Universität der Bundeswehr München
Institut für Plasmatechnik und Mathematik
Prof. Dr. Dr. S. Schäffler

Winter 2023
Blatt 1

Mathematik 3

Zeit der Prüfung: Donnerstag, 15.12.2022, 7.45 - 9.15 Uhr.
Die Prüfung besteht aus 7 Aufgaben.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.
Bei allen Aufgaben muss der Lösungsweg deutlich erkennbar sein.

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_{-1}^{1}(2+x)e^{3x}dx$ b) $\int\limits_{0}^{2}|x-x^2|dx$

c) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{1}{x\cdot\ln(x^2)}dx$ d) $\int\tan(x)\cos(x)dx$

Hinweis zu c): Betrachte die Funktion $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\ x\mapsto\ln(\ln(x^2))$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-9n^2}{1-9n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{|x|}{2|x|+x|x|+x}$

Aufgabe 3 Sei $f:[-3,2]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x\cdot\sqrt{3x^2+x^3}$.

Bestimmen Sie

a) die Lage und die Art aller Extremalstellen von f im Inneren des Definitionsbereichs,

b) die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1,f(1))$.

Aufgabe 4 a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(x)-5y'(x)-36y(x)=0$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$y''(x)-6y'(x)+45y(x)=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=6$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $y_p:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2e^{-4x}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''(x)+8y'(x)+16y(x)=2e^{-4x}$
ist.

bitte wenden

Aufgabe 5 a) Stellen Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) = \frac{1}{x}; \quad x > 0$$

in der Form

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$$

dar.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$y_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

und

$$y_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) = 0; \quad x > 0$$

sind.

Aufgabe 6

a) Konvergieren die folgenden Reihen? (Begründung nicht vergessen):

(i) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)_{n\geq 1}$ (ii) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{1+2^k}\right)_{n\geq 1}$

b) Stellen Sie den periodischen Dezimalbruch $0.\overline{70}$ als gemeinen Bruch dar, d.h. bestimmen Sie $n, m \in \mathbb{N}$ derart, dass $0.\overline{70} = \frac{m}{n}$.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie **alle** Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

a) $z^4 = 81$ b) $z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

in der Form $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.