

Mathematik 2

Aufgabe 1

Betrachten Sie das quadratische Polynom

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{10}{9}.$$

Bestimmen Sie

- die Scheitelpunktsform von f .
- sämtliche Nullstellen von f .
- die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent bzw. divergent bzw. bestimmt divergent sind. Bestimmen Sie - sofern existent - den Grenzwert.

- a) $a_n = \frac{\sqrt{n}+n^2}{2n-5n^2}$ b) $a_n = \frac{n^2+n^3}{1-\sqrt{n}+9n}$ c) $a_n = \frac{n^3+n}{1-9n^4}$
d) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ e) $a_n = \frac{\sqrt{n+(-1)^n n}}{4n+1}$

Hinweis: Formen Sie bei Teilaufgabe d) den Ausdruck zunächst um. Verwenden Sie dazu, dass $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ gilt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \sqrt{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$

Aufgabe 4

a) Für ein $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 10x + 12}{x-a}$ gegeben. Für welche a lässt sich durch

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases}$$

eine auf \mathbb{R} stetige Funktion definieren?

b) Ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

auf \mathbb{R} stetig?

bitte wenden

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in D$.

a) $x \mapsto 3 \sin(x) - 2 \cos(x)$, $D = \mathbb{R}$.

b) $x \mapsto \sin(x) \cdot 2 \cos(x)$, $D = \mathbb{R}$.

c) $x \mapsto \frac{3}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $x \mapsto x \cdot e^x$, $D = \mathbb{R}$.

e) $x \mapsto \tan(x)$, $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

f) $x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

g) $x \mapsto e^{-x^2}$, $D = \mathbb{R}$.

h) $x \mapsto \sin(x^2)$, $D = \mathbb{R}$.

i) $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $D = (0, \infty)$.

j) $x \mapsto (x+1)^{10} \cdot (2x+1)^{11}$, $D = \mathbb{R}$.

k) $x \mapsto \frac{1+\cos(x)}{2-\sin(x)}$, $D = (0, \pi)$.

l) $x \mapsto e^{-3x} \cdot \sin(2x)$, $D = \mathbb{R}$.

m) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $D = \mathbb{R}$.

n) $x \mapsto x^x$, $D = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.