

Mathematik 3

Aufgabe 1

Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x_M + R \cos(t) \\ y_M + R \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $(x_M, y_M)^T \in \mathbb{R}^2$ und $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Die Spur dieser Kurve beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M, y_M)^T$ und Radius R .

- a) Berechnen Sie den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ der Kurve für alle $t \in [0, 2\pi]$. Ist die Kurve regulär?
- b) Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0, 2\pi]$ der Vektor $\gamma(t) - (x_M, y_M)^T$ senkrecht auf dem Vektor $\dot{\gamma}(t)$ steht.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Kurve

$$w : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 4 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \\ 3t \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve für alle $t \in [0, 2\pi]$. Wie lang ist die Kurve?
- b) Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $T(t)$ der Kurve für alle $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Kurve

$$\xi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin(t) \cos(t) \\ a \sin^2(t) \\ at \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.

- a) Für welche Werte von a ist die Kurve regulär? Für die folgenden Teilaufgaben sei a aus der Menge dieser Werte.
- b) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $T(t)$ der Kurve für alle $t \in [0, \pi]$.
- c) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve für alle $t \in [0, \pi]$.