^{-1} \underline{P}_{BF} \underline{d}_F \quad (35)$$

$$\bar{\underline{P}}_{FF} = \underline{P}_{FF} - \underline{P}_{FB} \underline{P}_{BB}^{-1} \underline{P}_{BF} \quad (36)$$

Durch Einsetzen kann leicht verifiziert werden, daß jetzt statt (34) die Zerlegung

$$\underline{d}^T \underline{Q}_d^+ \underline{d} = \underline{d}_F^T \bar{\underline{P}}_{FF} \underline{d}_F + \bar{\underline{d}}_B^T \underline{P}_{BB} \bar{\underline{d}}_B \quad (37)$$

gilt, wobei der erste Summand den gesamten Klaffungsanteil der Koordinatendifferenzen des Vektors \underline{d}_F enthält und der zweite Summand nur den Klaffungsanteil der Komponenten von \underline{d}_B . Durch geeignete Aufteilung kann so die mittlere Klaffung für jede Gruppe von Punkten bzw. für jeden Einzelpunkt berechnet werden.

Bei der praktischen Durchführung der Lokalisierung werden der Reihe nach die Koordinaten von jedem Punkt in den Subvektor \underline{d}_B geschrieben, also quasi jeder Punkt einzeln verdächtig, signifikante Verschiebungen aufzuweisen. Bei insgesamt k Punkten erhält man bei diesem Vorgehen aus der Zerlegung (37) auch k verschiedene Klaffungsanteile θ_j^2 , die hier nach der Formel

$$\theta_j^2 = \left(\frac{\bar{\underline{d}}_B \bar{\underline{P}}_{BB} \bar{\underline{d}}_B}{m} \right)_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (38)$$

mit

m : Anzahl der Koordinaten des Punktes j

berechnet werden.

Aus diesen Werten wird der maximale Klaffungsanteil θ_{\max}^2 ermittelt:

$$\theta_{\max}^2 = \max (\theta_j^2 \text{ für } j = 1, 2, \dots, k). \quad (39)$$

Zeigt also der Globaltest nach (31) signifikante Deformationen an, so ist es gerechtfertigt, hierfür vor allen anderen den Punkt mit dem maximalen Klaffungsanteil verantwortlich zu machen, also diesen Punkt als signifikant verschoben anzusehen. Um zu überprüfen, ob innerhalb der verbliebenen Punkte noch weitere signifikante Punktverschiebungen nachweisbar sind, ist für die Restklaffung aus (37)

$$\theta_{\text{Rest}}^2 = \frac{\underline{d}_F^T \bar{\underline{P}}_{FF} \underline{d}_F}{h - m} \quad (40)$$

wieder ein globaler Kongruenztest durchzuführen, für den die entsprechende Wahrscheinlichkeits-

beziehung lautet:

$$P\left\{\frac{\Theta_{\text{Rest}}^2}{s^2} > F_{h-m, f, 1-\alpha} \mid H_0\right\} = \alpha \quad . \quad (41)$$

Zeigt dieser neuerliche Globaltest das Vorliegen weiterer signifikanter Punktverschiebungen an, so ist die Lokalisierung zu wiederholen, allerdings jetzt mit den Ausgangsgrößen \underline{d}_F statt \underline{d} in (32) und \bar{P}_{FF} statt \underline{Q}_d^+ in (33). Die Gesamtuntersuchung ist abgeschlossen, wenn für die verbliebenen Netzpunkte im Globaltest für die Restklaffung (41) die Nullhypothese nicht mehr verworfen werden kann.

Geometrisch kann diese Zerlegung in Klaffungsanteile als wiederholte Helmertransformations mit wechselnden Paßpunkten interpretiert werden. In der Abbildung 3 ist dieses Vorgehen für ein schematisches Netz mit vier Punkten skizziert.

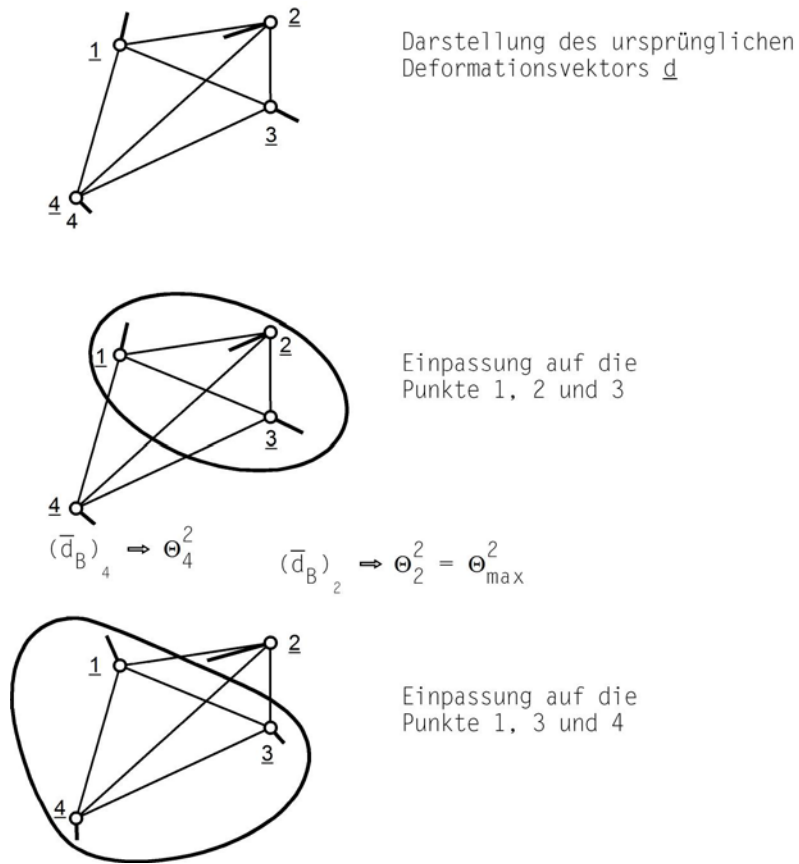


Abb. 3: Geometrische Deutung der Lokalisierung

Bei der Lokalisierung wird durch die Aufspaltung des Differenzvektors \underline{d} in \underline{d}_F und \underline{d}_B und die anschließenden Transformationen quasi eine Helmertransformations durchgeführt, wobei die Punkte aus dem Vektor \underline{d}_F jeweils als Paßpunkte betrachtet werden. Der Reihe nach wird jeder Punkt als

beweglich angesehen, also seine Koordinatendifferenzen in den Vektor \underline{d}_B geschrieben. Der transformierte Vektor $\bar{\underline{d}}_B$ ergibt nun das lineare Maß der Verschiebung bei gegenseitig günstigster Lagerung aller übrigen Punkte. Das entsprechende statistische Maß ist der Klaffungsanteil θ_j^2 .

Aus dieser geometrischen Betrachtung wird deutlich, daß stets nur ein Punkt lokalisiert werden kann, da sich bei mehreren signifikant verschobenen Punkten sogenannte "Verschmierungseffekte" bemerkbar machen (siehe auch das Zahlenmaterial bei Montsalvens).

5. Untersuchung des Netzes Montsalvens

5.1 Gewichtsfestsetzungen und Einzelausgleichungen

Als erstes Anwendungsbeispiel dieser Analyseverfahren wird das zweidimensionale Überwachungsnetz der Staumauer Montsalvens (siehe Abbildung 4) mit 4 Beobachtungspunkten, 5 Orientierungs- oder Versicherungspunkten und 5 Objektpunkten untersucht. Zu diesem Beispiel liegen für zwei Messungs-epochen vollständige Feldbücher der Richtungsmessungen und die Ergebnisse der Streckenmessungen einschl. der empirischen Standardabweichungen vor. Zur Beurteilung der Homogenität des Beobachtungsmaterials wird durch einen BARTLETT-Test [z.B. WOLF, 1975] getrennt nach Richtungen und Strecken überprüft, ob die empirischen Standardabweichungen aus derselben Grundgesamtheit stammen. Das Testergebnis widerlegt diese Hypothese nicht, so daß sowohl die Streckenmessungen als auch die Richtungsmessungen beider Epochen die Basishypothese nicht widerlegen.

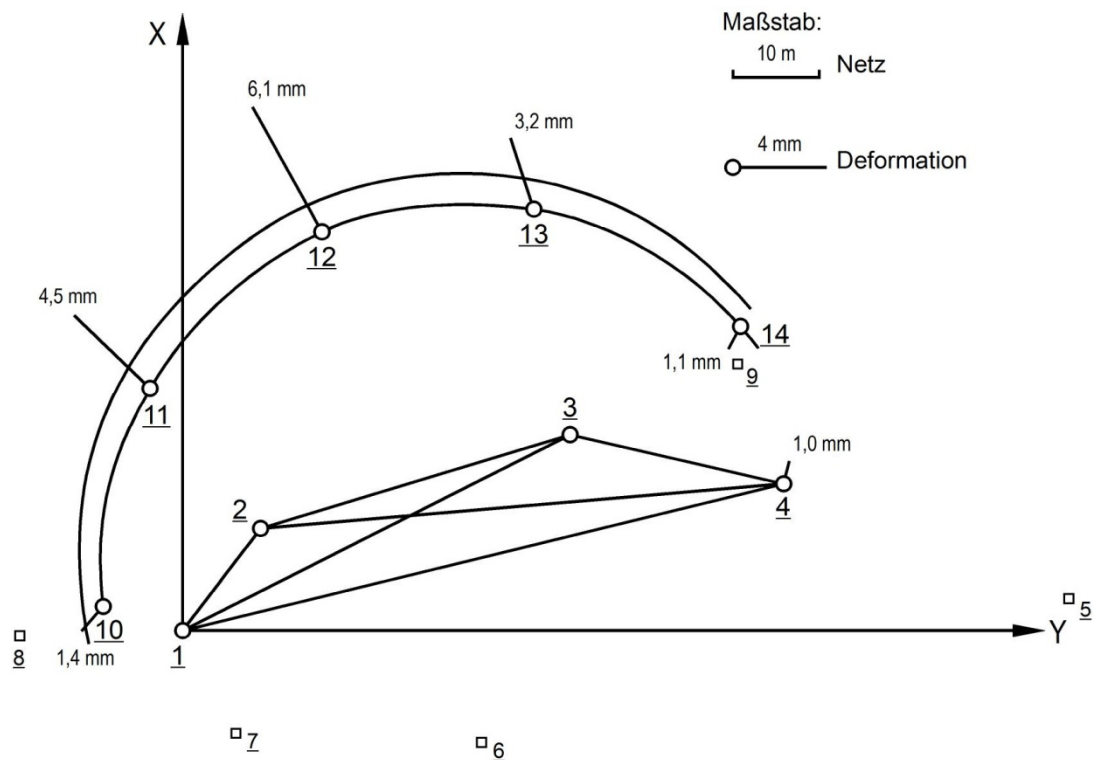


Abb. 4: Netzskizze für das Beispiel Montsalvens und Ergebnisse der Deformationsanalyse

Durch quadratische Mittelung werden die Einzelschätzungen daher zusammengefaßt und es ergeben sich für die Gewichtsfestsetzung die folgenden Ausgangswerte:

Standardabweichung für eine gemittelte Richtung $s_r = 0,31 \text{ mgon}$

Standardabweichung für die Streckenmittel $s_s = 0,252 \text{ mm}$

Wählt man für die Standardabweichung der Gewichtseinheit a priori den Wert

$$s_0 = 0,31 \text{ mgon}$$

so erhält man die Gewichte

$$P_r = 1 \quad \text{für die Richtungen}$$

$$P_2 = 1,54 \quad \text{für die Strecken}$$

Mit diesen Gewichten werden getrennte Einzelausgleichungen nach den in Abschnitt 3.1 angegebenen Formeln für freie Netze gerechnet.

Untersuchungsobjekt: Staumauernetz Montsalvens / Schweiz								
Pkt. Nr.	Näherungs-koordinaten		Koordinaten-zuschläge		ausgeglichenere Koordinaten		Standardabweichung für die Koordinatenschätzungen	
	γ^0 [m]	χ^0 [m]	y [mm]	x [mm]	$\hat{\gamma}$ [m]	$\hat{\chi}$ [m]	s_y [mm]	s_x [mm]
1	100.1030	100.0108	.79	- .68	100.1038	100.0101	.14	.09
2	109.0024	111.6015	.81	- .59	109.0032	111.6009	.14	.08
3	144.0128	122.1803	.62	- .87	144.0134	122.1794	.14	.08
4	168.0141	116.6922	.98	- .00	168.0151	116.6922	.16	.13
5	200.6220	103.7114	-1.83	- .51	200.6202	103.7109	1.24	.34
6	134.1987	87.6612	.81	- .70	134.1995	87.6605	.18	.16
7	106.2099	88.8546	.72	- .70	106.2106	88.8539	.14	.18
8	81.0097	99.5386	.49	- .51	81.0102	99.5381	.56	.16
9	161.8670	129.5510	.89	- .87	161.8679	129.5501	.17	.12
10	90.1674	102.4481	- .05	-1.85	90.1674	102.4463	.25	.09
11	96.8142	126.6758	-2.32	2.40	96.8119	126.6782	.19	.19
12	115.7716	143.9777	-2.11	4.44	115.7695	143.9821	.18	.21
13	140.4285	145.6872	- .12	2.24	140.4284	145.6894	.17	.23
14	163.0787	133.6097	.32	-1.79	163.0790	133.6079	.18	.14

Tabelle 1: Ergebnis der freien Netzausgleichung für die 2. Messungsepoche des Netzes Montsalvens

In der Tabelle 1 ist als Beispiel der Ergebnisausdruck für die 2. Epoche wiedergegeben. Da bei dieser Berechnung die ausgeglichenen Koordinaten der ersten Messungsepoche als Näherungskordinaten eingeführt wurden, geben die Unbekannten, d.h. die geschätzten Koordinatenzuschläge, ein genähertes Bild der relativen Bewegungen zwischen beiden Epochen. Aus den empirischen Standard-

abweichungen für die einzelnen Koordinaten kann man die sehr genaue Punktbestimmung ablesen. Allein die Punkte 5 und 8 weisen in y-Richtung infolge der schleifenden Schnitte größere Standardabweichungen auf, doch ist zu berücksichtigen, daß diese Punkte nur die Funktion von Orientierungspunkten haben.

Um grobe Datenfehler zu erkennen, wurde die programmtechnisch einfach zu realisierende Analyse der normierten Verbesserungen $v_i / \sqrt{Q_{v_i v_i}}$ nach UOTILA [1976] durchgeführt. Grobe Fehler konnten jedoch nicht nachgewiesen werden. Die Standardabweichungen für die Gewichtseinheit a posteriori werden mit $s_1 = 0,27$ mgon in der 1. und $s_2 = 0,35$ mgon in der 2. Epoche abgeschätzt. Um zu prüfen, ob die Basishypothese (26) gilt, wird ein F-Test der unabhängigen Schätzungen s_i^2 nach (27) durchgeführt. Da der empirische Wert $s_2^2 / s_1^2 = 1,69$ kleiner als der tabulierte Grenzwert $F_{29,29,0.95} = 1,86$ ausfällt, kann von gleicher Meßgenauigkeit in beiden Epochen ausgegangen werden. Gleichzeitig wird damit die Gewichtsschätzung a priori bestätigt. Die Einzelschätzungen werden nach (28) zu einem Gesamtschätzwert $s = 0,316$ mgon zusammengefaßt. Damit können diese zufriedenstellenden Ergebnisse der Einzelausgleichungen als Ausgangswerte für eine Deformationsanalyse betrachtet werden.

5.2 Untersuchung der Stabilität der Stützpunkte

Als zweiter, von s^2 stochastisch unabhängiger Schätzwert ist nach (28) die mittlere Klaffung θ^2 zu berechnen. Nach (30) bzw. (31) ist damit der Globaltest zur Überprüfung der Kongruenz der Netze durchzuführen. Tabelle 2 enthält die numerischen Werte für diesen Globaltest für verschiedene Bearbeitungsstufen.

Untersuchungsobjekt: Staumauernetz Montsalvens / Schweiz				
Bearbeitungsstufe	globaler Kongruenztest			nächster Arbeitsabschnitt
	empirischer Wert $\bar{F} = \frac{\theta^2}{s^2}$	tabulierter Grenzwert $F_{h,f,1-\alpha}$	signifikante Deformationen	
alle 14 Punkte	54,12	1,70	ja	Aufteilung: Stütz- und Objektpunkte
9 Stützpunkte	7,83	1,83	ja	Lokalisierung: → Tabelle 3
Stützpunkte ohne Punkt 4	0,50	1,88	nein	Untersuchung der Objektpunkte → Tabelle 4

Tabelle 2: Globaltests für das Netz Montsalvens auf verschiedenen Bearbeitungsstufen

In der ersten Zeile ist der globale Kongruenztest für sämtliche 14 Punkte durchgeführt worden. Bei dem Problem der Staumauerüberwachung ist jedoch seit alters her eine zweistufige Analyse üblich, bei der zunächst überprüft wird, ob die Stützpunkte tatsächlich als "fest" zu betrachten sind und erst anschließend eine Untersuchung der Objektpunkte vorgenommen wird. Bei diesem Vorgehen trägt man der Tatsache Rechnung, daß ein Erkennen möglicher Punktlageänderungen der Stützpunkte die wesentliche Voraussetzung für eine korrekte Analyse der Bewegungen der Objektpunkte ist. Durch die zweistufige Analyse wird diese sicher richtige Überlegung methodisch berücksichtigt, obwohl bei dem hier benutzten Verfahren einer Lokalisierung nach dem maximalen Klaffungsanteil die einstufige Analyse zum selben Ergebnis führen würde. Nach den Formeln (32) bis (37) des Kapitel 4 berechnet man den Klaffungsanteil der Stützpunkte, indem jetzt statt der Aufteilung in \underline{d}_F und \underline{d}_B zunächst eine Aufteilung in

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_s \\ \underline{d}_0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

und

$$\underline{Q}_d^+ = \begin{bmatrix} \underline{P}_{ss} & | & \underline{P}_{s0} \\ \hline \underline{P}_{0s} & | & \underline{P}_{00} \end{bmatrix} \quad (43)$$

vorgenommen wird, also in einen Subvektor \underline{d}_s die Koordinatendifferenzen der Stützpunkte und in \underline{d}_0 die entsprechenden Komponenten der Objektpunkte geschrieben werden. Die mittlere Klaffung der Stützpunkte errechnet sich dann entsprechend (40) zu

$$\theta_s^2 = \frac{\underline{d}_s^T \bar{\underline{P}}_{ss} \underline{d}_s}{h_s} \quad (44)$$

mit

h_s : Anzahl der Stützpunktkoordinaten vermindert um den Rangabfall des Systems

Für das vorliegende Anwendungsbeispiel ist das Testergebnis dieser Untersuchung der Stützpunkte in der 2. Zeile der Tabelle 2 aufgeführt. Da das Vorliegen von Deformationen angezeigt wird, ist nun als nächster Bearbeitungsschritt eine Lokalisierung nach Abschnitt 4, ausgehend von \underline{d}_s und $\bar{\underline{P}}_{ss}$ vorzunehmen. Das Ergebnis ist in Tabelle 3 wiedergegeben.

Lokalisierung

1. Durchlauf

Anzahl der Punkte 9

Pkt.Nr.	Differenz-Vektoren		THETA-QUADRAT- ANTEIL		
	DB (QUER)				
1	DX	- .04	DY	.01	1.163
2	DX	.05	DY	.03	1.259
3	DX	- .38	DY	- .45	145.775
4	DX	1.01	DY	.18	548.410
5	DX	.48	DY	-5.88	272.385
6	DX	.00	DY	.02	.056
7	DX	- .02	DY	- .03	.969
8	DX	.12	DY	- .28	9.736
9	DX	- .25	DY	- .29	67.299

Die Verschiebung des Punktes 4 ist signifikant

Restklaffung

THETA-QUADRAT-REST/M0/M0:	.502
QUANTILE DER F-VERTEILUNG:	1.880
IRRTUMSWAHRSCHEINLICHKEIT:	.050
FREIHEITSGRADE IM ZAEHLER:	13
FREIHEITSGRADE IM NENNER:	58

Tabelle 3: Lokalisierung im Bereich der Stützpunkte für das Netz Montsalvens

Die Differenzen $(\bar{d}_B)_j$ in Spalte 2 und 3 entsprechen nach Abbildung 3 den Koordinatenunterschieden jedes Punktes relativ zu der Gesamtheit der übrigen Punkte. Es fällt auf, daß der Punkt 5 zwar die linear größte Bewegung, jedoch der Punkt 4 den maximalen Klaffungsanteil aufweist. In der Arbeit DUPRAZ und NIEMEIER [1978] ist über das Beurteilungskriterium des wesentlichen Eigenvektors gezeigt, daß beim Punkt 5 eine Schwachzone des Netzes vorliegt und daher die Bewegung dieses Punktes noch wesentlich größer sein müßte, um signifikant nachweisbar zu sein. Der entsprechende Test für die Restklaffung Θ_{Rest}^2 nach Erkennen der Bewegung des Punktes 4 ist im unteren Teil der Tabelle 3 aufgeführt. Der numerische Wert ist wesentlich kleiner als der entsprechende Grenzwert, woraus geschlossen werden kann, daß weitere Deformationen innerhalb der Stützpunkte nicht nachweisbar sind.

5.3 Untersuchung der Bewegungen der Objektpunkte

Entsprechend der Untersuchung der Stabilität der Stützpunkte kann eine Analyse der Bewegungen der Objektpunkte über die Berechnung der mittleren Klaffung erfolgen. Bei der hierzu notwendigen endgültigen Aufteilung des Differenzvektors \underline{d} in Stützpunkte und Objektpunkte werden die Komponenten der signifikant verschobenen Stützpunkte in den Subvektor \underline{d}_0 übernommen. Nach Durchführung einer Transformation analog zu (35)

$$\bar{\underline{d}}_0 = \underline{d}_0 + \underline{P}_{00}^{-1} \underline{P}_{0s} \underline{d}_s \quad (45)$$

ist die mittlere Klaffung der Objektpunkte dann zu berechnen aus

$$\theta_0^2 = \frac{\bar{\underline{d}}_0^T \bar{\underline{P}}_{00} \bar{\underline{d}}_0}{h_0} \quad (46)$$

h_0 : Anzahl der Komponenten von \underline{d}_0 .

Die Elemente von $\bar{\underline{d}}_0$ sind geometrisch gesehen die Koordinatendifferenzen der Objektpunkte, wenn die Stützpunkte als fest betrachtet werden. Zur Veranschaulichung kann wieder die Abbildung 3 dienen, wobei jetzt allerdings mehrere Punkte als beweglich angesehen werden. Sind die Bewegungen der Objektpunkte groß, relativ zur Genauigkeit der Punktbestimmung, so ist es nicht erforderlich, eine detaillierte Analyse der Objektpunktbewegungen, ausgehend von (46), mit Globaltest und Lokalisierung durchzuführen. Es genügt dann, geeignete Näherungsverfahren anzuwenden, so z.B. das Signal-Rausch-Verhältnis der transformierten Koordinatendifferenzen $\bar{\underline{d}}_0$ als Indikator für die Signifikanz der Bewegungen zu betrachten. Dazu bestimmt man die Standardabweichung jeder Komponente \bar{d}_{0j} aus $\bar{\underline{d}}_0$ aus

$$s_j = s \cdot \sqrt{q_{jj}} \quad (47)$$

mit q_{jj} als zugehöriges Hauptdiagonalelement von \underline{P}_{00}^{-1} und erhält als Signal-Rausch-Verhältnis den Quotienten

$$q_j = \frac{\bar{d}_{0j}}{s_j} \quad (48)$$

Alle Differenzen \bar{d}_{0j} die fünfmal größer als ihre Standardabweichung sind, werden als statistisch signifikant angesehen, die zugehörigen Punkte gelten als signifikant verschoben. In der Tabelle 4 ist das Ergebnis dieses Tests aufgeführt.

Überprüfung des Signal-Rausch-Verhältnisses für die Verschiebungskomponenten der Objektpunkte				
Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit		3.16		
Signifikanzschwelle bei		5.00		
Pkt. Nr.	Komponenten	Standardabweichung	Signal-Rausch-Verhältnis	Signifikant
10	DX -1.22	.075	16.36	ja
	DY - .68	.246	2.76	nein
11	DX 2.99	.245	12.24	ja
	DY -3.22	.184	17.45	ja
12	DX 5.22	.262	19.91	ja
	DY -2.99	.185	16.12	ja
13	DX 3.03	.291	10.43	ja
	DY - .93	.152	6.13	ja
14	DX - .95	.165	5.78	ja
	DY - .55	.147	3.74	nein
4	DX 1.01	.114	8.82	ja
	DY .18	.102	1.76	nein

Tabelle 4: Lokalisierung der verschobenen Objektpunkte für das Netz Montsalvens durch Überprüfung des Signal-Rausch-Verhältnisses

Bei sämtlichen Punkten ist der Quotient q_j in wenigstens einer Koordinatenrichtung größer als 5. Alle Objektpunkte werden daher als signifikant verschoben angesehen, eine strenge Analyse ist nicht erforderlich. Die Untersuchung des Netzes Montsalvens ist damit abgeschlossen, die Ergebnisse sind in der Abbildung 4 graphisch dargestellt.

6. Untersuchung des Netzes "Huaytapallana"

6.1 Gewichtsansätze und Ausgleichungsmodell

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Analyseverfahren wird das zur Ermittlung rezenter horizontaler Krustenbewegungen angelegte Lagenetz Huaytapallana in Peru untersucht. Dieses Netz (siehe Abbildung 5) besteht aus 6 Punkten nördlich und 5 Punkten südlich einer geologischen Verwerfung in den Anden in ca. 4600 m Höhe. Es liegen Messungsergebnisse aus drei Epochen vor, und zwar für die erste und zweite Epoche Winkel und Strecken und für die dritte Epoche Richtungssätze und Strecken. Da bei diesem Beispiel keine Originalfeldbücher vorliegen, jedoch die Netzgeometrie in jeder Epoche sowohl aus den Winkel- bzw. Richtungsmessungen als auch aus den Streckenmessungen allein berechenbar ist, werden für jede Gruppe von Beobachtungen Einzelausgleichungen zur Abschätzung der Genauigkeiten und damit des stochastischen Modells a priori durchgeführt.

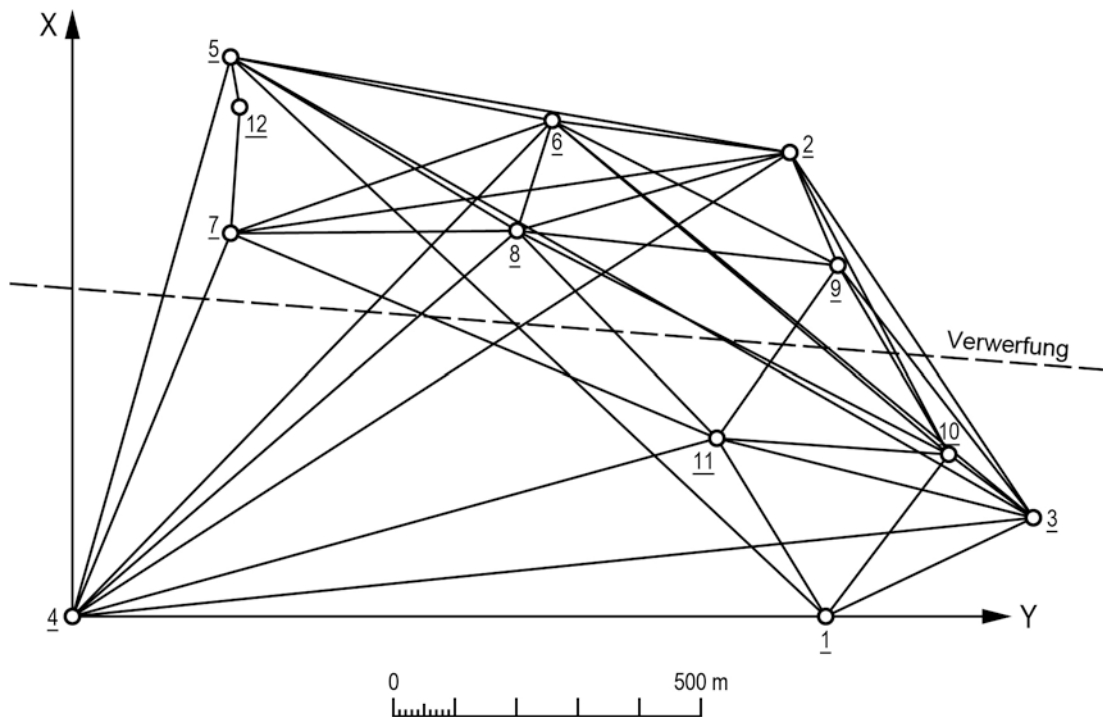


Abb. 5: Netzskizze für das Untersuchungsbeispiel "Huaytapallana"

Bei den Berechnungen als reines Streckennetz wurde von einem entfernungsunabhängigen Fehlermodell ausgegangen.

Untersuchungsobjekt: Testnetz Huaytapallana / Peru								
Epoche	Richtungsmessungen			Streckenmessungen			Ausgleichung der Einzelepochen	Additions-konstante
	Einzel-schätzung s_{iR} [0,1 mgon]	nach Bartlett-Test	Gewicht	Einzel-schätzung s_{iR} [mm]	nach Bartlett-Test	Gewicht		
1(1975)	5,7	} 5,3	1	3,03	} 1,62	3,05	6,81	+ 6,4
2(1976)	4,9		1	1,76		10,66	5,53	+ 2,9
3(1977)	10,6	10,6	0,25	1,49		10,66	4,87	+ 2,9

Tabelle 5: Ergebnisse getrennter Vorausgleichungen und Gewichtssetzung für das Netz "Huaytapallana"

Wegen fehlender Kalibrierungsdaten wurde als zusätzliche Unbekannte jedoch für jede Epoche eine Additionskonstante eingeführt, deren numerische Werte auch in Tabelle 5 aufgeführt sind. Bei dem anschließenden Vergleich der geschätzten Standardabweichungen durch den BARTLETT-Test mußten beide Ausgangshypothesen

$$H_{0S} : \text{gleiche Streckengenauigkeit} : E(s_{1S}^2) = E(s_{2S}^2) = E(s_{3S}^2) = \sigma_S^2$$

$$H_{0R} : \text{gleiche Richtungsgenauigkeit} : E(s_{1R}^2) = E(s_{2R}^2) = E(s_{3R}^2) = \sigma_R^2$$

bei einem Signifikanzniveau von 95 % verworfen werden. Nur s_{2S}^2 und s_{3S}^2 bzw. s_{1R}^2 und s_{2R}^2 können aus der gleichen Grundgesamtheit stammen und werden daher zu einem gemeinsamen Schätzwert nach (28) zusammengefaßt. Wählt man für die Standardabweichung der Gewichtseinheit a priori den Wert $\sigma_0 = 5.3$, so erhält man die in Tabelle 5 aufgeführte Gewichtsfestsetzung.

Die anschließend durchgeführten freien Netzausgleichungen für die einzelnen Messungsepochen bestätigen diese Gewichtsabschätzungen nicht. Ein F-Test bzw. wieder ein BARTLETT-Test zeigt signifikante Genauigkeitsunterschiede für die 1. Epoche. Ohne Kenntnis der Originalfeldbücher bzw. der Kalibrierungsunterlagen der Instrumente ist es sehr schwer, diese Restsystematiken zu beseitigen. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung haben wir daher auf eine Neuabschätzung des stochastischen Modells verzichtet.

6.2 Berechnung der Deformationen

Diese Problematik beim stochastischen Modell, d.h. die Verletzung der Basishypothese (26) führt naturgemäß zu Verfälschungen bei der Durchführung der Deformationsanalyse. Die hier trotzdem aufgeführten Ergebnisse sind daher sehr deutlich mit dem Vermerk vorläufig zu versehen.

Im Einzelnen sind für die Kombinationen 1. Epoche - 2. Epoche, 1. Epoche - 3. Epoche und 2. Epoche - 3. Epoche nach den Formeln der Abschnitte 3 und 4 einstufige Deformationsanalysen durchgeführt worden. Eine Einteilung in Stütz- und Objektpunkte kann hier von vorneherein nicht vorgenommen werden, vielmehr müssen - wie meist bei Netzen zur Untersuchung rezenter Krustenbewegungen - alle Punkte als gleichermaßen deformationsverdächtig angesehen werden. In der Tabelle 6 sind die Ergebnisse der durchgeführten Kongruenztests und der anschließenden Lokalisierungen aufgelistet. Es sei nochmals betont, daß die ermittelten Punktverschiebungen noch durch Modellfehler verfälscht sein können.

Untersuchungsobjekt: Testnetz Huaytapallana / Peru					
Netzvergleich	Bearbeitungsstufe	globaler Kongruenztest			Lokalisierung Maximaler Klaffungsanteil Θ_{\max}^2 für Punkt Nr.
		emp. Wert $\bar{F} = \frac{\Theta^2}{s^2}$	Grenzwert $F_{h,f,1-\alpha}$	signifikante Deformationen ?	
1.-2. Epoche (1975-1976)	1) alle Punkte	2,44	1,63	ja	2
	2) ohne Punkt 2	1,95	1,67	ja	6
	3) ohne Punkte 2,6	1,63	1,71	nein	-
1.-3. Epoche (1975-1977)	1) alle Punkte	2,21	1,64	ja	5
	2) ohne Punkt 5	2,00	1,67	ja	8
	3) ohne Punkte 5,8	1,83	1,71	ja	3
	4) ohne Punkte 5,8,3	1,75	1,76	nein	-
2.-3. Epoche (1976-1977)	1) alle Punkte	2,02	1,63	ja	2
	2) ohne Punkt 2	1,21	1,67	nein	-

Tabelle 6: Vorläufige Ergebnisse für das Netz "Huaytapallana"

7. Literaturverzeichnis

- Dupraz, H. 1978: Beurteilungskriterien für geodätische Netze
Niemeier, W. 2. FIG-Symposium "Deformationsmessungen", Bonn 1978
- Grafarend, E. 1974: Optimization of Geodetic Networks
IAG-Symposium Fredericton, Canada, 1974
- Meissl, P. 1969: Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens
DGK, Reihe A, Heft 61, München 1969, S. 8-21
- Mittermayer, E. 1971: Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze
Zeitschrift f. Vermessungswesen 96, 1971, S. 401-410
- Mittermayer, E. 1972: Zur Ausgleichung freier Netze
Zeitschrift f. Vermessungswesen 97, 1972, S. 481-489
- Niemeier, W. 1976: Grundprinzip und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen
VII. Int. Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Pelzer, H. 1971a: Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen
DGK, Reihe C, Nr. 164, München 1971
- Pelzer, H. 1971b: Analyse von Deformationsmessungen
FIG-Kongreß, Wiesbaden , paper Nr. 605.1, 1971
- Pelzer, H. 1972: Nachweis von Staumauerdeformationen unter Anwendung statistischer Methoden
57. Deutscher Geodätentag, Braunschweig 1972
- Pelzer, H. 1974a: Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben I und II
Zeitschrift f. Vermessungswesen 99, 1974, S. 181-194 und S. 479-488
- Pelzer, H. 1974b: Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen
XIV. FIG-Kongreß, Washington 1974, paper Nr. 608.3
- Pelzer, H. 1976: Über die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen
VII. Int. Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976
- Raa, C.R.
Mitra, S.K. 1971: Generalized Inverse of Matrices and its Applications
New York 1971

- Uotila, U.A. 1974: Statistical Tests as Guidelines in Analysis of Adjustment of Control Nets XIV. FIG-Kongreß, Washington 1974, paper Nr. 504.1
- Wolf, H. 1975: Ausgleichungsrechnung - Formeln zur praktischen Anwendung Bonn 1975

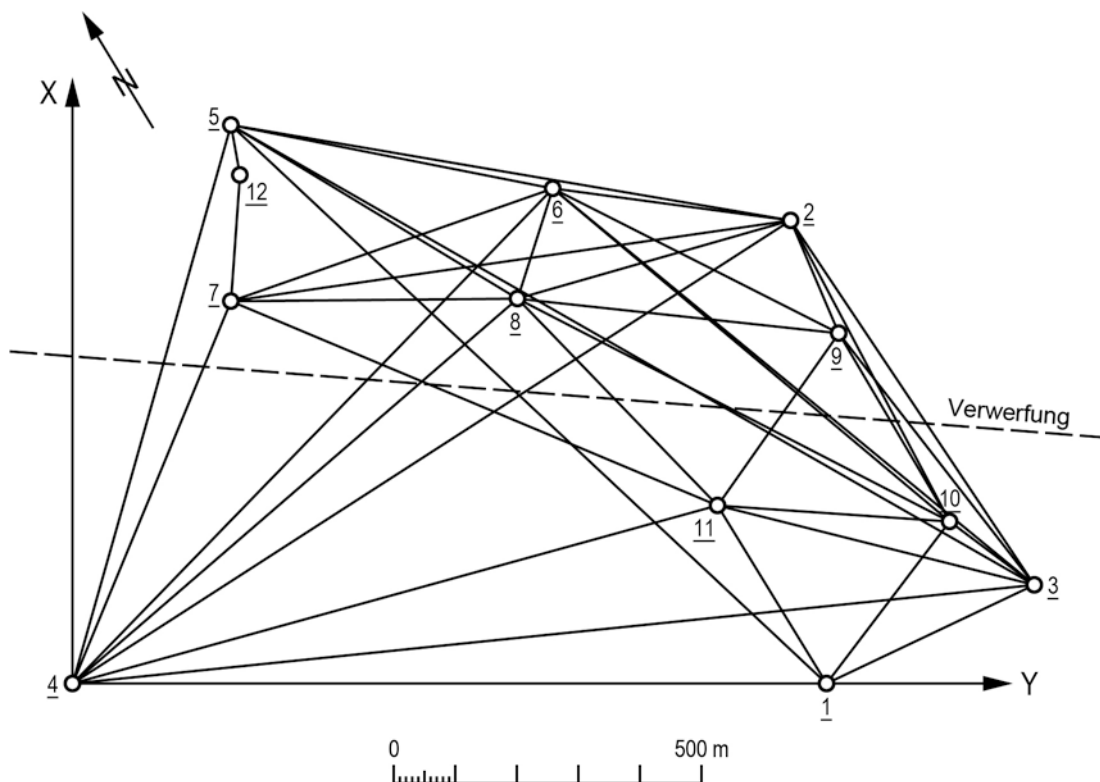
DEFORMATIONSANALYSEN DURCH UNTERSUCHUNG VON TEILNETZEN

W. Caspary, München

1. Einleitung

Die in den letzten Jahren ausgearbeiteten Verfahren zur Analyse von Deformationen mit Hilfe geodätischer Netze haben sich bei der Untersuchung von Festpunkten auf ihre Standfestigkeit und bei der Lokalisierung von Punkten, die ihre Lage verändert haben, bestens bewährt (z.B. HECK, KUNTZ, MEIER-HIRMER (1977), PELZER (1974)). Im Mittelpunkt steht dabei die wesentliche Frage, ob überhaupt Deformationen nachweisbar sind und wenn ja, welche Punkte davon betroffen sind.

Bei manchen Aufgabenstellungen ist das Problem insofern anders gelagert, als man zwei oder mehrere Punktgruppen von vornherein eindeutig gegeneinander abgrenzen kann und primär an der Klärung der Frage interessiert ist, ob sich diese Punktgruppen zwischen zwei oder mehreren Meßepochen relativ zueinander bewegt haben. Als Beispiel sei das Netz HUAYTAPALLANA in Peru, WELSCH (1978), genannt, das durch eine in der Örtlichkeit sichtbare Falte in zwei Teile gegliedert ist und angelegt wurde, um zu untersuchen, ob sich die zwei durch die Falte getrennten Schollen gegeneinander bewegen. Weitere Beispiele sind in POPE (1966) und LINKWITZ (1975) beschrieben.



Bei der Behandlung des Problems besteht die Schwierigkeit, daß ein Referenzsystem, in dem absolute Bewegungen meßbar wären, in der Regel nicht definiert werden kann. Die Untersuchungen müssen daher auf relative Bewegungen beschränkt bleiben, wobei die Frage offen bleibt, ob sich nur eine Scholle oder ob sich beide Schollen bewegt haben.

2. Einzelausgleichung der Epochen

Gegeben sei ein Netz mit p Punkten, das für den Untersuchungszweck in zwei Teilnetze mit p^1 bzw. p^2 Punkten zerlegt wird, $p = p^1 + p^2$ (hochgestellte Indizes geben die Nummer des Teilnetzes an). Die Nullmessung mit n_0 Beobachtungen wird frei ausgeglichen, wobei die Näherungskordinaten der Punkte, die auch in allen folgenden Meßepochen auftreten, gemeinsam mit der auf diese Punkte bezogenen Forderung $x^T x \rightarrow \text{Min}$ das Datum definieren. Die dazu notwendige verallgemeinerte Inverse der Beobachtungsgleichungsmatrix kann nach einem der in CASPARY (1978) angegebenen Verfahren bestimmt werden. Besonderes Augenmerk ist auf die Frage des Rangdefekts der zu invertierenden Matrix zu richten. Wurden wie in dem zitierten Beispiel HUAYTAPALLANA Richtungen, Schrägstrecken und Zenitdistanzen gemessen, so ist bei einer Ausgleichung als dreidimensionales Netz der Rangdefekt $d=4$, falls der Ansatz eines Maßstabsfaktors nicht vorgesehen ist. Als Ergebnis der Ausgleichung erhält man den $3p$ -Koordinatenvektor x_0 mit der zugehörigen Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_0 .

Auf die gleiche Weise werden alle Wiederholungsmessungen ausgeglichen. Die folgenden Überlegungen werden der Einfachheit halber auf die n_1 Beobachtungen der ersten Wiederholungsmessung beschränkt. Die getrennten Ausgleichungen der einzelnen Meßepochen, oft ergänzt durch zusätzliche Teil- und Vorausgleichungen, sind stets notwendig, um zutreffende Gewichtsverhältnisse für die einzelnen Beobachtungsarten zu erhalten und um das Datenmaterial von groben Fehlern zu bereinigen.

3. Gesamtausgleichung mit festem Teilnetz

Mit den bereinigten Daten und den ermittelten Gewichtsverhältnissen wird nun in einem erweiterten Modell eine gemeinsame Ausgleichung der zwei Epochen durchgeführt. Die Koordinaten der ersten Punktgruppe werden dabei für beide Meßepochen als neue Unbekannte, x_0^1 bzw. x_0^2 , in das Modell eingeführt, während die Punkte der zweiten Gruppe (Referenzgruppe), soweit sie in beiden Epochen auftreten, als identische Punkte für die Epochen gelten (x_r^2). Das Ergebnis ist der $3(2p^1 + p^2)$ -Unbekanntenvektor mit seiner Varianz-Kovarianz-Matrix.

$$x = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_1^1 \\ x_r^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Var}(x) = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{00}^{11} & \Sigma_{01}^{11} & \Sigma_{0r}^{12} \\ \Sigma_{10}^{11} & \Sigma_{11}^{11} & \Sigma_{1r}^{12} \\ \Sigma_{0r}^{12} & \Sigma_{1r}^{12} & \Sigma_{rr}^{22} \end{pmatrix}$$

$f = n_0 + n_1 - 3(2p^1 + p^2) + d$. Nach CASPARY (1979) kann diese gemeinsame Ausgleichung als Mittelbildung für die identischen Punkte aufgefaßt werden. Die in diesem Schritt gewonnene Schätzung s_{01}^2 kann in zwei unabhängige Anteile zerlegt werden, von denen der eine identisch mit der Varianzschätzung $s_{01}^2 = \frac{v_0^T P_0 v_0 + v_1^T P_1 v_1}{f_0 + f_1}$ aus den unabhängigen Vorausgleichungen und der zweite Anteil

s_{02}^2 aus der Modellerweiterung stammt. Mit der F-verteilter Testgröße s_{02}^2/s_{01}^2 kann die Hypothese überprüft werden, die der Modellerweiterung zugrunde liegt, daß nämlich der als Referenz benutzte Netzteil für die untersuchten Epochen kongruent ist.

Die weiterhin interessierenden Größen sind nun die Punktverschiebungen $d = x_1^1 - x_0^1$ zwischen den Epochen im ersten Netzteil. Dazu wird der Vektor x mit der Matrix $D = (- E E 0)$ multipliziert.

$$d = Dx, \text{Var}(d) = \Sigma_d = D\Sigma D^T, P_d = \sigma_0^2 \Sigma_d^{-1}$$

E = Einheitsmatrix passender Ordnung

Zum Test der Hypothese $E(d) = 0$ wird die Teststatistik

$$\frac{d^T P_d d}{3p^1} / s_{01}^2 = F$$

benutzt, die nach PELZER (1976) eine zentrale F-Verteilung besitzt, falls keine Punktverschiebungen aufgetreten sind.

4. Gesamtausgleichung mit aufgefelterter Referenzpunktgruppe

Bei dieser alternativen Gesamtausgleichung wird von der Überlegung ausgegangen, daß wegen tektonischer Aktivitäten auch innerhalb der Netzteile kleine relative Punktverschiebungen wahrscheinlich sind. Die im 3. Abschnitt benutzte Modellvorstellung der Kongruenz des Referenznetztes für die untersuchten Epochen beschreibt daher die Realitäten nur näherungsweise und kann noch verfeinert werden. Für die Ausgleichung werden die Koordinaten aller Punkte für jede Epoche getrennt als Modellparameter eingeführt. Die Verknüpfung der Epochen wird dadurch erreicht, daß die Teilnorm des Unbekanntenvektors $\|(x_0^2 \ x_1^2)\|_2$ minimiert wird, die sich auf die in beiden Epochen auftretenden Punkte der Referenzgruppe bezieht. Beide Epochen werden also im Sinne einer Helmerttransformation auf dieselben Näherungskordinaten der Referenzgruppe aufgefördert, während auf die zweite Punktgruppe keinerlei Zwang ausgeübt wird. Sofern zwischen den Epochen keine Korrelationen vorhanden sind, zerfällt die Ausgleichung dabei in zwei Teile, die auch unabhängig bearbeitet werden können. Falls man sich für dieses Modell entscheidet, kann man schon bei den im zweiten Abschnitt beschriebenen Einzelausgleichungen, über die Netzlagerung, wie sie hier beschrieben ist, verfügen, so daß dieser Schritt eingespart werden kann. Das Ergebnis ist ein $6p$ -Unbekanntenvektor mit der zugeordneten Varianz-Kovarianz-Matrix.

$$x = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_1^1 \\ x_0^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \text{Var}(x) = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{00}^{11} & \Sigma_{00}^{12} & \Sigma_{01}^{11} & \Sigma_{01}^{12} \\ \Sigma_{00}^{21} & \Sigma_{00}^{22} & \Sigma_{01}^{21} & \Sigma_{01}^{22} \\ \Sigma_{10}^{11} & \Sigma_{10}^{12} & \Sigma_{11}^{11} & \Sigma_{11}^{12} \\ \Sigma_{10}^{21} & \Sigma_{10}^{22} & \Sigma_{11}^{21} & \Sigma_{11}^{22} \end{pmatrix}$$

Im Anschluß an diese Ausgleichung können zwei Hypothesen geprüft werden.

$$H_0: E(x_1^2 - x_0^2) = 0$$

Es liegen keine Punktveränderungen innerhalb des Referenznetzteiles vor, oder sie sind so gering, daß sie durch die Messungen nicht aufgedeckt werden können.

$$H'_0: E(x_1^1 - x_0^1) = 0$$

Es liegen keine relativen Punktveränderungen zwischen der Referenzpunktgruppe und den übrigen Punkten vor, oder sie sind so gering, daß sie durch die Beobachtungen nicht aufgedeckt werden können.

Für beide Tests wird aus den Koordinatendifferenzen, entsprechend den Formeln des dritten Abschnitts, eine von s_{01}^2 unabhängige Varianzschätzung abgeleitet, so daß mit dem Varianzquotiententest die Richtigkeit der Nullhypothesen geprüft werden kann. Da die Tests nicht unabhängig sind, müssen die Ergebnisse sorgfältig interpretiert werden. In kritischen Fällen kann es zweckmäßig sein, H'_0 durch eine zusammengesetzte Hypothese zu ersetzen, die einen von H_0 unabhängigen Test ermöglicht. Dies kann mit Hilfe der bedingten Verteilungen des Differenzvektors $(x_1^1 - x_0^1)$ nach den im Anhang angegebenen Formeln geschehen.

5. Zusätzliche Parameter für Relativbewegungen

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Verfahren führen zu einer Aussage darüber, ob Relativbewegungen innerhalb der Netzteile oder zwischen den Netzteilen stattgefunden haben. Den Ausführungen von NIEMEIER (1976) folgend, könnten anschließend die Koordinatendifferenzen einzelner Punkte untersucht werden, um eine Lokalisierung von Deformationen zu ermöglichen. Hier soll jedoch die Modellvorstellung beibehalten werden, daß Lageänderungen innerhalb der Punktgruppen vernachlässigbar sind, verglichen mit den Relativbewegungen der Netzteile zueinander. Diese Relativbewegungen sollen durch geeignete Parameter dargestellt werden, die in der Ausgleichung mitzuschätzen sind. Es bieten sich dazu Modellparameter an, die Translationen und Rotationen erfassen, die also eine Ähnlichkeitstransformation zwischen den betrachteten Netzteilen definieren.

In den im dritten und vierten Abschnitt beschriebenen Ausgleichungsmodellen können die gesuchten Parameter durch eine Modellerweiterung mitgeschätzt werden. Der Unbekanntenvektor x_1^1 ist für diese Zwecke zu ersetzen durch $x_0^1 + B y$. Hierbei bedeuten

$$y_T = (t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z)$$

t_x, t_y, t_z = Translation in Richtung x, y, z

r_x, r_y, r_z = Rotation um die Achse x, y, z

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1^1 & -y_1^1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_1^1 & 0 & x_1^1 \\ 0 & 0 & 1 & y_1^1 & -x_1^1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z_2^1 & -y_2^1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_2^1 & 0 & x_2^1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2^1 & -x_2^1 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & y_{p_1}^1 & -x_{p_1}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

x_i^1 = Näherungskordinate
des x-Wertes des i ten
Punktes im 1. Netzteil

(Da sich alle folgenden Untersuchungen auf Netzteil 1 beziehen, kann der hochgestellte Index vernachlässigt werden, ohne daß Unklarheiten zu befürchten sind). Andererseits besteht die Möglichkeit, die Transformationsparameter durch eine Folgeausgleichung zu bestimmen. Dazu werden die Koordinatendifferenzen $d = x_1 - x_0$ gebildet, zu denen die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_d gehört, die nach den Formeln des dritten Abschnitts berechnet wird. Es ist dann folgendes Modell zu verwenden

$$d + v_d = By, \quad E(d) = By,$$

$$E(v_d) = 0, \quad \text{Var}(d) = \Sigma_d$$

Die Matrix B hat vollen Spaltenrang, dieselbe Aussage trifft für Σ_d zu, da das Netzdatum durch den Referenznetzteil festgelegt ist und Konfigurationsdefekte ausgeschlossen sein sollen. Unter der Forderung $v_d^T \Sigma_d^{-1} v_d \rightarrow \text{Min}$ erhält man eine eindeutige Schätzung für die Transformationsparameter

$$y = (B^T P B)^{-1} B^T P d, \quad P = \sigma_0^2 \Sigma_d^{-1}$$

$$\text{Var}(y) = \sigma_0^2 (B^T P B)^{-1} = \sigma_0^2 Q_y$$

Zur Überprüfung des mathematischen Modells wird wie üblich die Varianzschätzung verwendet, die aus der quadratischen Form q abzuleiten ist.

$$\begin{aligned} q &= v_d^T P v_d = (By - d)^T P (By - d) \\ &= d^T (P - P B (B^T P B)^{-1} B^T P) d = d^T \bar{P} d \end{aligned}$$

Als Erwartungswert von q erhält man unter Berücksichtigung der Verteilung quadratischer Formen

$$\begin{aligned} E(q) &= \sigma_0^2 \text{sp}(\bar{P} Q) + E(d)^T \bar{P} E(d) \\ &= \sigma_0^2 \text{sp}(E - P B (B^T P B)^{-1} B^T) + 0, \\ &= \sigma_0^2 r(E - P B (B^T P B)^{-1} B^T) \\ E(q) &= \sigma_0^2 (3p - 6), \end{aligned}$$

und damit die erwartungstreue Varianzschätzung für σ_0^2

$$s_{03}^2 = q/(3p - 6) ,$$

die im Rahmen der Zufälligkeiten mit der Schätzung s_{01}^2 übereinstimmen muß, wenn das gewählte Modell die tatsächlichen Deformationen hinreichend gut wiedergibt.

6. Untersuchung des Transformationsvektors

Weiterführende Untersuchungen des Transformationsvektors

$$y^T = (t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z)$$

$$\Sigma_y = \sigma_0^2 (B^T P B)^{-1} = \sigma_0^2 Q_y$$

sollen Aufklärung über die durch das Modell erfaßten Deformationen geben.

Unter der Hypothese, daß keine Relativbewegungen zwischen den Punktgruppen vorliegen, die durch eine Ähnlichkeitstransformation darstellbar sind, gilt für den Erwartungswert des Vektors der Transformationsparameter $E(y) = 0$. Daraus folgt für den Erwartungswert der quadratischen Form

$$q_y = y^T Q_y^{-1} y$$

$$E(q_y) = \text{sp}(\Sigma_y Q_y^{-1}) = \sigma_0^2 \text{sp}(Q_y Q_y^{-1})$$

$$E(q_y) = 6\sigma_0^2$$

und es ergibt sich die erwartungstreue Varianzschätzung $s_{04}^2 = q_y/6$. Unter der Annahme, daß y normalverteilt ist, folgt q_y/σ_0^2 der zentralen χ^2 -Verteilung mit 6 Freiheitsgraden.

Darüber hinaus ist q_y von s_{01}^2 aus Abschnitt 3 statistisch unabhängig, so daß mit

$$v_0 = \frac{q_y/6}{s_{01}^2}$$

eine Teststatistik angegeben werden kann, die unter der Nullhypothese eine zentrale Fisher-Verteilung besitzt.

Wird die Hypothese verworfen, so kann die Untersuchung weiterer Fragestellungen von Interesse sein: z.B. ob die nachgewiesene Relativbewegung als reine Translation oder als reine Rotation darstellbar ist. Dazu ist die Zerlegung des Transformationsvektors in zwei statistisch unabhängige Subvektoren notwendig. Die theoretischen Grundlagen für eine solche Zerlegung, die mit Hilfe der Theorie der bedingten Verteilungen gelingt, sind im Anhang zusammengestellt. Hier sei die Hypothese gewählt, daß sich die gesamte Deformation als Translation darstellen läßt.

$$y^T = (t^T, r^T), \quad t^T = (t_x, t_y, t_z), \quad r^T = (r_x, r_y, r_z)$$

$$H_0 : E(r) = 0, \quad \Sigma_y = \sigma_0^2 Q_y, \quad Q_y = \begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{rt} & Q_{rr} \end{pmatrix}$$

Die Verteilung von t unter der Hypothese $E(r) = 0$ ist die in Satz 3 (Anhang) definierte Normalverteilung $t|r = \bar{t} \sim N(E(t) + Q_{tr}Q_{rr}^{-1}r, \sigma_0^2 P_{tt})$ mit den dort eingeführten Symbolen. Gemäß Satz 5 kann die quadratische Form q_y in zwei unabhängige Komponenten zerlegt werden

$$q_y = y^T Q_y^{-1} y = \bar{t}^T P_{tt} \bar{t} + r^T Q_{rr}^{-1} r$$

$$= q_{\bar{t}} + q_r$$

Unter der Hypothese $E(r) = 0$ hat die quadratische Form q_r eine zentrale χ^2 -Verteilung und die Größe $q_r/3$ ist eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz σ_0^2 der Beobachtungen.

Die Teststatistik $v_0 = \frac{q_r/3}{s_{01}^2}$

folgt unter der Nullhypothese einer zentralen Fisherverteilung und kann für den Test der Hypothese $E(r) = 0$ verwandt werden.

Weitere Fragestellungen können dahin zielen, die Haupttranslationsrichtung und die Richtung der Hauptrotation zu bestimmen. Diese für die Interpretation von Deformationen wichtigen Fragen sind durch einfache geometrische Überlegungen lösbar und sollen hier nicht ausgeführt werden. Für die Interpretation ist oft auch eine Zerlegung des Transformationsvektors sinnvoll, die es erlaubt, die Lage und die Höhe getrennt zu untersuchen, wobei noch zusätzlich eine Drehung der x - y -Ebene um die z -Achse erwünscht ist, so daß eine der Koordinatenachsen parallel zur Richtung der Verwerfungslinie orientiert wird. Nach einer solchen einfachen Transformation der Ergebnisse können weitere Tests, die ganz im Rahmen der bisherigen Ausführungen ablaufen, wichtige Interpretationshilfen sein.

7. Beispiel

Da das beschriebene Verfahren für die Analyse von Relativbewegungen zwischen in sich stabilen Netzteilen konzipiert ist, kann es nur auf das Testbeispiel HUAYTAPALLANA angewandt werden. Die Ergebnisse werden in folgendem kurz zusammengestellt und kommentiert.

7.1 Einzelausgleichung der Epochen

Durch Vorausgleichungen mit dem Programm Helmert/77* wurden die Standardabweichung der drei Beobachtungsgruppen geschätzt, die der Gewichtssetzung zugrunde gelegt wurden.

Epochen	Standardabweichungen			Gewichte		
	Distanzen s_d [mm]	Richtungen s_r [0,1 mgon]	Zenitdist. s_z [0,1 mgon]	Distanzen p_d	Richtungen p_r	Zenitdist. p_z
1975	6,7	4,8	31,4	$22,3 \cdot 10^{-3}$	$43,4 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
1976	4,1	4,1	21,0	$59,5 \cdot 10^{-3}$	$58,6 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
1977	2,9	8,9	20,4	$1189 \cdot 10^{-3}$	$12,6 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 1: Wahl der Gewichte für die Netzausgleichung

Bei der Ausgleichung aller Beobachtungen mit den Gewichten nach Tabelle 1 wurden außer den drei Koordinaten je Punkt die Orientierungsunbekannten, Additions- und Maßstabskonstante und eine Refraktionsunbekannte mitbestimmt. Aus diesen zwangsfrei durchgeführten Ausgleichungen werden die in Tabelle 2 zusammengestellten Ergebnisse für die weiteren Untersuchungen benutzt.

Epoche	$v^T p v$	F	s_0^2	s_0	$\Sigma v^T p v$	Σf	s_{01}^2
1975	158,8	162	0,98	0,99	333,8	337	0,99
1976	175	175	1,00	1,00			
1977	199	199	1,00	1,00	374	374	1,00

Tabelle 2: Varianzschätzungen aus Einzelausgleichungen

7.2 Gemeinsame Ausgleichung der Epochen 75/76 und 76/77

Bei den gemeinsamen Ausgleichungen wurde vorausgesetzt, daß der Netzteil südlich der Verwerfungslinie (Punkte 1, 3, 4, 10, 11) in beiden Epochen kongruent ist. Dieser Netzteil wurde dadurch zur

* Das Programmsystem Helmert/77 wurde durch Herrn Dipl.-Ing. W. Keller im Ingenieurbüro Walter Schneider A.G., Chur, entwickelt.

Deckung gebracht, daß die entsprechenden Koordinaten nur einmal als Unbekannte angesetzt wurden. Im nördlichen Netzteil (Punkte 2, 5, 6, 7, 8, 9) wurden dagegen für jede Epoche neue Koordinaten eingeführt, so daß in diesem Bereich Verschiebungen der Netzteile relativ zueinander als Koordinatendifferenzen in Erscheinung treten. Während die Größe der Koordinatendifferenzen bei vorgegebenen Näherungskordinaten für alle Punkte und zwangsfreier Ausgleichung unabhängig von der Verfügung über die Netzlagerung ist, ist der Einfluß auf die mittleren Fehler der Koordinaten beträchtlich. Da die Koordinatendifferenzen der Gegenstand der weiteren Untersuchungen sind, ist eine optimale Genauigkeitsschätzung wichtig, die hier dadurch erreicht wird, daß zur Lagerung des Netzes die Norm $\|x_i\|_2$, $i \in \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$, minimiert wurde; womit gleichzeitig die Spur der Gewichtsreziprokenmatrix der Unbekannten dieses Netzteils ein Minimum annimmt.

Die Ergebnisse dieser Ausgleichungen sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Punkt	Koordinatendifferenzen in [mm]					
	1976 - 1975			1977 - 1976		
	Δx	Δy	Δz	Δx	Δy	Δz
2	-1,1	-3,4	-33,4	+0,5	+4,5	+ 2,0
5	-1,8	-4,6	-26,1	+1,3	+3,5	+13,8
6	+0,7	-7,7	-19,7	0,0	+2,8	+ 4,9
7	-1,7	-4,2	-13,4	-2,6	+0,2	+11,0
8	-0,9	-2,0	-27,1	-3,7	+0,2	+ 7,0
9	+0,2	+0,4	-11,3	+0,6	+0,2	+ 5,5
	$v^T P_V = 341,0 \quad s_0^2 = 0,89$ $f = 348$			$v^T P_V = 392,7 \quad s_0^2 = 1,02$ $f = 385$		
	$d^T P_d d = 47,86$ $3p = 18$ $\theta^2 = 2,66$			$d^T P_d d = 27,88$ $3p = 18$ $\theta^2 = 1,55$		

Tabelle 3: Ergebnisse der gemeinsamen Ausgleichungen

Eine Interpretation nur an Hand dieser Zahlen ist schwierig, da die Koordinatendifferenzen im Bereich der Standardabweichungen liegen, die für Δx und Δy zwischen $\pm 1,5$ und $\pm 3,0$ mm schwanken, während die Höhendifferenzen mittlere Fehler zwischen ± 8 und ± 18 mm aufweisen.

Hypothese H_0 : Das funktionale Modell (Netzteil südlich der Verwerfung ist kongruent für alle Epochen) ist zutreffend.

Testgröße: $1975/76 \quad F = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{0,66}{0,99} = 0,67 \quad , \quad F(95\%,11,337) = 1,82$

$1976/77 \quad F = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,70}{1,00} = 1,70 \quad , \quad F(95\%,11,374) = 1,82$

Berechnung von s_{02}^2 :	1975/76	1976/77
Tabelle 2 $\sqrt{\sum PV} ; f$	341,0 ; 348	392,7 ; 385
- Tabelle 3 $\sum \sqrt{PV} ; \sum f$	333,8 ; 337	374,0 ; 374
	7,2 ; 11	18,7 ; 11
s_{02}^2	0,66	1,70

Die Nullhypothese kann mit dem vorliegenden Datenmaterial nicht verworfen werden.

Hypothese H_0 : Die im nördlichen Netzteil auftretenden Klaffungen sind zufälliger Natur. Sie sind $N(0, \sigma_0^2, Q_d)$ -verteilt.

Testgröße: $1975/76 \quad F = \frac{\theta^2}{s_{01}^2} = \frac{2,66}{0,99} = 2,69 \quad , \quad F(95\%,18,337) = 1,64$

$1976/77 \quad F = \frac{\theta^2}{s_{01}^2} = \frac{1,55}{1,00} = 1,55 \quad , \quad F(95\%,18,374) = 1,63$

s_{01}^2 aus Tabelle 2 , θ^2 aus Tabelle 3

Die Nullhypothese muß für den Zeitraum 75/76 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von kleiner 0,1 % abgelehnt werden. Die zwischen den Meßepochen aufgetretenen Koordinatenänderungen sind nicht durch die zufälligen Beobachtungsfehler erklärbar, sie sind mit hoher Wahrscheinlichkeit auf Lageänderungen von Punkten zurückzuführen.

Für den Zeitraum 76/77 nimmt die Testgröße einen Wert an, der bei zutreffender Nullhypothese nur in 7 % aller Fälle erreicht oder überschritten wird. Eine weitere Analyse des Ergebnisses wird daher als sinnvoll betrachtet.

Auf eine gemeinsame Ausgleichung der Epochen 1975/77 wurde verzichtet, da es primär auf die Erprobung des entwickelten Verfahrens ankam. Darüber hinaus zeigt ein Blick auf Tabelle 3, daß signifikante Punktverschiebungen nicht zu erwarten sind, da die Koordinatendifferenzen der bearbeiteten Zeiträume im wesentlichen entgegengesetzte Vorzeichen haben und sich daher in der Summe teilweise kompensieren.

7.3 Darstellung der Punktverschiebungen durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation

Nach den Formeln des 5. Abschnittes wurden in dem linearen Modell $d + v_d = By$, Σ_d die sechs Parameter $y^T = (t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z)$ einer überbestimmten Ähnlichkeitstransformation nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Um minimale Varianzen für die Transformationsparameter zu erhalten, wurde der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des untersuchten Netzteils verlegt. Die Tabelle 4 faßt die Ergebnisse dieser Ausgleichungen zusammen.

	Vollständige Gewichtsmatrix		Diagonale Gewichtsmatrix	
	1975/76	1976/77	1975/76	1976/77
t_x [mm]	- 0,4 ± 2,4	- 0,5 ± 1,5	- 0,8 ± 0,9	- 0,7 ± 0,7
t_y [mm]	- 2,0 ± 2,4	- 1,8 ± 1,5	- 2,9 ± 0,8	- 1,8 ± 0,6
t_z [mm]	- 25,5 ± 13,1	- 8,3 ± 7,2	- 23,6 ± 4,7	- 8,0 ± 3,2
r_x [mgon]	+ 0,96 ± 1,30	- 1,01 ± 0,77	+ 0,38 ± 0,76	- 0,98 ± 0,54
r_y [mgon]	+ 2,84 ± 2,09	+ 1,53 ± 1,40	+ 1,93 ± 1,78	+ 1,88 ± 1,32
r_z [mgon]	- 0,29 ± 0,28	- 0,07 ± 0,20	- 0,27 ± 0,16	- 0,11 ± 0,13
$d^T P_d d$	47,87	27,88	48,32	24,40
$v_d^T P_d v_d$	31,69	20,25	10,81	10,05
f	12	12	12	12
s_{03}^2	2,64	1,69	0,90	0,84
$y^T Q_y^{-1} y$	16,18	7,63	37,50	14,35
f	6	6	6	6
s_{04}^2	2,70	1,27	6,25	2,39

Tabelle 4: Ergebnisse der Transformationsausgleichungen

Obwohl die Klaffungen in Tabelle 3 den Eindruck erwecken, daß der nördliche Netzteil eine gemeinsame Bewegung in y -Richtung und eine gemeinsame Höhenänderung erfahren hat, zeigt Tabelle 4 keine signifikanten Translationen oder Rotationen. Man erkennt hier, wie leicht Fehlinterpretationen möglich sind, wenn nur die Klaffungen selbst ohne Berücksichtigung ihrer Varianzen und Kovarianzen beurteilt werden. Probeweise wurden weitere Ausgleichungen durchgeführt, bei denen eine diagonale Gewichtsmatrix mit $p_i = q_{ii}^{-1}$ benutzt wurde. Die ebenfalls in Tabelle 4 aufgeführten Ergebnisse zeigen deutlich, wie stark bei Vernachlässigung der Korrelationen die Genauigkeit der Unbekannten überschätzt wird.

Hypothese H_0 : Das funktionale Modell (die Klaffungen lassen sich durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation darstellen) ist zutreffend.

$$\text{Testgröße: } 1975/76 \quad F = \frac{s_{03}^2}{s_{01}^2} = \frac{2,64}{0,99} = 2,67 \quad , \quad F(95\%,12,337) = 1,78$$

$$1976/77 \quad F = \frac{s_{03}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,69}{1,00} = 1,69 \quad , \quad F(95\%,12,374) = 1,78$$

Für die Epochen 1975/76 ist die Hypothese eindeutig abzulehnen. Für den Zeitraum 76/77 muß die Hypothese nicht verworfen werden, die Testgröße liegt aber nahe an der Verwerfungsgrenze. Als Ergebnis dieses Tests kann gefolgert werden, daß die nach 7.2 signifikanten oder zumindest wahrscheinlichen Punktverschiebungen nur sehr unbefriedigend oder gar nicht durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation darstellbar sind. Zumindest für den Vergleich 1975/76 muß damit gerechnet werden, daß signifikante individuelle Punktverschiebungen vorliegen.

Hypothese H_0 : Die in 7.2 nachgewiesenen Deformationen sind keine Relativverschiebungen der Netzteile zueinander. Die linearen Transformationsparameter y sind $N(0, \sigma_0^2, 0, y)$ -verteilt.

$$\text{Testgröße: } 1975/76 \quad F = \frac{s_{04}^2}{s_{01}^2} = \frac{2,70}{0,99} = 2,72 \quad , \quad F(95\%,6,337) = 2,13$$

$$1976/77 \quad F = \frac{s_{04}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,27}{1,00} = 1,27 \quad , \quad F(95\%,6,374) = 2,13$$

Eine Interpretation der Testergebnisse soll hier unterbleiben, da die Varianzschätzung s_{04}^2 einem linearen Modell entstammt, das nach dem vorausgehenden Test die tatsächlichen Verhältnisse unbefriedigend wiedergibt. Aus demselben Grund wird auf eine Aufspaltung des Parametervektors und auf die Untersuchung einzelner Komponenten gemäß Abschnitt 5 verzichtet.

Zusammenfassend kann folgende Aussage über das Verhalten des HUAYTAPALLANA-Netzes auf der Grundlage der Messungen von 1975, 1976 und 1977 gemacht werden:

- 1) Im Netzteil südlich der Verwerfungslinie sind keine relativen Punktveränderungen nachweisbar. Dieser Netzteil kann in allen Epochen als kongruent betrachtet und daher durch einen einzigen Koordinatenvektor beschrieben werden.
- 2) Bei gemäß 1) festgehaltenem südlichen Netzteil treten zwischen den Epochen im nördlichen Netzteil Koordinatenveränderungen auf, die für 75/76 hoch signifikant und 76/77 für $\alpha = 7\%$ signifikant sind.
- 3) Die Untersuchung der Klaffungsvektoren zeigt, daß Relativbewegungen zwischen den Netzteilen wohl nur in geringem Umfang vorliegen und statistisch nicht überzeugend nachgewiesen werden können.
- 4) Die signifikanten Punktverschiebungen müssen mit individuellen Punktbewegungen erklärt werden, die etwa nach NIEMEIER (1976) lokalisiert werden können.

Zusammenfassung

Auf der Grundlage bekannter Ausgleichungsverfahren und Testprozeduren wird eine Methode dargestellt, die geeignet ist, statistisch gesicherte Aussagen über die Relativbewegung von Teilen geodätischer Netze zu machen, die zu verschiedenen Zeitpunkten beobachtet wurden.

Anhang

Satz 1: Sei d ein normalverteilter Zufallsvektor mit n Komponenten und positiv definierter Varianz-Kovarianz-Matrix

$$d \sim N(\delta, \Sigma) \quad , \quad E(d) = \delta, \quad d - \delta = \varepsilon \\ E(\varepsilon \varepsilon^T) = \text{Var}(d) = \Sigma .$$

Wird d zwei Subvektoren zerlegt,

$$d_1 = (E_1 \ 0)d \quad , \quad d_2 = (0 \ E_2)d \quad , \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad n = n_1 + n_2$$

so haben diese Subvektoren folgende Verteilungen (Randverteilungen)

$$d_1 \sim N(\delta_1, \Sigma_{11}) \quad , \quad d_2 \sim N(\delta_2, \Sigma_{22})$$

Die Matrix Σ_{12} enthält die Kovarianzen zwischen d_1 und d_2 .

Die Art der Verteilung folgt unmittelbar aus dem wichtigen statistischen Satz, daß jede lineare Funktion von normalverteilten Zufallsgrößen normalverteilt ist. Ferner liest man sogleich ab, daß

$$E(d_1) = (E_1 \ 0) \delta = \delta_1 \quad , \quad \text{Var}(d_1) = (E_1 \ 0) \Sigma (E_1 \ 0)^T = \Sigma_{11} \\ E(d_2) = (0 \ E_2) \delta = \delta_2 \quad , \quad \text{Var}(d_2) = (0 \ E_2) \Sigma (0 \ E_2)^T = \Sigma_{22} \\ \text{Kov}(d_1, d_2) = (E_1 \ 0) \Sigma (0 \ E_2)^T = \Sigma_{12}$$

Satz 2: Sei d der in Satz 1 definierte Zufallsvektor, dann hat die quadratische Form in $\varepsilon = d - \delta$

$$q = \varepsilon^T \Sigma^{-1} \varepsilon$$

eine zentrale χ^2 -Verteilung mit $E(q) = r(\Sigma) = n$

Da $\Sigma \Sigma^{-1} = E$ eine idempotente Matrix ist, $E(\varepsilon) = 0$ gilt und d als normalverteilt vorausgesetzt wurde, sind die z.B. in SEARLE (1971), p. 57 als notwendig und hinreichend für die Richtigkeit von Satz 2 nachgewiesenen Voraussetzungen erfüllt.

Wird die quadratische Form für den partitionierten Vektor umgeschrieben, so erhält man mit den neuen Matrizen $P = Q^{-1} = \sigma^2 \Sigma^{-1}$

$$q = \varepsilon_1^T P_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T P_{22} \varepsilon_2 + 2 \varepsilon_1^T P_{12} \varepsilon_2 \\ q = q_1 + q_2 + 2q_{12}$$

Über die Verteilung von q_1 und q_2 kann im allgemeinen keine Aussage gemacht werden.

Zur Erleichterung der folgenden Darstellungen wird die Inverse der partitionierten Matrix $Q = P^{-1}$ angegeben.

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = P = \begin{pmatrix} P_{11} & -P_{11}Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ -Q_{22}^{-1}Q_{21}P_{11} & Q_{22}^{-1} + Q_{22}^{-1}Q_{21}P_{11}Q_{12}Q_{22}^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit } P_{11} = (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21})^{-1}$$

$$Q^{-1} = P = \begin{pmatrix} Q_{11}^{-1} + Q_{11}^{-1}Q_{12}P_{22}Q_{21}Q_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1}Q_{12}P_{22} \\ -P_{22}Q_{21}Q_{11}^{-1} & P_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } P_{22} = (Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12})^{-1}$$

Satz 3: Sei $\bar{d}_1 = d_1|d_2$ der bedingte Subvektor für einen vorgegebenen Vektor $d_2 = \Delta_2$, \bar{d}_2 sei entsprechend definiert, dann haben die bedingten Zufallsvektoren \bar{d}_1 und \bar{d}_2 folgende Verteilungen

$$\bar{d}_1 = d_1|d_2 \sim N(\delta_1 + Q_{12}Q_{22}^{-1}(d_2 - \delta_2), \sigma^2 P_{11}^{-1}) = N(\bar{\delta}_1, \sigma^2 P_{11}^{-1})$$

$$\bar{d}_2 = d_2|d_1 \sim N(\delta_2 + Q_{21}Q_{11}^{-1}(d_1 - \delta_1), \sigma^2 P_{22}^{-1}) = N(\bar{\delta}_2, \sigma^2 P_{22}^{-1})$$

Der vollständige Beweis des Satzes 3 ist in SEARLE (1971) p. 47 ausgeführt.

Satz 4: Die Vektoren \bar{d}_1 und d_2 sowie d_1 und \bar{d}_2 sind stochastisch unabhängig

$$\text{Kov}(\bar{d}_1, d_2) = \text{Kov}(d_1, \bar{d}_2) = 0$$

Der vorgegebene Subvektor d_2 , der die Bedingung festlegt, unter der die Verteilung von d_1 betrachtet wird, sei mit Δ_2 bezeichnet und die beobachteten Werte weiterhin mit d , dann gilt für \bar{d}_1

$$\bar{d}_1 = d_1 + Q_{12}Q_{22}^{-1}(\Delta_2 - d_2) = (E_1 \ 0)d - Q_{12}Q_{22}^{-1}(0 \ E_2)d + Q_{12}Q_{22}^{-1} \Delta_2 \ .$$

Wird nun d_2 mit \bar{d}_1 zusammengefaßt, so folgt

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} Q_{12}Q_{22}^{-1} \Delta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Var}(\bar{d}) = \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} E_1 & -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ -Q_{22}^{-1}Q_{21} & E_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Sigma} = \sigma^2 \begin{pmatrix} Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Die Richtigkeit von Satz 4 ist damit nachgewiesen. Der Beweis für die Unabhängigkeit von d_1 und \bar{d}_2 erfolgt entsprechend.

Satz 5: Die in Satz 2 angegebene quadratische Form läßt sich in zwei unabhängige x^2 -verteilte Komponenten zerlegen.

$$q = \varepsilon^T \Sigma^{-1} \varepsilon = \bar{\varepsilon}_1^T \bar{\Sigma}_{11}^{-1} \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2^T \Sigma_{22}^{-1} \varepsilon_2$$

$$q = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 ; \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{d}_1 - \bar{\delta}_1 , \quad \varepsilon_2 = d_2 - \delta_2$$

Nach Satz 3 und 4 kann die quadratische Form in d umgeschrieben werden für \bar{d}

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{d} - \bar{\delta}) = \begin{pmatrix} E_1 & -Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} (d - \delta)$$

$$\varepsilon = (d - \delta) = \begin{pmatrix} E_1 & Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} (\bar{d} - \bar{\delta})$$

$$q = \varepsilon^T P \varepsilon = \bar{\varepsilon}^T \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ Q_{22}^{-1}Q_{21} & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \bar{\varepsilon}$$

$$q = \bar{\varepsilon}^T \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22}^{-1} \end{pmatrix} \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1^T P_{11} \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2^T Q_{22}^{-1} \varepsilon_2$$

$$q = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$$

Der Begründung von Satz 2 folgend kann die Verteilung von \bar{q}_1 und \bar{q}_2 sofort abgelesen werden

$$\bar{q}_1 / \sigma^2 \sim x^2(n_1) \quad , \quad \bar{q}_2 / \sigma^2 \sim x^2(n_2)$$

Werden mit \bar{q}_1 , \bar{q}_2 anschließend Hypothesentests durchgeführt, so bedarf die Einführung der bedingten Verteilung einer sorgfältigen Interpretation.

Literatur

- Caspary, W. (1978) Zur Lösung singulärer Ausgleichungsmodelle durch Bedingungsgleichungen
AVN 86, (1978), pp 81-87
- Caspary, W. (1979) Zum Problem der stufenweisen Ausgleichungen
AVN 86, (1979), pp 218-226
- Heck, B., Kuntz, E.
Meier-Hirmer, B. (1977) Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen
AVN 85, (1978), pp 78-87
- Linkwitz, K.
Böttinger, W.U. (1975) Messungen hoher Präzision entlang der Bocono-Verwerfungslinie in Venezuela
FIG-Symposium, Krakau 1975, pp 383-387
- Niemeier, W. (1976) Grundprinzip und Rechenformeln der strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen
VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung Hoher Präzision, Darmstadt 1976, pp 465-482
- Pelzer, H. (1974) Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen
FIG-Kongress, Washington 1974, 608.3
- Pelzer, H. (1976) Über die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen
VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung Hoher Präzision, Darmstadt 1976, pp 483-498
- Pope, A. (1966) Surveys for Crustal Movement along the Hayward Fault
Bull. Seism. Soc. Am. 56, pp 317-323
- Searle, S.R. (1971) Linear Models
John Wiley & Sons, Inc., New York - London - Sydney - Toronto, 1971
- Welsch, W. (1978) Überwachung mikrotektonischer Bewegungen mit Hilfe geodätischer Netze, gezeigt an einem Beispiel in den peruanischen Anden
Internationale geodätische Woche Obergurgl, 1978

Anhang 1:

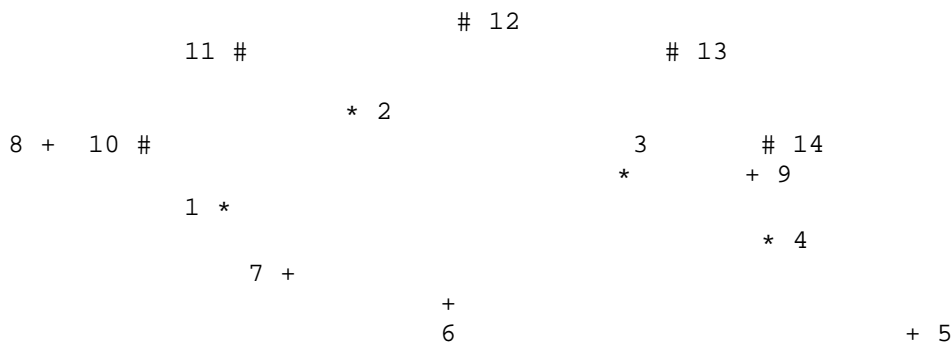
HOCHSCHULE DER BUNDESWEHR
FB B+V - WE GEODÄSIE
INGENIEURGEODÄSIE
PROF. DR.-ING. CASPARY

UEBUNG ZUR INGENIEURVERMESSUNG

DEFORMATIONSANALYSE

AUFGABE :

DIE BEILIEGENDEN FELDBUECHER SIND DIE MESSPROTOKOLLE DER NULLMESSUNG
UND EINER WIEDERHOLUNGSMESSUNG EINES STAUMAUERUEBERWACHUNGSNETZES
(STAUMAUER MONTSALVENS, SCHWEIZ)



ZEICHNUNG UNMASZSTAEBLICH!

LEGENDE :

STANDPUNKTE *
VERSICHERUNGSPUNKTE +
OBJEKTPUNKTE #

- A) UNTERSUCHEN SIE DIE STABILITAET DER STAND- UND VERSICHERUNGSPUNKTE MIT EINEM GLOBALEN STATISTISCHEN TEST.
- B) FALLS UNTER A) DEFORMATIONEN STATISTISCH NACHGEWIESEN WURDEN, SIND SIE ZU LOKALISIEREN.
- C) BERECHNEN SIE GROESSE UND VARIANZ DER AENDERUNGEN DER OBJEKTPUNKTE ZWISCHEN DEN MESSPERIODEN DURCH EINE GEMEINSAME AUSGLEICHUNG ALLER MESSUNGEN.

MESSPROTOKOLL

2

DATUM : 26.MAI 1977

STRECKEN (REDUZIERT AUF MITTLEREN MESSUNGSHORIZONT)

VON - NACH	MITTEL	STANDARDABW.	FREIH.GRAD
1 2	14,6132	0,28	4
1 3	49,1886	0,23	4
1 4	69,9303	0,24	4
2 3	36,5736	0,36	4
2 4	59,2312	0,16	4
3 4	24,6206	0,34	4

		STANDPUNKT 1				RICHTUNGEN I										
I	I	LAGE I	LAGE II	MITTEL	I	MITTEL	I	D	I	V						
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I						
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I	I	I	I						
I	2	I	0,5440	I	,5470	I	0,54550	I	0,00000	I	0	I	-30	I		
I	13	I	4,9001	I	,9037	I	4,90190	I	4,35640	I	4,35617	I	22	I	-8	I
I	14	I	27,6575	I	,6615	I	27,65950	I	27,11400	I	27,11370	I	29	I	-1	I
I	3	I	29,0943	I	,0954	I	29,09485	I	28,54935	I	28,54910	I	25	I	-5	I
I	9	I	30,4598	I	,4607	I	30,46025	I	29,91475	I	29,91425	I	50	I	20	I
I	4	I	43,5244	I	,5277	I	43,52605	I	42,98055	I	42,98037	I	17	I	-13	I
I	5	I	56,5150	I	,5177	I	56,51635	I	55,97085	I	55,97127	I	-42	I	-72	I
I	6	I	80,9829	I	,9846	I	80,98375	I	80,43825	I	80,43747	I	77	I	47	I
I	7	I	126,9760	I	,9758	I	126,97590	I	126,43040	I	126,42992	I	47	I	17	I
I	8	I	257,2867	I	,2881	I	257,28740	I	257,74190	I	256,74088	I	102	I	72	I
I	10	I	274,1660	I	,1674	I	274,16670	I	273,62120	I	273,62065	I	55	I	25	I
I	11	I	351,0399	I	,0427	I	351,04130	I	350,49580	I	350,49565	I	15	I	-15	I
I	12	I	380,6461	I	,6493	I	380,64770	I	380,10220	I	380,10220	I	0	I	-30	I
I		I		I		I		I		I		I	30	I	8	I
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	2	I	100,5457	I	,5469	I	100,54630	I	0,00000	I		I	0	I	30	I
I	13	I	104,9016	I	,9029	I	104,90225	I	4,35595	I		I	-22	I	8	I
I	14	I	127,6586	I	,6608	I	127,65970	I	27,11340	I		I	-29	I	1	I
I	3	I	129,0943	I	,0959	I	129,09515	I	28,54885	I		I	-25	I	5	I
I	9	I	130,4588	I	,4613	I	130,46005	I	29,91375	I		I	-49	I	-19	I
I	4	I	143,5254	I	,5276	I	143,52650	I	42,98020	I		I	-17	I	13	I
I	5	I	156,5173	I	,5187	I	156,51800	I	55,97170	I		I	42	I	72	I
I	6	I	180,9830	I	,9830	I	180,98300	I	80,43670	I		I	-77	I	-47	I
I	7	I	226,9755	I	,9760	I	226,97575	I	126,42945	I		I	-47	I	-17	I
I	8	I	357,2852	I	,2871	I	357,28615	I	256,73985	I		I	*02	I	-72	I
I	10	I	374,1656	I	,1672	I	374,16640	I	273,62010	I		I	-54	I	-24	I
I	11	I	51,0399	I	,0437	I	51,04180	I	350,49550	I		I	-14	I	16	I
I	12	I	80,6477	I	,6493	I	80,64850	I	380,10220	I		I	0	I	30	I
I		I		I		I		I		I		I	-30	I	-5	I
I	SUMME	VV = 32293,	STANDARDABW.	DES MITTELS = 0,37	MGON,	FREIH.GRAD = 12	I									

		STANDPUNKT														
I	I	LAGE I	LAGE II	2	I	I	MITTEL	I	I	I	I					
IZIELPKTI	I	I	I	MITTEL	I	RICHTUNGENI	MITTEL	I	D	I	V					
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I					
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I					
I	1	I	0,6771	I	,6795	I	0,67830	I	0,00000	I	0	I	2	I		
I	10	I	30,1905	I	,1931	I	30,19180	I	29,51350	I	29,51355	I	-4	I	-2	I
I	8	I	33,0893	I	,0908	I	33,09005	I	32,41175	I	32,41175	I	0	I	2	I
I	11	I	115,7044	I	,7052	I	115,70480	I	115,02650	I	115,02695	I	-45	I	-43	I
I	12	I	172,1062	I	,1076	I	172,10690	I	171,42860	I	171,42847	I	12	I	14	I
I	13	I	206,4043	I	,4068	I	206,40555	I	205,72725	I	205,72760	I	-34	I	-32	I
I	14	I	234,3862	I	,3890	I	234,38760	I	233,70930	I	273,70908	I	22	I	24	I
I	9	I	238,1538	I	,1557	I	238,15475	I	237,47645	I	237,47643	I	2	I	4	I
I	3	I	240,3115	I	,3135	I	240,31250	I	239,63420	I	239,63423	I	-2	I	0	I
I	4	I	253,5125	I	,5144	I	253,51345	I	252,83515	I	252,83543	I	-27	I	-25	I
I	5	I	264,4621	I	,4626	I	264,46235	I	263,78405	I	263,78378	I	27	I	29	I
I	6	I	307,3655	I	,3665	I	307,36600	I	306,68770	I	306,68748	I	22	I	24	I
I	7	I	366,7692	I	,7701	I	366,76965	I	366,09135	I	366,09138	I	-2	I	0	I
I		I		I		I		I		I		I	-2	I	5	I
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	1	I	100,6778	I	,6791	I	100,67845	I	0,00000	I		I	0	I	-2	I
I	10	I	130,1914	I	,1927	I	130,19205	I	29,51360	I		I	4	I	2	I
I	8	I	133,0890	I	,0914	I	133,09020	I	32,41175	I		I	0	I	-2	I
I	11	I	215,7052	I	,7065	I	215,70585	I	115,02740	I		I	45	I	43	I
I	12	I	272,1048	I	,1088	I	272,10680	I	171,42835	I		I	-12	I	-14	I
I	13	I	306,4057	I	,4071	I	306,40640	I	205,72795	I		I	35	I	33	I
I	14	I	334,3862	I	,3884	I	334,38730	I	233,70885	I		I	-22	I	-24	I
I	9	I	338,1537	I	,1560	I	338,15485	I	237,47640	I		I	-2	I	-4	I
I	3	I	340,3115	I	,3139	I	340,31270	I	239,63425	I		I	2	I	0	I
I	4	I	353,5123	I	,5160	I	353,51415	I	252,83570	I		I	27	I	25	I
I	5	I	364,4605	I	,4634	I	364,46195	I	263,78350	I		I	-27	I	-29	I
I	6	I	7,3657	I	,3657	I	7,36570	I	306,68725	I		I	-22	I	-24	I
I	7	I	66,7685	I	,7712	I	66,76985	I	366,09140	I		I	2	I	0	I
I		I		I		I		I		I		I	2	I	1	I
I SUMME VV =11495, STANDARDABW. DES MITTELS = 0,22 MGON, FREIH.GRAD = 12												I	I	I		

		STANDPUNKT 3			RICHTUNGEN I			D V		
I	I	LAGE I	LAGE II	MITTEL	MITTEL	MITTEL	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	1	I 0,9751	I ,9761	I 0,97560	I 0,00000	I 0,00000	I 0	I 10	I	I
I	10	I 8,3753	I ,3788	I 8,37705	I 7,40145	I 7,40195	I -49	I -39	I	I
I	8	I 8,7767	I ,7796	I 8,77815	I 7,80255	I 7,80190	I 64	I 74	I	I
I	2	I 12,0851	I ,0606	I 12,05935	I 11,08375	I 11,08395	I -19	I -9	I	I
I	11	I 36,7890	I ,7909	I 36,78995	I 35,81435	I 35,81405	I 29	I 39	I	I
I	12	I 72,5908	I ,5928	I 72,59180	I 71,61620	I 71,61620	I 0	I 10	I	I
I	13	I 121,1059	I ,1082	I 121,10705	I 120,13145	I 120,13103	I 42	I 52	I	I
I	14	I 196,3614	I ,3634	I 196,36240	I 195,38680	I 195,38747	I -67	I -57	I	I
I	9	I 205,8151	I ,8165	I 205,81580	I 204,84020	I 204,84045	I -25	I -15	I	I
I	4	I 245,0466	I ,0486	I 245,04760	I 244,07200	I 244,07250	I -49	I -39	I	I
I	5	I 250,8163	I ,8188	I 250,81755	I 249,84195	I 249,84220	I -25	I -15	I	I
I	6	I 348,3731	I ,3756	I 348,37435	I 347,39875	I 347,39890	I -15	I -5	I	I
I	7	I 384,7408	I ,7427	I 384,74175	I 383,76615	I 383,76633	I -17	I -7	I	I
I		I	I	I	I	I	I -10	I -7	I	I
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	1	I 100,9743	I ,9762	I 100,97525	I 0,00000	I	I 0	I -10	I	I
I	10	I 108,3777	I ,3777	I 108,37770	I 7,40245	I	I 49	I 39	I	I
I	8	I 108,7753	I ,7777	I 108,77650	I 7,80125	I	I -64	I -74	I	I
I	2	I 112,0588	I ,0600	I 112,05940	I 11,08415	I	I 19	I 9	I	I
I	11	I 136,7876	I ,7904	I 136,78900	I 35,81375	I	I -29	I -39	I	I
I	12	I 172,5902	I ,5927	I 172,59145	I 71,61620	I	I 0	I -10	I	I
I	13	I 221,1054	I ,1063	I 221,10585	I 120,13060	I	I -42	I -52	I	I
I	14	I 296,3624	I ,3644	I 296,36340	I 195,38815	I	I 67	I 57	I	I
I	9	I 305,8140	I ,8179	I 305,81595	I 204,84070	I	I 25	I 15	I	I
I	4	I 345,0474	I ,0491	I 345,04825	I 244,07300	I	I 50	I 40	I	I
I	5	I 350,8171	I ,8183	I 350,81770	I 249,84245	I	I 25	I 15	I	I
I	6	I 48,3728	I ,3758	I 48,37430	I 347,39905	I	I 15	I 5	I	I
I	7	I 84,7404	I ,7431	I 84,74175	I 383,76650	I	I 17	I 7	I	I
I		I	I	I	I	I	I 10	I 9	I	I
I SUMME VV =33673, STANDARDABW. DES MITTELS = 0,37 MGON, FREIH.GRAD = 12 I										

		STANDPUNKT 4				RICHTUNGEN I										
I	I	LAGE I	LAGE II	MITTEL	I	MITTEL	I	D	I	V						
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I						
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I	I	I	I						
I	1	I	0,2551	I	,2584	I	0,25675	I	0,00000	I	0	I	-56	I		
I	8	I	3,1977	I	,2002	I	3,19895	I	2,94220	I	2,94178	I	42	I	-14	I
I	10	I	4,0688	I	,0702	I	4,06950	I	3,81275	I	3,81180	I	94	I	38	I
I	2	I	10,1115	I	,1140	I	10,11275	I	9,85600	I	9,85548	I	52	I	-4	I
I	11	I	24,4622	I	,4637	I	24,46295	I	24,20620	I	24,20535	I	84	I	28	I
I	3	I	29,9003	I	,9022	I	29,90125	I	29,64450	I	29,64360	I	90	I	34	I
I	12	I	46,2343	I	,2374	I	46,23585	I	45,97910	I	45,97842	I	67	I	11	I
I	13	I	67,1770	I	,1812	I	67,17910	I	66,92235	I	66,92135	I	99	I	43	I
I	9	I	87,1996	I	,2027	I	87,20115	I	86,94440	I	86,94368	I	72	I	16	I
I	14	I	97,5153	I	,5178	I	97,51655	I	97,25980	I	97,25965	I	15	I	-41	I
I	5	I	239,7119	I	,7142	I	239,71305	I	239,45630	I	239,45588	I	42	I	-14	I
I	6	I	370,4271	I	,4299	I	370,42850	I	370,17175	I	370,17118	I	57	I	1	I
I	7	I	388,6481	I	,6505	I	388,64930	I	388,39255	I	388,39240	I	15	I	-41	I
I		I		I		I		I		I		I	56	I	-11	I
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	1	I	100,2570	I	,2586	I	100,25780	I	0,00000	I		I	0	I	56	I
I	8	I	103,1985	I	,1998	I	103,19915	I	2,94135	I		I	-42	I	14	I
I	10	I	104,0672	I	,0701	I	104,06865	I	3,81085	I		I	-94	I	-38	I
I	2	I	110,1110	I	,1145	I	110,11275	I	9,85495	I		I	-52	I	4	I
I	11	I	124,4615	I	,4631	I	124,46230	I	24,20450	I		I	-84	I	-28	I
I	3	I	129,8999	I	,9011	I	129,90050	I	29,64270	I		I	-90	I	-34	I
I	12	I	146,2347	I	,2364	I	146,23555	I	45,97775	I		I	-67	I	-11	I
I	13	I	167,1776	I	,1787	I	167,17815	I	66,92035	I		I	-99	I	-43	I
I	9	I	187,1997	I	,2018	I	187,20075	I	86,94295	I		I	-72	I	-16	I
I	14	I	197,5165	I	,5181	I	197,51730	I	97,25950	I		I	-15	I	41	I
I	5	I	339,7122	I	,7143	I	339,71325	I	239,45545	I		I	-42	I	14	I
I	6	I	70,4283	I	,4285	I	70,42840	I	370,17060	I		I	-57	I	-1	I
I	7	I	88,6490	I	,6511	I	88,65005	I	388,39225	I		I	-14	I	42	I
I		I		I		I		I		I		I	56	I	1	I
I		SUMME VV =25117,		STANDARDABW. DES MITTELS = 0,32 MGON,		FREIH.GRAD = 12		I			I			I		

MESSPROTOKOLL

2

DATUM : 19.JULI 1976

STRECKEN (REDUZIERT AUF MITTLEREN MESSUNGSHORIZONT)

VON - NACH	MITTEL	STANDARDABW.	FREIH.GRAD
1 2	14,6132	0,19	4
1 3	49,1892	0,12	4
1 4	69,9298	0,20	4
2 3	36,5737	0,29	4
2 4	59,2306	0,23	4
3 4	24,6210	0,27	4

		STANDPUNKT				1											
I	I	LAGE I	LAGE II	MITTEL	RICHTUNGEN I	MITTEL	D	V									
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I							
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I	I	I	I							
I	2	I	0,4745	I	,4785	I	0,47650	I	0,00000	I	0	I	-7	I			
I	13	I	4,8342	I	,8355	I	4,83485	I	4,35835	I	4,35813	I	22	I	15	I	
I	14	I	27,5880	I	,5907	I	27,58935	I	27,11285	I	27,11295	I	-9	I	-16	I	
I	3	I	29,0244	I	,0255	I	29,02495	I	28,54845	I	28,54872	I	-27	I	-34	I	
I	9	I	30,3886	I	,3906	I	30,38960	I	29,91310	I	29,91282	I	27	I	20	I	
I	4	I	43,4550	I	,4581	I	43,45655	I	42,98005	I	42,97997	I	7	I	0	I	
I	5	I	56,4474	I	,4491	I	56,44825	I	55,97175	I	55,97140	I	35	I	28	I	
I	6	I	80,9124	I	,9138	I	80,91310	I	80,43660	I	80,43697	I	-37	I	-44	I	
I	7	I	126,9058	I	,9066	I	126,90620	I	126,42970	I	126,42943	I	27	I	20	I	
I	8	I	257,2161	I	,2173	I	257,21670	I	257,74020	I	256,74003	I	17	I	10	I	
I	10	I	274,1038	I	,1055	I	274,10465	I	273,62815	I	273,62840	I	-24	I	-31	I	
I	11	I	350,9771	I	,9793	I	350,97820	I	350,50170	I	350,50153	I	17	I	10	I	
I	12	I	380,5838	I	,5860	I	380,58490	I	380,10840	I	380,10795	I	45	I	38	I	
I		I		I		I		I		I		I	7	I	15	I	
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	2	I	100,4755	I	,4783	I	100,47690	I	0,00000	I		I	0	I	7	I	
I	13	I	104,8326	I	,8370	I	104,83480	I	4,35790	I		I	-22	I	-15	I	
I	14	I	127,5888	I	,5911	I	127,58995	I	27,11305	I		I	9	I	16	I	
I	3	I	129,0258	I	,0260	I	129,02590	I	28,54900	I		I	27	I	34	I	
I	9	I	130,3881	I	,3908	I	130,38945	I	29,91255	I		I	-27	I	-20	I	
I	4	I	143,4560	I	,4576	I	143,45680	I	42,97990	I		I	-7	I	0	I	
I	5	I	156,4471	I	,4488	I	156,44795	I	55,97105	I		I	-35	I	-28	I	
I	6	I	180,9131	I	,9154	I	180,91425	I	80,43735	I		I	37	I	44	I	
I	7	I	226,9056	I	,9065	I	226,90605	I	126,42915	I		I	-27	I	-20	I	
I	8	I	357,2160	I	,2175	I	357,21675	I	256,73985	I		I	-17	I	-10	I	
I	10	I	374,1043	I	,1068	I	374,10555	I	273,62865	I		I	25	I	32	I	
I	11	I	50,9776	I	,9789	I	50,97825	I	350,50135	I		I	-17	I	-10	I	
I	12	I	80,5831	I	,5857	I	80,58440	I	380,10750	I		I	-45	I	-38	I	
I		I		I		I		I		I		I	-7	I	-13	I	
I SUMME VV =15685,		STANDARDABW. DES MITTELS = 0,26 MGON,				FREIH.GRAD = 12		I				I		I		I	

		STANDPUNKT 4				RICHTUNGEN I		D		V	
I	I	LAGE I	LAGE II	MITTEL	I	I	MITTEL	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	1	I 0,1083	I ,1095	I 0,10890	I 0,00000	I 0,00000	I 0,00000	I 0	I -11	I	I
I	8	I 3,0509	I ,0514	I 3,05115	I 2,94225	I 2,94193	I 2,94193	I 32	I 21	I	I
I	10	I 3,9209	I ,9235	I 3,92220	I 3,81330	I 3,81337	I 3,81337	I -7	I -18	I	I
I	2	I 9,9641	I ,9668	I 9,96545	I 9,85655	I 9,85610	I 9,85610	I 45	I 34	I	I
I	11	I 24,3115	I ,3131	I 24,31230	I 24,20340	I 24,20348	I 24,20348	I -7	I -18	I	I
I	3	I 29,7535	I ,7556	I 29,75455	I 29,64565	I 29,64490	I 29,64490	I 75	I 64	I	I
I	12	I 46,0839	I ,0864	I 46,08515	I 45,97625	I 45,97615	I 45,97615	I 10	I -1	I	I
I	13	I 67,0274	I ,0300	I 67,02870	I 66,91980	I 66,91972	I 66,91972	I 7	I -4	I	I
I	9	I 87,0534	I ,0553	I 87,05435	I 86,94545	I 86,94562	I 86,94562	I -17	I -28	I	I
I	14	I 97,3714	I ,3728	I 97,37210	I 97,26320	I 97,26362	I 97,26362	I -42	I -53	I	I
I	5	I 239,5610	I ,5632	I 239,56210	I 239,45320	I 239,45313	I 239,45313	I 7	I -4	I	I
I	6	I 370,2793	I ,2824	I 370,28085	I 370,17195	I 370,17155	I 370,17155	I 40	I 29	I	I
I	7	I 388,5001	I ,5033	I 388,50170	I 388,39280	I 388,39280	I 388,39280	I 0	I -11	I	I
I		I	I	I	I	I	I	I 11	I 11	I	I
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	1	I 100,1083	I ,1104	I 100,10935	I 0,00000	I	I	I 0	I 11	I	I
I	8	I 103,0498	I ,0521	I 103,05095	I 2,94160	I	I	I -32	I -21	I	I
I	10	I 103,9222	I ,9234	I 103,92280	I 3,81345	I	I	I 7	I 18	I	I
I	2	I 109,9640	I ,9660	I 109,96500	I 9,85565	I	I	I -45	I -34	I	I
I	11	I 124,3118	I ,3140	I 124,31290	I 24,20355	I	I	I 7	I 18	I	I
I	3	I 129,7524	I ,7546	I 129,75350	I 29,64415	I	I	I -75	I -64	I	I
I	12	I 146,0848	I ,0860	I 146,08540	I 45,97605	I	I	I -10	I 1	I	I
I	13	I 167,0287	I ,0293	I 167,02900	I 66,91965	I	I	I -7	I 4	I	I
I	9	I 187,0537	I ,0566	I 187,05515	I 86,94580	I	I	I 17	I 28	I	I
I	14	I 197,3724	I ,3744	I 197,37340	I 97,26405	I	I	I 42	I 53	I	I
I	5	I 339,5618	I ,5630	I 339,56240	I 239,45305	I	I	I -7	I 4	I	I
I	6	I 70,2794	I ,2816	I 70,28050	I 370,17115	I	I	I -40	I -29	I	I
I	7	I 88,5021	I ,5022	I 88,50215	I 388,39280	I	I	I 0	I 11	I	I
I		I	I	I	I	I	I	I -11	I -11	I	I
I SUMME VV =22100,		STANDARDABW. DES MITTELS = 0,30 MGON,				FREIH.GRAD = 12 I					

I		I		STANDPUNKT		3	I		I		I		I			
IZIELPKTI	LAGE I	LAGE II	MITTEL	RICHTUNGENI	MITTEL	D	V									
ISATZ	1I	I	I	I	I	I	I									
I	1	I	0,1042	I	,1064	I	0,10530	I	0,00000	I	0,00000	I	0	I	-36	I
I	10	I	7,5080	I	,5097	I	7,50885	I	7,40355	I	7,40300	I	55	I	19	I
I	8	I	7,9078	I	,9087	I	7,90825	I	7,80295	I	7,80250	I	45	I	9	I
I	2	I	11,1893	I	,1910	I	11,19015	I	11,08485	I	11,08430	I	54	I	18	I
I	11	I	35,9158	I	,9164	I	35,91610	I	35,81080	I	35,81052	I	27	I	-9	I
I	12	I	71,7166	I	,7187	I	71,71765	I	71,61235	I	71,61200	I	34	I	-2	I
I	13	I	120,2369	I	,2392	I	120,23805	I	120,13275	I	120,13273	I	2	I	-34	I
I	14	I	195,4906	I	,4931	I	195,49185	I	195,38655	I	195,38595	I	59	I	23	I
I	9	I	204,9456	I	,9479	I	204,94675	I	204,84145	I	204,84090	I	54	I	18	I
I	4	I	244,1801	I	,1826	I	244,18135	I	244,07605	I	244,07593	I	12	I	-24	I
I	5	I	249,9468	I	,9493	I	249,94805	I	249,84275	I	249,84238	I	37	I	1	I
I	6	I	347,5043	I	,5069	I	347,50560	I	347,40030	I	347,39963	I	67	I	31	I
I	7	I	383,8720	I	,8743	I	383,87315	I	383,76785	I	383,76758	I	27	I	-9	I
I		I		I		I		I		I		I	36	I	-7	I
ISATZ	2I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	1	I	100,1056	I	,1063	I	100,10595	I	0,00000	I		I	0	I	36	I
I	10	I	107,5076	I	,5092	I	107,50840	I	7,40245	I		I	-55	I	-19	I
I	8	I	107,9073	I	,9087	I	107,90800	I	7,80205	I		I	-45	I	-9	I
I	2	I	111,1887	I	,1907	I	111,18970	I	11,08375	I		I	-54	I	-18	I
I	11	I	135,9156	I	,9168	I	135,91620	I	35,81025	I		I	-27	I	9	I
I	12	I	171,7173	I	,7179	I	171,71760	I	71,61165	I		I	-34	I	2	I
I	13	I	220,2377	I	,2396	I	220,23865	I	120,13270	I		I	-2	I	34	I
I	14	I	295,4909	I	,4917	I	295,49130	I	195,38535	I		I	-59	I	-23	I
I	9	I	304,9453	I	,9473	I	304,94630	I	204,84035	I		I	-54	I	-18	I
I	4	I	344,1803	I	,1832	I	344,18175	I	244,07580	I		I	-12	I	24	I
I	5	I	349,9473	I	,9486	I	349,94795	I	249,84200	I		I	-37	I	-1	I
I	6	I	47,5040	I	,5058	I	47,50490	I	347,39895	I		I	-67	I	-31	I
I	7	I	83,8718	I	,8747	I	83,87325	I	383,76730	I		I	-27	I	9	I
I		I		I		I		I		I		I	-36	I	-5	I
I	SUMME	VV	=11550,	STANDARDABW.	DES MITTELS	=	0,22	MGON,	FREIH.GRAD	=	12	I				

I		STANDPUNKT 2				I		I		I						
I	I	LAGE I	LAGE II	MITTEL	RICHTUNGENI	MITTEL	I	D	I	V	I					
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I					
ISATZ 1I		I	I	I	I	I	I	I	I	I	I					
I	1	I	0,9700	I	,9731	I	0,97155	I	0,00000	I	0	I	-8	I		
I	10	I	30,4857	I	,4892	I	30,48745	I	29,51590	I	29,51585	I	5	I	-3	I
I	8	I	33,3822	I	,3829	I	33,38255	I	32,41100	I	32,41132	I	-32	I	-40	I
I	11	I	116,0000	I	,0023	I	116,00115	I	115,02960	I	115,02905	I	55	I	47	I
I	12	I	172,4065	I	,4093	I	172,40790	I	171,43635	I	171,43600	I	35	I	27	I
I	13	I	206,7030	I	,7035	I	206,70325	I	205,73170	I	205,73133	I	37	I	29	I
I	14	I	234,6801	I	,6813	I	234,68070	I	233,70915	I	273,70882	I	32	I	24	I
I	9	I	238,4470	I	,4485	I	238,44775	I	237,47620	I	237,47645	I	-25	I	-33	I
I	3	I	240,6045	I	,6067	I	240,60560	I	239,63405	I	239,63378	I	27	I	19	I
I	4	I	253,8072	I	,8080	I	253,80760	I	252,83605	I	252,83618	I	-12	I	-20	I
I	5	I	264,7536	I	,7553	I	264,75445	I	263,78290	I	263,78323	I	-32	I	-40	I
I	6	I	307,6581	I	,6601	I	307,65910	I	306,68755	I	306,68750	I	4	I	-4	I
I	7	I	367,0620	I	,0632	I	367,06260	I	366,09105	I	366,09088	I	17	I	9	I
I		I		I		I		I		I		I	8	I	7	I
ISATZ 2I		I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	1	I	100,9703	I	,9731	I	100,97170	I	0,00000	I		I	0	I	8	I
I	10	I	130,4861	I	,4889	I	130,48750	I	29,51580	I		I	-5	I	3	I
I	8	I	133,3820	I	,3847	I	133,38335	I	32,41165	I		I	32	I	40	I
I	11	I	215,9993	I	,0011	I	216,00020	I	115,02850	I		I	-55	I	-47	I
I	12	I	272,4071	I	,4076	I	272,40735	I	171,43565	I		I	-34	I	-26	I
I	13	I	306,7020	I	,7033	I	306,70265	I	205,73095	I		I	-37	I	-29	I
I	14	I	334,6791	I	,6813	I	334,68020	I	233,70850	I		I	-32	I	-24	I
I	9	I	338,4473	I	,4495	I	338,44840	I	237,47670	I		I	25	I	33	I
I	3	I	340,6041	I	,6063	I	340,60520	I	239,63350	I		I	-27	I	-19	I
I	4	I	353,8071	I	,8089	I	353,80800	I	252,83630	I		I	12	I	20	I
I	5	I	364,7543	I	,7562	I	364,75525	I	263,78355	I		I	32	I	40	I
I	6	I	7,6583	I	,6600	I	7,65915	I	306,68745	I		I	-4	I	4	I
I	7	I	67,0622	I	,0626	I	67,06240	I	366,09070	I		I	-17	I	-9	I
I		I		I		I		I		I		I	-8	I	-6	I
I SUMME VV =19097,		STANDARDABW. DES MITTELS = 0,28 MGON,				FREIH.GRAD = 12		I								

Anhang 2:

HUAYTAPALLANA

1975

Näherungskoordinaten:

Punkt	x [m]	y [m]
1	1000,000	2232,194
2	1737,156	2175,874
3	1148,348	2577,368
4	1000,000	1000,000
5	1893,092	1252,818
6	1778,635	1774,584
7	1596,958	1262,644
8	1596,606	1725,782
9	1554,891	2253,863
10	1237,101	2424,436
11	1282,128	2053,959

Winkel

in Punkt	von	nach	α [gon]
1	4	10	143,37253
1	4	3	174,15895
1	3	4	225,84167
1	5	11	17,05926
1	10	3	30,78705
1	4	11	64,12716
1	4	5	47,06667
1	11	3	110,03086
1	11	10	79,24290
2	9	5	136,39877
2	3	4	102,45340
2	3	7	128,40556
2	3	6	144,65988
2	5	3	251,24506
2	10	5	140,02469
3	5	10	0,86790
3	5	2	29,29074

./.

1975/2

noch Winkel

<i>in</i>	<i>von</i>	<i>nach</i>	α [gon]
3	10	6	8,89691
3	6	2	19,52623
3	1	4	19,87099
3	4	11	21,89753
3	11	5	16,68025
3	1	5	58,44877
3	2	1	312,25957
3	10	2	28,42130
4	5	11	65,78704
4	5	1	82,43796
4	6	1	50,16605
4	1	5	317,56296
4	5	2	46,78951
4	5	3	76,46667
4	7	1	73,61327
5	2	1	36,41420
5	8	4	81,91204
5	4	2	293,09198
5	3	4	84,95586
5	6	4	103,81543
6	5	9	214,05833
6	5	2	192,81111
6	5	10	230,47901
6	2	8	110,11759
6	2	7	171,73210
6	4	2	256,72469
7	6	4	148,09660
7	4	6	251,90340
7	2	4	136,08333
7	8	4	126,33364
7	11	4	102,27963
8	6	11	131,95864
8	5	10	194,59815
8	7	9	204,96296
8	9	11	43,62222

./.

1975/3

noch Winkel

<i>in</i>	<i>von</i>	<i>nach</i>	α [gon]
8	11	5	187,01358
8	5	9	169,36543
9	11	2	133,99074
9	2	10	194,38117
9	10	11	71,62840
9	8	2	69,23827
9	10	6	159,16790
10	2	3	162,84475
10	8	9	38,38735
10	9	2	1,99259
10	11	8	22,55432
10	11	2	62,93364
10	1	11	64,32253
10	2	11	337,06574
10	3	1	109,89815
11	3	1	48,19877
11	9	1	123,85988
11	10	7	216,41327
11	7	9	116,15741
11	9	4	243,08457
11	1	8	184,51235
11	8	3	167,28735

Strecken

<i>von</i>	<i>nach</i>	s [m]
1	3	375,7008
1	4	1232,1876
1	5	1325,4238
1	10	305,2432
1	11	333,6915
2	3	712,6468
2	4	1387,8157
5	2	936,1287
2	6	403,4426
2	7	923,9216

./.

noch Strecken

von	nach	s [m]	
2	9	198,2614	
2	10	558,4034	
3	4	1584,3382	
3	5	1519,5625	1x
3	6	1020,6664	
3	10	176,8214	
3	11	540,2307	
4	5	928,1706	
4	6	1098,2816	
4	7	652,1752	1x
4	8	939,4759	1x
4	11	1091,0573	
5	6	534,1423	1x
5	8	558,1912	
6	7	543,2024	
6	8	188,4818	
6	9	528,9723	1x
7	8	463,1114	1x
7	11	851,6488	1x
8	9	529,7653	
8	10	785,7280	
8	11	454,5306	
9	10	360,6400	
9	11	338,1712	
10	11	373,2024	

HUAYTAPALLANA

1976

Näherungskoordinaten:

wie 1975

Winkel:

<i>in</i>	<i>von</i>	<i>nach</i>	<i>α [gon]</i>
1	4	10	143,37160
1	4	3	174,15864
1	3	4	225,84043
1	5	11	17,05926
1	10	3	30,78642
1	4	11	64,12716
1	4	5	47,06821
1	11	3	110,03117
1	11	10	79,24383
2	9	5	136,40000
2	3	4	102,45216
2	3	7	128,40586
2	3	6	144,66111
2	5	3	251,24228
2	10	5	140,02562
3	5	10	0,86795
3	5	2	29,29074
3	10	6	8,89568
3	6	2	19,52654
3	1	4	19,87160
3	4	11	21,89753
3	11	5	16,67778
3	1	5	58,44722
3	2	1	312,26049
3	10	2	28,42253
4	5	11	65,78765
4	5	1	82,43673
4	6	1	50,16667
4	1	5	317,56265
4	5	2	46,78858
4	5	3	76,46852
4	7	1	73,61327
5	2	1	36,41327
5	8	4	81,91080

./.

noch Winkel

<i>in</i>	<i>von</i>	<i>nach</i>	α [gon]
5	4	2	293,09167
5	3	4	84,95556
5	6	4	103,81543
6	5	9	214,05864
6	5	2	192,81142
6	5	10	230,47901
6	2	8	110,11667
6	2	7	171,73179
6	4	2	256,72531
7	6	4	148,09630
7	4	6	251,90309
7	2	4	136,08302
7	8	4	126,33272
7	11	4	102,27901
8	6	11	131,96235
8	5	10	194,59969
8	7	9	204,96389
8	9	11	43,62222
8	11	5	187,01296
8	5	9	169,36636
9	11	2	133,99012
9	2	10	194,38364
9	10	11	71,62840
9	8	2	69,23858
9	10	6	159,16667
10	2	3	162,84506
10	8	9	38,38827
10	9	2	1,99198
10	11	8	22,55525
10	11	2	62,93457
10	1	11	64,32191
10	2	11	337,06574
10	3	1	109,89568
11	3	1	48,19938
11	9	1	123,86142
11	10	7	216,41111
11	7	9	116,15926
11	9	4	243,08395

./.

noch Winkel

<i>in</i>	<i>von</i>	<i>nach</i>	α [gon]
11	1	8	184,51111
11	8	3	167,29074
10	8	6	13,97562
9	10	8	136,37870
8	11	4	107,56142
6	3	4	107,46080
5	1	4	70,49444
4	6	3	44,19691
4	8	11	27,14969

Strecken

<i>von</i>	<i>nach</i>	s [m]	
1	3	375,7062	
1	4	1232,1925	
1	5	1325,4236	
1	10	305,2424	
1	11	333,6882	
2	3	712,6476	
2	4	1387,8092	
5	2	936,1195	
2	6	403,4404	
2	7	923,9166	
2	9	198,2572	
2	10	558,4006	
3	4	1584,3342	
3	5	1519,5539	
3	6	1020,6630	
3	10	176,8195	
3	11	540,2324	
4	5	928,1717	
4	6	1098,2760	
4	7	652,1754	
4	8	939,4675	
4	11	1091,0560	1x
5	6	534,1414	
5	8	558,1884	
6	8	188,4921	
6	7	543,2054	

./.

noch Strecken

<i>von</i>	<i>nach</i>	<i>s [m]</i>
6	9	528,9729
7	8	463,1100
6	10	845,9182
7	11	851,6549
8	9	529,7668
8	10	785,7308
8	11	454,5390
9	10	360,6373
9	11	338,1682
10	11	373,1987

HUAYTAPALLANA

1977

Näherungskoordinaten: 1 ... 11 wie 1975

dazu:

Punkt	x [m]	y [m]
12	1871,469	1252,980

Richtungen:

in	nach	r [gon]
1	11	0
	10	79,24383
	3	110,03086
	4	335,87130
2	3	0
	10	8,73148
	9	12,35741
	4	102,45062
	8	118,82870
3	6	144,65833
	1	0
	4	19,87037
	11	41,76821
	5	58,44753
4	2	87,73951
	5	0
	7	8,82377
	6	32,26790
	8	38,63395
5	2	46,78519
	2	0
	6	3,09259
	8	24,99630
6	4	106,90741
	2	0
	9	21,24722
	8	110,11574
	4	143,27346
7	7	171,73210
	5	207,18827

./.

1977/2

noch Richtungen

<i>in</i>	<i>nach</i>	<i>r [gon]</i>
7	6	0
	2	12,01327
	8	21,76358
	4	148,09691
8	2	0
	9	24,28580
	4	175,47037
	7	219,32438
	5	254,92191
	6	335,94846
9	3	0
	10	11,42994
	11	83,05864
	8	147,80833
	6	170,59784
	2	217,04722
10	1	0
	11	64,32253
	6	100,85370
	2	127,25864
	3	290,10370
11	4	0
	8	65,28951
	10	224,34846
	3	232,58056
	1	280,78056
2	8	0
	7	9,57346
	6	25,82932
	5	29,92500
3	10	59,31235
	6	68,20741
	2	87,73488
4	5	0
	8	38,63519
	11	65,78457
	3	76,46451
	1	82,43395

./.

1977/3

noch Richtungen

<i>in</i>	<i>nach</i>	<i>r[gon]</i>
5	3	0
	8	3,04444
	1	14,45988
	12	66,93951
	4	84,95370
6	3	0
	10	1,85370
	4	107,40080
	5	171,37500
7	12	0
	8	102,29383
	11	126,34753
	4	228,62654
8	10	0
	11	18,38642
	4	125,94784
	5	205,39877
10	11	0
	8	22,55494
	6	36,53086
	9	60,94383
11	4	0
	7	40,75679
	9	156,91512
	3	232,57685
1	4	0
	5	47,06883
1	4	0
	10	143,67284
12	5	0
	7	198,20988

./.

Strecken

von	nach	s [m]	
1	5	1325,4268	
1	4	1232,1958	
1	3	375,7020	
1	11	333,6888	
1	10	305,2402	
2	3	712,6460	
2	10	558,3987	
2	8	471,5552	
2	6	403,4410	
2	4	1387,8132	
2	9	198,2577	
2	7	923,9211	
2	5	936,1232	
3	11	540,2310	
3	5	1519,5508	
3	4	1584,3316	
3	6	1020,6574	
3	10	176,8214	
4	7	652,1740	
4	5	928,1742	
4	6	1098,2724	
4	8	939,4676	
4	11	1091,0600	
5	6	534,1382	1x
5	8	558,1884	
5	12	21,6076	
6	7	543,2001	
6	9	528,9682	
6	8	188,4908	
6	10	845,9200	
7	8	463,1096	
7	11	851,6534	
7	12	274,6834	
8	9	529,7660	
8	11	454,5350	
8	10	785,7282	
9	3	519,5172	1x
9	11	338,1710	
9	10	360,6380	
10	11	373,1988	

