Mittelwertvergleiche bei ballistischen Versuchen

Prof. Dr. Andreas Rudolph
Universität der Bundeswehr
München
WE 2 Mathematik und Informatik
FB BW
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg
Email: Andreas.Rudolph@unibw.de

21. Juni 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Dokument wollen wir folgende Ausgangssituation untersuchen:

Es soll auf eine Scheibe geschossen werden, bei der ein Ursprung mit den Koordinaten $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_1; \mu_2)^T$ festgelegt ist.

Diese Scheibe stehe in einer festgelegten Entfernung d_0.

Eine Waffe soll aufgrund ihrer Visiereinstellung so auf d_0 eingeschossen sein, dass sie prinzipiell in den Ursprung $\boldsymbol{\mu}_0$ trifft, wenn man aus der Entfernung d_0 auf die Scheibe schießt.

Da die Waffe aufgrund von Zufallseinflüssen nicht bei jedem Schuss exakt in den Ursprung treffen kann, somit die Einschläge $\mathbf{X}_i = (X_{i1}; X_{i2})^T$ für $i = 1, \ldots, n$ um den Ursprung streuen[1], unterstellt man für die Verteilung der Zufallsvektoren (siehe z. B. Hauck (1982), S. 117) eine zweidimensionale Normalverteilung.

Es sind nun mehrere Szenarien denkbar:

[1]Wir fassen somit die Einschläge als zweidimensionale Zufallsvektoren auf

1.) Die Munition ist immer dieselbe, es wird aber mit verschiedenen Waffen auf verschiedene Scheiben in einer Entfernung d_0 geschossen. Damit erhebt sich die Frage, ob die Einschläge die gleichen Schwerpunkte besitzen oder nicht und wie man dies mit den Mitteln der Statistik herausfinden kann.

2.) Die Waffe ist immer dieselbe, aber es werden verschiedene Laborierungen auf verschiedene Scheiben in der gleichen Entfernung d_0 verschossen. Damit erhebt sich die Frage, ob die Einschläge die gleichen Schwerpunkte besitzen oder nicht und wie man dies mit den Mitteln der Statistik herausfinden kann.

Diese beiden Fragestellungen wollen wir in den nachfolgenden Abschnitten untersuchen. Aus Sicht der Statistik läuft dies auf die gleiche statistische Methodik hinaus.

2 Die zweidimensionale Normalverteilung

Um die obige Fragestellungen beantworten zu können, muss zuerst eine sogenannte Verteilungsannahme getroffen werden.

Hier unterstellt man für die Koordinaten $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ der Einschläge auf der Scheibe eine sogenannte zweidimensionalen Normalverteilung.

Eine derartige zweidimensionale Normalverteilung ist durch ihre Dichte festgelegt. Sie lautet

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\mathbf{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x_1; x_2)^T$$

siehe Morrison (1976), S. 86 ff.

Hierbei ist $\mathbf{\Sigma}$ die sogenannte Kovarianzmatrix, sie gibt die Abhängigkeiten innerhalb des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ an (d. h. zwischen den beiden Komponenten des Zufallsvektors) und ist eine symmetrische 2×2-Matrix, und $\boldsymbol{\mu}$ der Erwartungswertvektor, dieser gibt den Schwerpunkt der Verteilung an, somit den Punkt auf der Scheibe, an dem sich die Einschläge konzentrieren, und ist damit ein zweidimensionaler Vektor.

Allgemein besteht der Zufallsvektor einer multivariaten Normalverteilung aus p Komponenten, damit ist die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ eine $p \times p$-Matrix und der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ ein p-dimensionaler Vektor. An den statistischen Bedeutungen ändert sich allerdings nichts.

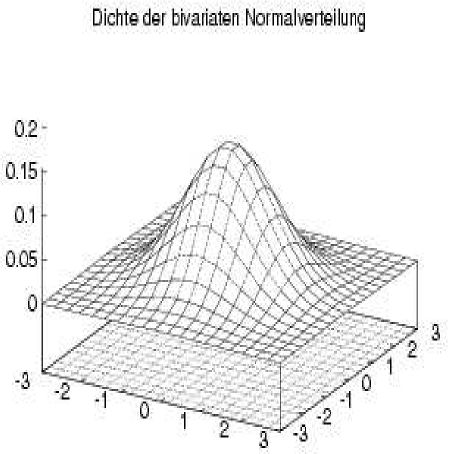
Ihre Dichte sieht dann wie folgt aus

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\mathbf{\Sigma})}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$$

Die Dichte dient dazu, gegebenenfalls die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass sich innerhalb eines Rechtecks $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ Einschläge befinden (dazu müssen allerdings die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ und der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ bekannt sein oder zumindest vorab geschätzt worden sein). Hierzu wird das folgende Doppelintegral ausgewertet:

$$Prob((X_1,X_2) \in [a_1;b_1] \times [a_2;b_2]) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1$$

Die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung hat in etwa folgendes Aussehen:



3 Das varianzanalytische einfaktorielle Modell

Wie schon früher angedeutet, gehen wir davon aus, dass wir $J \geq 2$ Klassen von Schießergebnissen vorliegen haben.

Die zweidimensionalen Messwertevektoren, die zur j-ten Klassen gehören ($j = 1, \ldots, J$), sollen eine zweidimensionale Normalverteilung $N(\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\Sigma})$ besitzen, dabei soll $\boldsymbol{\mu}_j$ der Erwartungswertvektor der j-ten Klasse sein und $\boldsymbol{\Sigma}$ die für alle Klassen gleiche Kovarianzmatrix.

Wir setzen hierbei weiter voraus, dass die Vektoren $\boldsymbol{\mu}_j$ und die Kovarianzmatarix $\boldsymbol{\Sigma}$ unbekannt sind.

Zu jeder Klasse sei nun eine Stichprobe von zweidimensionalen Messwertevektoren gegeben. Dabei soll die Stichprobe aus der Klasse j aus jeweils n_j Vektoren bestehen. Die einzelnen Messwertevektoren der j-ten Klasse wollen wir mit

$$\mathbf{y}_{jk} = \begin{pmatrix} y_{1kj} \\ y_{2jk} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots J; \quad k = 1, \ldots, n_j$$

bezeichnen. Damit können wir folgende Tabelle aufbauen:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Klasse 1} & \mathbf{y}_{11}^T = (y_{111}, y_{211}) \\
 & \mathbf{y}_{12}^T = (y_{112}, y_{212}) \\
 & \dots \\
 & \mathbf{y}_{1n_1}^T = (y_{11n_1}, y_{21n_1}) \\
\text{Klasse 2} & \mathbf{y}_{21}^T = (y_{121}, y_{221}) \\
 & \mathbf{y}_{22}^T = (y_{122}, y_{222}) \\
 & \dots \\
 & \mathbf{y}_{2n_2}^T = (y_{12n_2}, y_{22n_2}) \\
\text{Klasse 3} & \mathbf{y}_{31}^T = (y_{131}, y_{231}) \\
 & \dots
\end{array}
$$

Wir setzen nun für die Gesamtzahl n aller Vektoren

$$n \geq p + J + 2$$

voraus wie auch $n_j \geq 1$ für $j = 1, \ldots, J$.

Die Grundlage für alle weiteren Berechnungen sind (siehe Ahrens and Läuter (1981), S. 104 ff.) die Mittelwertvektoren

$$\mathbf{y}_{j.} := \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{y}_{jk} \quad j = 1, \ldots, J$$

der einzelnen Klassen, der Mittelwertvektor

$$\mathbf{y}_{..} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_j} \mathbf{y}_{jk}$$

aller Klassen, die Kovarianzschẗzungen

$$\mathbf{S}_j := \frac{1}{n_j - 1} \sum_{k=1}^{n_j} (\mathbf{y}_{jk} - \mathbf{y}_{j.})(\mathbf{y}_{jk} - \mathbf{y}_{j.})^T, \quad j = 1, \ldots, J$$

der einzelnen Klassen sowie die gemittelte Kovarianzmatrix

$$\mathbf{S} := \frac{1}{n - J} \sum_{j=1}^{J} (n_j - 1) \mathbf{S}_j$$

Wir merken an, dass die Vektoren $\mathbf{y}_{j.}$ und die Matrix $\mathbf{S}$ erwartungstreue Schätzungen von $\boldsymbol{\mu}_j$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ sind.

Das statistische Modell des folgenden Tests wird durch die Gleichungen

$$\mathbf{y}_{jk} = \boldsymbol{\mu}_{jk} + \boldsymbol{\varepsilon}_{jk} \quad j = 1, \ldots, J; \quad k = 1, \ldots, n_j$$

beschrieben.

Unsere Hypothese ist dann

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \ldots = \boldsymbol{\mu}_J$$

Um diese Hypothese zu testen, definieren wir folgende Matrizen

$$\mathbf{H} := \sum_{j=1}^{J} n_j (\mathbf{y}_{j.} - \mathbf{y}_{..})(\mathbf{y}_{j.} - \mathbf{y}_{..})^T$$

und

$$\mathbf{G} := \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_j} (\mathbf{y}_{jk} - \mathbf{y}_{j.})(\mathbf{y}_{jk} - \mathbf{y}_{j.})^T$$

Beide Matrizen sind dabei $p \times p$ Matrizen.

Mit $f_1 := J - 1$ und $f_2 := n - J$ können wir dann als Teststatistik definieren:

$$\tilde{F} := \mathrm{Sp}(\mathbf{HG}^{-1})$$

Bzgl. der Optimalität dieses Testes und Alternativen hierzu siehe Ahrens and Läuter (1981), S. 39 ff., wie auch Seber (1984), S. 434 ff., wo auch der Bezug zum multivariaten linearen Modell hergestellt wird.

Wenn nun die obige Nullhypothese H_0 gilt, dann ist $\tilde{F}$ annähernd F-verteilt mit den Freiheitsgraden

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{cases} \dfrac{f_1 2(f_2 - 2)}{f_1 + f_2 - f_1 2 - 1} & \text{falls } f_1 + f_2 - f_1 \cdot 2 - 1 > 0 \\ \infty & \text{falls } f_1 + f_2 - f_1 \cdot 2 - 1 \leq 0 \end{cases} \\ g_2 &= f_2 - 1 \end{aligned}$$

siehe Ahrens and Läuter (1981), S. 106 ff.

Wir lehnen dann die Hypothese der Gleichheit der J Erwartungswertvektoren ab, falls

$$\tilde{F} > F_{g_1, g_2; \alpha}$$

dabei ist α die erlaubte Irrtumswahrscheinlichkeit für irrtümliches Zurückweisen der Nullhypothese.

$F_{g_1, g_2; \alpha}$ ist hierbei das Fraktil der F-Verteilung mit g_1 und g_2 Freiheitsgraden.

Die allgemeine Form der Teststatistik (siehe Ahrens and Läuter (1981), S. 106) kann noch umgeformt werden zu

$$\tilde{F} = \frac{n-J-1}{(J-1)2(n-J)} \sum_{j=1}^{J} n_j (\mathbf{y}_{j.} - \mathbf{y}_{..})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{y}_{j.} - \mathbf{y}_{..})$$

mit den Freiheitsgraden

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{cases} \frac{(J-1)2(n-J-2)}{n-(J-1)2-2} & \text{falls } n-(J-1)2-2 > 0 \\ \infty & \text{falls } n-(J-1)2-2 \leq 0 \end{cases} \\ g_2 &= n-(J-1)-1 \end{aligned}$$

Im Prinzip ist damit die Teststatistik eine Art Mahalanobis-Distanz.

Wir können den Gesamttest spezialisieren auf die Situation, dass wir Paare von Klassen betrachten wollen. Die Nullhypothese lautet in diesem Fall

$$H_{l|m0} : \boldsymbol{\mu}_l = \boldsymbol{\mu}_m$$

Es soll somit geprüft werden, ob die Erwartungsertvektoren der Klassen l und m gleich sind oder nicht für $l \neq m$.

Man kann zeigen (siehe Ahrens and Läuter (1981), S. 108), dass dann die zugehörige Teststatistik wie folgt aussieht:

$$\tilde{F}_{l|m} = \frac{n-J-1}{2(n-J)} \frac{n_l n_m}{n_l + n_m} (\mathbf{y}_{l.} - \mathbf{y}_{m.})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{y}_{l.} - \mathbf{y}_{m.})$$

mit $g_1 = 2$ und $g_2 = n-J-1$ Freiheitsgraden.

Wir lehnen damit die Gleichheit der Klassen l und m ab, falls

$$\tilde{F}_{l|m} > F_{2;n-J-1;\alpha}$$

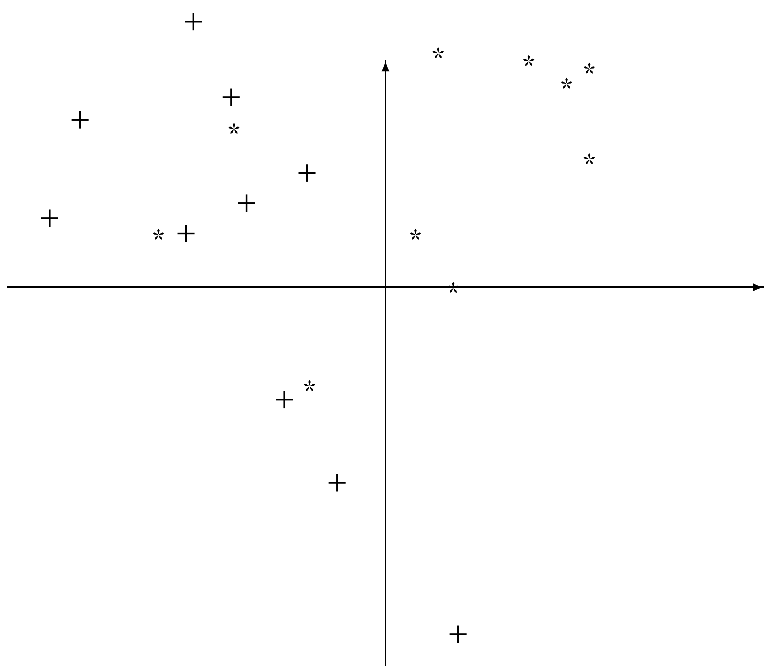
gilt.

4 Eine Anwendung

Wir wollen die folgenden beiden Datensätze miteinander vergleichen, beide auf 100 Meter geschossen, beide Kaliber .308, der erste TIG, der zweite GECO:

x-Koordinate in mm	y-Koordinate in mm
-12	14
-20	10
-28	6
-15	-16
-22	24
-27	34
-8	-27
-46	8
8	-47
-42	21

x-Koordinate in mm	y-Koordinate in mm
8	-2
-11	-15
3	5
6	29
18	28
-21	19
-31	5
26	15
26	27
23	25



+ steht dabei für den ersten, * für den zweiten Datensatz.

Von der Anschauung her scheinen die beiden Datensätze wohl verschieden zu sein.

Der Schwerpunkt des ersten Datensatzes ist gleich $\overline{\mathbf{x}}_1 = (-21,2; 2,7)^T$, und der Schwerpunkt des zweiten Datensatzes $\overline{\mathbf{x}}_2 = (4,7; 13,6)^T$.

Der Schwerpunkt von beiden Datensätzen zusammen ist gleich $\overline{x}_g = (-16,5; 16,3)^T$.

Somit ergibt sich für die Matrix $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = 10 \cdot \left\{ \begin{pmatrix} (-21,2+16,5)^2 & (-21,2+16,5)(2,7-16,3) \\ (2,7-16,3)(-21,2+16,5) & (2,7-16,3)^2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} (4,7+16,5)^2 & (4,7+16,5)(13,6-16,3) \\ (13,6-16.3)(4,7+16,5) & (13,6+16,5)^2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= 10 \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 22.09 & 63,45 \\ 63,45 & 184,96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 449,44 & -57,24 \\ -57,24 & 906,01 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 47153,3 & 62,1 \\ 62,1 & 1090,97 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun die Matrix $\mathbf{G}$. Diese ergibt sich zu:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 6063,01 & -1258,52 \\ -1258,52 & 8762,61 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{51543,919} \begin{pmatrix} 8762,61 & 1258,52 \\ 1258,52 & 6063,01 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 47153,3 & 62,1 \\ 62,1 & 1090,97 \end{pmatrix} \frac{1}{51543,919} \begin{pmatrix} 8762,61 & 1258,52 \\ 1258,52 & 6063,01 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{51543,919} \begin{pmatrix} 47153,3 & 62,1 \\ 62,1 & 1090,97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8762,61 & 1258,52 \\ 1258,52 & 6063,01 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8,017 & 1,158 \\ 37,194 & 129,84 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\tilde{F} = \mathrm{Sp}\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1} = 137,36$.

Mit $f_1 = J - 1 = 1$ und $f_2 = 20 - 2 = 18$ ergibt sich weiter, dass

$$g_1 = \frac{2 \cdot 16}{1 + 18 - 2 - 1} = \frac{32}{16} = 2 \text{ und } g_2 = 18 - 1 = 17$$

die zugehörigen Freiheitsgrade sind.

Zu $\alpha = 0,01$ ergibt sich das zugehörige Fraktil zu etwa $99,44$, damit muss die Gleichheit der Erwartungswertvektoren abgelehnt werden.

Literatur

H. Ahrens and J. Läuter. *Mehrdimensionale Varianzanalyse*. Akademie-Verlag Berlin, 1981.

G. Hauck. *Der Flug ungelenkter Geschosse und Raketen*. Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik, 1982.

D. F. Morrison. *Multivariate Statistical Methods*. McGraw-Hill Book Company, 1976.

G. A. F. Seber. *Multivariate Observations*. Wiley, 1984.