Streukreisberechnungen bei ballistischen Versuchen unter der zweidimensionalen Normalverteilungsannahme

Prof. Dr. Andreas Rudolph
Universität der Bundeswehr
München
WE 2 Mathematik und Informatik
FB BW
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg
Email: Andreas.Rudolph@unibw.de

5. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Dokument wollen wir folgende Ausgangssituation untersuchen:

Es soll auf eine Scheibe geschossen werden, bei der ein Ursprung mit den Koordinaten $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_1; \mu_2)^T$ festgelegt ist.

Diese Scheibe stehe in einer festgelegten Entfernung d_0.

Eine Waffe soll aufgrund ihrer Visiereinstellung so auf d_0 eingeschossen sein, dass sie prinzipiell in den Ursprung $\boldsymbol{\mu}_0$ trifft, wenn man aus der Entfernung d_0 auf die Scheibe schießt.

Da die Waffe aufgrund von Zufallseinflüssen nicht bei jedem Schuss exakt in den Ursprung treffen kann, somit die Einschläge $\mathbf{X}_i = (X_{i1}; X_{i2})^T$ für $i = 1, \ldots, n$ um den Ursprung streuen[1], unterstellt man für die Verteilung der Zufallsvektoren (siehe z. B. Hauck (1982), S. 117) eine zweidimensionale Normalverteilung.

[1] Wir fassen somit die Einschläge als zweidimensionale Zufallsvektoren auf

Bei Sportschützen und Jägern wird die Güte einer Waffe (auch der verschossenen Munition) gerne durch den sogenannten Streukreis gemessen.

Hiermit ergeben sich folgende Fragen:

1.) Wie soll ein derartiger Streukreis gemessen werden

2.) ist ein Streukreis nicht vielleicht inadäquat (d. h. könnte es nicht auch ein Ellipsoid sein), und insbesondere

3.) wie passen derartige geometrische Gebilde zu einer zweidimensionalen Normalverteilungsannahme?

Diese Fragestellungen wollen wir in den nachfolgenden Abschnitten untersuchen.

2 Die zweidimensionale Normalverteilung

Um die obigen Fragestellungen beantworten zu können, muss zuerst eine sogenannte Verteilungsannahme getroffen werden.

Hier unterstellt man für die Koordinaten $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ der Einschläge auf der Scheibe eine sogenannte zweidimensionalen Normalverteilung.

Eine derartige zweidimensionale Normalverteilung ist durch ihre Dichte festgelegt. Sie lautet

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x_1; x_2)^T$$

siehe Morrison (1976), S. 86 ff.

Hierbei ist $\boldsymbol{\Sigma}$ die sogenannte Kovarianzmatrix, sie gibt die Abhängigkeiten innerhalb des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ an (d. h. zwischen den beiden Komponenten des Zufallsvektors) und ist eine symmetrische 2×2-Matrix, und $\boldsymbol{\mu}$ der Erwartungswertvektor, dieser gibt den Schwerpunkt der Verteilung an, somit den Punkt auf der Scheibe, an dem sich die Einschläge konzentrieren, und ist damit ein zweidimensionaler Vektor.

Allgemein besteht der Zufallsvektor einer multivariaten Normalverteilung aus p Komponenten, damit ist die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ eine $p \times p$-Matrix und der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ ein p-dimensionaler Vektor. An den statistischen Bedeutungen ändert sich allerdings nichts.

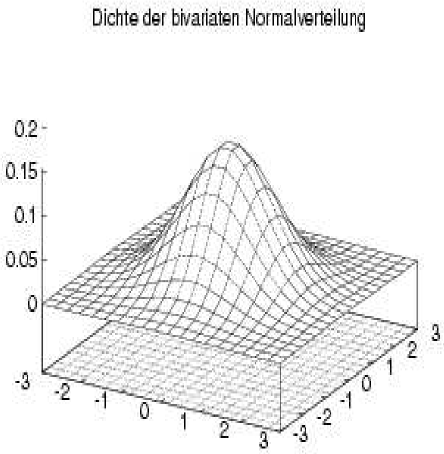
Ihre Dichte sieht dann wie folgt aus

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$$

Die Dichte dient dazu, gegebenenfalls die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass sich innerhalb eines Rechtecks $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ Einschläge befinden (dazu müssen allerdings die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ und der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ bekannt sein oder zumindest vorab geschätzt worden sein). Hierzu wird das folgende Doppelintegral ausgewertet:

$$Prob((X_1,X_2) \in [a_1;b_1] \times [a_2;b_2]) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

Die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung hat in etwa folgendes Aussehen:



3 Die Definition eines Streukreises

Die analytische Definition eines Kreises mit Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1;\mu_2)^T$ und Radius r ist gegeben durch

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-\mu_1)^2 + (x_2-\mu_2)^2 \leq r^2\} \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x_1;x_2)^T$$

oder

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x_1-\mu_1)^2}{r^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{r^2} \leq 1\}$$

Eine leichte Verallgemeinerung des Kreises ist das Ellipsoid mit den Halbachsen a und b:

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x_1-\mu_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{b^2} \leq 1\}$$

Definiert man eine positiv definite symmetrische Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ durch

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

dann kann man den Kreis auch bequem mit Hilfe dieser Matrix schreiben

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq 1\}$$

Im Fall eines Ellipsoiden geschieht dies mit einer Matrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

so dass

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq 1\}$$

Wir unterstellen nun vorab, dass die Einschläge $\mathbf{X} = (X_{i1}; X_{i2})^T$ für $i = 1, \ldots, n$ auf der Scheibe unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale normalverteilte Zufallsvektoren mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1; \mu_2)^T$ und Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

sind. Damit besteht die Aufgabe, den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und in der Kovarianzmatrix r^2 zu schätzen.

Hierzu können wir die Methode der Maximum-Likelihood-Schätzung anwenden.

Die gemeinsame Dichte ist durch das Produkt der Einzeldichten gegeben, wir erhalten deshalb

$$f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n; \boldsymbol{\mu}, r^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}\right)^n \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}))$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{r^2}\right)^n \exp(-\frac{1}{2r^2}\sum_{i=1}^{n} \| \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} \|^2)$$

Hieraus folgt weiter

$$\ln(f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n; \boldsymbol{\mu}, r^2)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln(r^2) - \frac{1}{2r^2}\sum_{i=1}^{n} \| \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} \|^2$$

Die partielle Ableitung nach $\boldsymbol{\mu}$ ergibt dann

$$\frac{\partial ln(f)}{\partial \boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2r^2} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})$$

welche, Null gesetzt, als Schätzer für $\boldsymbol{\mu}$ ergibt

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i$$

Die partielle Ableitung nach r^2 ergibt

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial r^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\sum_{i=1}^{n} \parallel \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} \parallel^2$$

Wir setzen diese partielle Ableitung ebenfalls gleich Null und erhalten zusammen mit dem Schätzer für $\boldsymbol{\mu}$:

$$\widehat{r^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \parallel \mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}} \parallel^2$$

Damit sind die Schätzer für die Bestimmungsgrößen eines Kreises mit Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu}$ und Radius r^2 festgelegt.

Wir können diese Vorgehensweise leicht auf den Fall einer Ellipse verallgemeinern. In diesem Fall setzen wir für die Kovarianzmatrix an

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten in analoger Weise als Schätzer für den Erwartungswertvektor

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{x}}_1 \\ \overline{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix}$$

und entsprechend durch Bildung der partiellen Ableitungen nach a^2 und b^2:

$$\widehat{a^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \overline{\mathbf{x}}_1)^2$$

und

$$\widehat{b^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i2} - \overline{\mathbf{x}}_2)^2$$

Man muss hier sehen, dass man hierbei unterstellt, dass bis hierher aus statistischer Sicht die Komponenten des Zufallsvektors als stochastisch unabhängig angenommen werden.

Die Halbachsen der Ellipse werden demzufolge als achsenparallel zu den Koordinatenachsen angenommen.

Kann man dies nicht mehr voraussetzen. dann bleibt nichts anderes mehr übrig, als die gesamte Kovarianzmatarix $\mathbf{\Sigma}$ zu schätzen.

Der gesuchte Maximum-Likehood-Schätzer ergibt sich in diesem Fall zu

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})^T$$

siehe hierzu z. B. Muirhead (1982), S. 128 ff.

Die zugehörige Ellipse wird dann gegebenenfalls schräg zu den Koordinatenachsen liegen.

4 Eine Anwendung

Hier ein Datensatz, bei dem 10 Schuss auf die Scheibe abgegeben wurden (Entfernung 100 Meter, Kaliber .308 TIG):

x-Koordinate in mm	y-Koordinate in mm
3	6
9	9
13	24
18	-14
-9	5
-22	-2
-19	-11
-14	-22
-45	-49
0	$0,1$

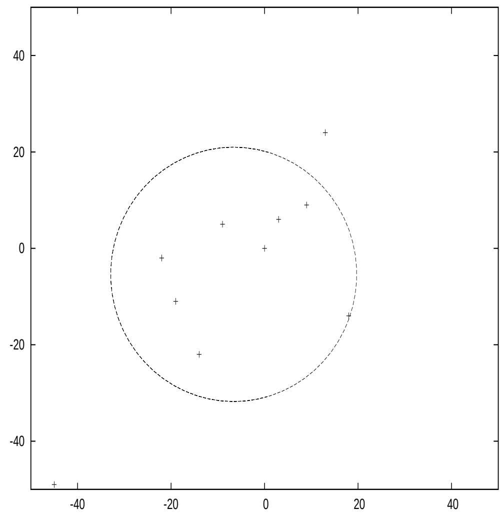
Damit ist der Schwerpunkt gleich $\overline{\mathbf{x}} = (-6,6; -5,39)^T$.

Für die Schätzung von r^2 erhalten wir dann

$$\hat{r^2} = 692,78$$

somit geschätzt einen Kreis vom Radius von $26,32$ mm.

Dies sieht dann wie folgt aus:



Literatur

J. Hartung and B. Elpelt. *Multivariate Statistik*. Oldenbourg, 1984.

G. Hauck. *Der Flug ungelenkter Geschosse und Raketen*. Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik, 1982.

D. F. Morrison. *Multivariate Statistical Methods*. McGraw-Hill Book Company, 1976.

R. J. Muirhead. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley, 1982.