

Flugbahnberechnungen des Massenpunktes mit Octave

Prof. Dr. Andreas Rudolph
Universität der Bundeswehr
München
Institut für Mathematik und Informatik
FB BW
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg
Email: Andreas.Rudolph@unibw.de

11. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick - der mathematische Teil	1
1.1	Einführung	1
1.2	Mathematische Grundlagen	2
1.3	Das Vakuummodell	8
1.3.1	Die Bewegungsgleichungen	8
1.3.2	Schuss auf geneigter Ebene	12
1.3.3	Seitenwind	16
1.3.4	Die Sicherheitsparabel	17
1.4	Die Luftwiderstandsgesetze G1 bis G8	21
1.5	Funktionen für Luftwiderstandsgesetze G1 bis G8	35
1.6	Das zugehörige Differentialgleichungssystem	48
1.7	Höhenabhängige Lösungen	51
1.8	Der Schuss auf geneigter Ebene	52
1.9	Der Coriolis-Effekt	53
1.10	Rotationseffekte	54
2	Die Programme	59
2.1	Die verwendete Software	59
2.2	Die beiden Programme zur zweidimensionalen Flugbahnberechnung	60
2.3	Drei Programme zur Schätzung des Formfaktors	63
2.4	Die beiden Programme zur dreidimensionalen Flugbahnberechnung	65
2.5	Graphik	67
	Index	71

Kapitel 1

Überblick - der mathematische Teil

1.1 Einführung

Bei allen Modellen zur Beschreibung der Flugbahn eines Geschosses liegt die Newton'sche Mechanik zugrunde, d. h. die Gesamtheit **aller** auf das Geschoss einwirkenden Kräfte \mathbf{F} ist gleich deren Masse m multipliziert mit seiner Beschleunigung \mathbf{a} :

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ die Ortskoordinate des Geschosses zum Zeitpunkt t darstellt.

Die Ortskoordinate $\mathbf{x}(t)$ besteht aus drei Koordinaten

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

wobei $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ als Funktionen der Zeit angesehen werden.

Als Koordinatensystem wird im Umfeld der Ballistik gerne ein sogenanntes ballistisches Koordinatensystem angenommen - die erste Koordinate steht für die Flugweite, die zweite Koordinate für die Flughöhe und die dritte Koordinate für die seitliche Auslenkung im allgemeinsten Fall.

Der Kraftvektor \mathbf{F} ist dabei ebenfalls dreidimensional, d. h.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\ F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\ F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \end{pmatrix}$$

Wir unterstellen weiterhin, dass das Projektil als Massenpunkt dargestellt werden kann - man beschreibt strenggenommen die Bahn seines Schwerpunktes¹.

¹Anscheinend wird der Lagrange-Formalismus und die Hamilton-Jacobi Theorie bisher kaum verwendet.

In erster Näherung vernachlässigt man die Ausdehnung des Geschosses - Rotationseffekte wie den Magnus-Effekt und den Spin-Dämpfungseffekt betrachtet man dann in einem zweiten Schritt.

Wir wollen bei den hier folgenden Betrachtungen von Rotationseffekten absehen.

Weiterhin wird die Masse als unabhängig von der Zeit angenommen. Wir haben somit

$$\frac{d}{dt}m = 0$$

Wir wollen somit nicht Betrachtungen anstellen, die auf die Raketengleichung führen, d. h. die Flugbahnen von Mittelstreckenraketen und Interkontinentalraketen beschreiben.

Formuliert man nun die Kräfte, die auf das Geschoss einwirken, und löst das obige Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

dann erhält man damit die Flugbahn des Geschosses in parametrisierter Form - damit kann man in Abhängigkeit von der Zeit alle Größen bestimmen, die für das sportliche, aber auch für das militärische Schießen von Interesse sind.

Übrigens ist eine lesenswerte Einführung in die Thematik das Buch von de Mestre (1990).

1.2 Mathematische Grundlagen

Betrachtet man das vorliegende Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \frac{d}{dt}\mathbf{x}) = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

dann stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen ein derartiges System lösbar ist und wenn es lösbar ist, wann die Lösung eindeutig ist.

Dazu schreibt man das obige System zweiter Ordnung um in ein System erster Ordnung - man erhält dadurch prinzipiell ein System der Gestalt

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

dem noch entsprechende Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ hinzugefügt werden.

Hierbei ist nun

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Gesucht ist damit ein Vektor $\mathbf{y}(x)$ von Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$, der das obige Differentialgleichungssystem erster Ordnung samt Anfangsbedingungen erfüllt.

Ein Satz, der die Existenz und Eindeutigkeit sicherstellt, ist der bekannte Satz von Picard und Lindelöf:

Satz 1

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(u) = \mathbf{v}$$

Die Abbildung \mathbf{f} sei in dem $(n+1)$ -dimensionalen Zylinder

$$|x - u| < a, \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\| < b$$

stetig und beschränkt, sie soll weiter in diesem eine Lipschitz-Bedingung erfüllen, d. h. es gelte

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\| \leq A, \quad \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq M \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$$

Dann gibt es für das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

genau eine Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, welche die Anfangsbedingung $\mathbf{y}(u) = \mathbf{v}$ erfüllt. und für $|x - u| < \alpha$ existiert, wobei

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{A}\right\}$$

ist.

BEWEIS

Siehe zum Beispiel Kamke (1969), S. 74, Satz 1 und S. 104, Satz 3.

Dieser Satz ist insofern interessant, als sein Beweis konstruktiv ist - er gibt somit auch ein Verfahren an, mit dem man eine Lösung durchaus berechnen könnte.

Stellt man stärkere Forderungen an die Abbildung \mathbf{f} , dann gelangt man zu dem nachfolgenden

Satz 2

Jede der n Funktionen $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, sei durch eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt (x_0, y_0) darstellbar. Dann ist die Lösung $y(x)$ durch den Punkt (x_0, y_0) in einer Umgebung von x_0 durch eine Potenzreihe darstellbar.

BEWEIS Siehe Erwe (1964), Seite 64, Satz 8.

Auf diesem Satz beruht die Möglichkeit, mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes eine Lösung zu berechnen - dies ist gegebenenfalls recht mühselig.

Ein Verfahren, welches wir häufiger zum Lösen von bestimmten Differentialgleichungen verwenden werden, ist das Verfahren durch Trennung der Variablen:

Satz 3

Es sei $f_1(x)$ für $a < x < b$ stetig und $f_2(y)$ für $c < y < d$ stetig und überdies $f_2(y) \neq 0$. Dann gibt es durch jeden Punkt (u, y_0) des Rechtecks

$$R := \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$

genau eine Lösung der Dgl $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, welche die Anfangsbedingung $y_0 = y(u)$ erfüllt. Man erhält diese Lösung durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{y(u)}^{y(x)} \frac{ds}{f_2(s)} = \int_u^x f_1(t) dt$$

nach $y = y(x)$.

BEWEIS Siehe Kamke (1969), S. 11, Satz 1

Findet man somit die Stammfunktionen der beiden Integrale und löst nach $y(x)$ auf, dann hat man die Lösung der Differentialgleichung gefunden.

Weiterhin zitieren wir einen Satz zum Lösen von inhomogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

Satz 4

Sind in der linearen Dgl

$$y' + g(x)y = h(x)$$

die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ für $a < x < b$ stetig, so gibt es durch jeden Punkt (u, y_0) des Streifens

$$a < x < b, \quad -\infty < y < \infty$$

genau eine Lösung der Dgl. Diese ist für $a < x < b$ definiert und durch die Formel

$$y_i(x) = \exp \left\{ - \int_u^x g(s) ds \right\} \left\{ y_0 + \int_u^x h(t) \exp \left(\int_u^t g(s) ds \right) dt \right\}$$

gegeben.

BEWEIS Siehe Kamke (1969), S. 32, Satz.

Dieser Satz stellt im Prinzip eine Art Kochrezept zur Verfügung - man muss nur noch die entsprechenden Funktionen einsetzen und die Integrale lösen, dann hat man die Lösung berechnet.

Diese Vorgehensweise ist auch unter dem Namen "Variation der Konstanten" bekannt.

Oft hängen die Differentialgleichungssysteme der Ballistik noch von zusätzlichen Parametern ab und müssen in Abhängigkeit von diesen gelöst werden (ein derartiger Parameter könnte zum Beispiel der Rohrerhebungswinkel sein) - es stellt sich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

Die Lösungen hängen damit ja auch von den Parametern ab.

Hier sind folgende Sätze hilfreich:

Satz 5

Sei $\mathcal{G}(x, \mathbf{y})$ ein Gebiet, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ ein k -dimensionaler Vektor, \mathcal{C} sei eine offene Menge in dem \mathbf{c} -Raum und $\mathcal{G} \times \mathcal{C}$ das Kartesische Produkt von \mathcal{G} und \mathcal{C} - d. h. der Bereich der Punkte $x, \mathbf{y}, \mathbf{c}$ eines $(n + k + 1)$ -dimensionalen Raumes mit $x, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$ und $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$.

Die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ sei in $\mathcal{G} \times \mathcal{C}$ stetig, so dass für jedes $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ durch jeden Punkt $x, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$ mindestens eine Integralkurve der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c})$$

geht. Es wird weiter vorausgesetzt, dass es auch nur **eine** solche von Rand zu Rand laufende Integralkurve gibt, die mit

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$$

bezeichnet wird.

Dann gilt folgendes:

- (a) Wenn die Funktion $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$ an einer Stelle $x_0, u_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{c}_0$ existiert und wenn $\alpha \leq x \leq \beta$ ein abgeschlossenes Intervall ist, das x_0, u_0 als innere Punkte enthält und in dem $\mathbf{Y}(x, u_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{c}_0)$ existiert, dann existieren die Funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$ in diesem Intervall auch für alle hinreichend nahe an $u_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{c}_0$ gelegenen $u, \mathbf{v}, \mathbf{c}$.
- (b) Die Funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$ sind an jeder Stelle ihres Existenzbereiches stetige Funktionen ihrer Argumente $x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}$.

BEWEIS

Siehe Kamke (1969), S. 116, Satz 2.

Damit hängen die Lösungen stetig von den Parametern ab.

Unter Zusatzvoraussetzungen kann man auch die Differenzierbarkeit bzgl. der Parameter zeigen.

Dabei sei $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ ein k -dimensionaler Vektor, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_l)$ ein l -dimensionaler Vektor, \mathcal{C} eine offene Menge im \mathbf{c} -Raum und \mathcal{B} eine offene Menge im \mathbf{b} -Raum.

Ist $\mathcal{G}(x, \mathbf{y})$ ein Gebiet, dann sei $\mathcal{G} \times \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ die Menge aller Punkte $x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$ mit $x, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$.

Es gilt dann

Satz 6

Die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}; \mathbf{c}, \mathbf{b})$ sei in $\mathcal{G} \times \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ stetig und besitze stetige partielle Ableitungen bzgl. $y_1, \dots, y_n, c_1, \dots, c_k$.

Für jeden Punkt \mathbf{c}, \mathbf{b} von $\mathcal{C} \times \mathcal{B}$ gibt es dann durch den Punkt $u, \mathbf{v} \in \mathcal{G}$ eine in \mathcal{G} von Rand zu Rand verlaufende Integralkurve

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}; \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

Die Integralkurve $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ ist an jeder Stelle $x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$ ihres Existenzbereiches nach $x, u, v_1, \dots, v_n, c_1, \dots, c_k$ partiell differenzierbar, und diese partiellen Ableitungen sind stetige Funktionen von $x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$.

Ferner ist die partielle Ableitung

$$\mathbf{w}_p = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial c_p}, \quad 1 \leq p \leq k$$

die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\mathbf{w}' = \mathbf{f}_{c_p}(x, \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})) + \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b}), \mathbf{c}, \mathbf{b})\mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_p(u) = \mathbf{0}$$

Hierbei ist \mathbf{F} die Matrix

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = \frac{\partial f_p}{\partial y_q}, \quad p, q = 1, \dots, n$$

BEWEIS

Siehe Kamke (1969), S. 122, Satz 2.

Anmerkung

Ist die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ entsprechend oft partiell differenzierbar, dann überträgt sich dies auf die Integralkurven

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

siehe hierzu Kamke (1969), S. 124, Satz 3, und S. 125, Satz 4.

Für die weiteren Ausführungen betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

mit der Anfangsbedingung v , der Mündungsgeschwindigkeit.

Wir definieren nun das Funktional

$$h(x, \mathbf{c}) = \|\mathbf{y}_{\text{Ziel}} - \mathbf{Y}(x, u, v, \mathbf{c})\|^2$$

welches bzgl. x und \mathbf{c} minimiert werden soll.

Dieses bedeutet, dass wir einen Zeitpunkt t_{Ziel} und einen Winkel θ^* finden müssen, so dass

$$\begin{aligned} x(t_{\text{Ziel}}) &= x_{\text{Ziel}} \\ y(t_{\text{Ziel}}) &= y_{\text{Ziel}} \end{aligned}$$

gilt (gegebenenfalls kommt noch ein Winkel ζ^* für die z -Komponente hinzu, ein Seitenkorrektur- oder Vorhaltewinkel, falls der Einfluss von Seitenwind mit eingerechnet werden soll).

Äquivalent hierzu ist

$$\begin{aligned} x(t_{\text{Ziel}}) - x_{\text{Ziel}} &= 0 \\ y(t_{\text{Ziel}}) - y_{\text{Ziel}} &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben damit prinzipiell zwei Möglichkeiten:

1. Wir können unser Problem als Optimierungsaufgabe auffassen.
2. Wir können unser Problem als mehrdimensionales Nullstellenproblem formulieren.

Zu 1.: Hier sind Verfahren wie das BFGS-Verfahren oder das DFP-Verfahren zu nennen - derartige Verfahren sind in der Literatur ausführlich beschrieben und in der Programmiersprache Octave auch realisiert.

Zu 2.: Bildet man die Ableitung des obigen Funktional nach den Parametern, so ergibt sich in natürlicher Weise ein Nullstellenproblem, welches mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren gelöst werden kann. Auch dieses Verfahren ist in Octave verfügbar.

Besitzt das Problem noch eine dritte Komponente, so stellt die Behandlung des dreidimensionalen Problems prinzipiell keine Schwierigkeit dar.

Damit sind die grundlegenden Sätze aus der Mathematik bereitgestellt.

1.3 Das Vakuummodell

1.3.1 Die Bewegungsgleichungen

Hierbei werden sowohl der Luftwiderstand wie auch Rotationseffekte vernachlässigt. Damit wirkt als einzige Kraft auf das Geschoss die Erdanziehung.

Die Kraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 ist bekanntermaßen gegeben durch

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}$$

wobei G die Gravitationskonstante ist und r der Abstand zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 .

Nehmen wir nun vereinfachend eine "flache" Erde an, d. h. dass \mathbf{F} eine konstante Richtung besitzt. Damit haben wir

$$g = \frac{Gm_e}{r_e^2} = 9,81 \frac{m}{sec^2}$$

mit $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$, $m_e = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg (Masse der Erde) und $r_e = 6,38 \cdot 10^6$ m (Radius der Erde).

Wie schon weiter oben angedeutet, wollen hier ein sogenanntes ballistisches Koordinatensystem zugrundelegen.

Dabei bedeutet die y -Koordinate die Flughöhenerhöhung gegenüber der x -Koordinate, die z -Koordinate beschreibt die Abweichung von der durch die x - und y -Koordinate aufgespannten Ebene.

Damit liest sich das zu lösende Differentialgleichungssystem wie folgt

$$\begin{aligned} mx'' &= 0 \\ my'' &= -mg \\ mz'' &= 0 \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos(\theta)$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0 \sin(\theta)$ und $z(0) = 0$, $z'(0) = v_0 \sin(\gamma)$.

Hierbei sind v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, θ der Erhebungswinkel des Rohres und γ der Seitenwinkel - y_0 kann zum Beispiel die Höhe des Zielfernrohres über der Laufachse bedeuten bzw. die Visierlinie über dem Lauf.

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung kann man leicht in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführen, indem man setzt

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir das Differentialgleichungssystem in die Form $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ gebracht - die Abbildung \mathbf{f} ist offensichtlich analytisch, d. h. durch eine Potenzreihe darstellbar.

Man macht nun für $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ jeweils einen Potenzreihenansatz mit noch zu bestimmen den Koeffizienten

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

Damit ergibt sich aus dem Differentialgleichungssystem

$$a_0 = 0, \quad a_1 = v_0 \cos(\theta), \quad 0 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots$$

$$b_0 = y_0, \quad b_1 = v_0 \sin(\theta), \quad 2b_2 = -g, \quad 0 = b_3 = b_4 = \dots$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = v_0 \sin(\gamma), \quad 0 = c_2 = c_3 = \dots$$

Somit ergibt sich für die Lösungen in sogenannter Parameterdarstellung

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t, \quad y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad z(t) = v_0 \sin(\gamma)t$$

Diese Vorgehensweise kann zum Beispiel im Buch von Boyce und DiPrima (1995) nachgelesen werden - hier findet man ein ganzes Kapitel über die Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe von Potenzreihenansätzen.

Speziell für $\gamma = 0$ ergibt sich die Lösung $z(t) = 0$ - wir wollen dies vorerst annehmen.

Da $z(t) = 0$ ist, wollen wir die dritte Komponente vorerst nicht weiter betrachten.

Löst man $x(t)$ nach der Zeit t auf

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos(\theta)}$$

so ergibt sich die Flughöhe y in Abhängigkeit von der Flugweite x bei gegebenem Winkel θ :

$$y(x) = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

siehe zum Beispiel de Mestre (1990), S. 3.

Die Flughöhe in Abhängigkeit von der Flugweite ist somit ein quadratisches Polynom.

Wir berechnen nun den oder die Winkel, um eine bestimmte Flugweite x_0 zu erreichen.

Gegeben

$$y(x) = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

dann ist der (oder die) Erhebungswinkel θ gesucht, so dass für x_0 gelten soll $y(x_0) = 0$.

Wir haben somit

$$0 = y(x_0) = y_0 + \tan(\theta)x_0 - \frac{1}{2}g \frac{x_0^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

Wir beachten nun die Beziehung

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

und erhalten

$$0 = y(x_0) = y_0 + \tan(\theta)x_0 - \frac{gx_0^2}{2v_0^2} - \frac{gx_0^2}{2v_0^2} \tan^2(\theta)$$

Durch Umstellen ergibt sich hieraus eine quadratische Gleichung in $\tan(\theta)$

$$\frac{gx_0^2}{2v_0^2} \tan^2(\theta) - \tan(\theta)x_0 = y_0 - \frac{gx_0^2}{2v_0^2}$$

oder

$$\tan^2(\theta) - 2 \frac{v_0^2 x_0}{gx_0^2} \tan(\theta) = \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0^2} - 1$$

Mittels einer quadratischen Ergänzung ergibt sich hieraus

$$\tan^2(\theta) - 2 \frac{v_0^2}{gx_0} \tan(\theta) + \left(\frac{v_0^2}{gx_0} \right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{gx_0} \right)^2 + \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0^2} - 1$$

und damit

$$\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{gx_0} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 + \frac{2v_0^2y_0}{gx_0^2} - 1}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass es zwei Winkel geben muss, die zu der gleichen Flugweite führen - ein Winkel, der zur positiven Wurzel und ein Winkel, der zur negativen Wurzel gehört.

Zu gegebenem Winkel bestimmen wir nun die maximale Reichweite.

Hierzu differenzieren wir die Flughöhe und setzen die Ableitung gleich Null:

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y'(t) = v_0 \sin(\theta) - gt$$

$$\Rightarrow 0 = v_0 \sin(\theta) - gt^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$$

Damit folgt für die zugehörige Flughöhe durch Einsetzen:

$$y^* = y(t^*) = y_0 + v_0 \sin(\theta) \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g}\right)^2 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$$

und für die zugehörige Reichweite

$$x^* = x(t^*) = v_0 \cos(\theta) \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g}$$

Die Parabel ist symmetrisch um x^* - das Zweifache von x^* ergibt damit die maximale Reichweite x_{Max} :

$$x_{Max} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Die Reichweite wird nun maximiert, falls der Sinus gleich Eins wird.

Damit muss gelten:

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

oder $\theta = 45^\circ$.

Somit

$$x_{Max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Die zugehörige Flughöhe ergibt sich dann zu

$$y_{Max} = \frac{v_0^2}{4g}$$

1.3.2 Schuss auf geneigter Ebene

Wir betrachten nun den Schuss längs einer geneigten Ebene. Diese Ebene habe mit der Horizontalen einen Winkel β (man redet dann auch vom Schuss auf geneigter Ebene).

Dieser Winkel β wird dann Geländewinkel oder Zielhöhenwinkel genannt (siehe Molitz und Strobel (1963), S. 14).

Die Einführung dieses Winkel entspricht der Drehung des alten Koordinatensystems um den Winkel β mit einer Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Rücktransformation des neuen Koordinatensystems entspricht der Invertierung der Drehmatrix - die Inverse ergibt sich durch Transposition:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation des Gravitationsvektors

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Drehmatrix $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ergibt dann neuen Gravitationsvektor

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -g \sin(\beta) \\ -g \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus diesem Grunde muss der Gravitationsvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ersetzt werden durch } \begin{pmatrix} -g \sin(\beta) \\ -g \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Differentialgleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned} mx'' &= -mg \sin(\beta) \\ my'' &= -mg \cos(\beta) \\ mz'' &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x'' &= -g \sin(\beta) \\ y'' &= -g \cos(\beta) \\ z'' &= 0 \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos(\theta)$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0 \sin(\theta)$ und $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$.

Auch hier ist θ der Winkel der Rohrerhöhung.

Wie zu Anfang machen wir für $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ einen Potenzreihenansatz - dies ergibt analog als Lösung

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \sin(\beta)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \cos(\beta)$$

$$z(t) = 0$$

Bei Rohrerhebungswinkel θ und Ebenenneigung β ergibt sich die Flugzeit t_f , indem man $y(t) = 0$ setzt:

$$0 = y(t_f) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 \cos(\beta)$$

und nach t_f auflöst.

Dies ergibt:

$$\frac{2y_0}{g \cos(\beta)} = t_f^2 - \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} t_f$$

oder

$$\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)} = t_f^2 - \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} t_f + \left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2$$

somit

$$\left(t_f - \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}\right)^2 = \left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}\right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}$$

d. h.

$$t_f = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}\right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}}$$

da nur die positive Wurzel hier in Betracht kommt.

Ist $y_0 = 0$, dann erhalten wir

$$t_f = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}$$

was der Formel (3.43) in McCoy (1999), S. 48, entspricht.

Setzen wir die Flugzeit t_f in

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \sin(\beta)$$

ein, dann erhalten wir die Flugweite x_f :

$$\begin{aligned} x_f = x(t_f) &= v_0 \cos(\theta) \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}\right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}g \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}\right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\}^2 \sin(\beta) \end{aligned}$$

Im Fall $y_0 = 0$ vereinfacht sich diese Formel zu

$$\begin{aligned} x_f = x(t_f) &= v_0 \cos(\theta) \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} - \frac{1}{2}g \left(\frac{2v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)}\right)^2 \sin(\beta) \\ &= v_0^2 \frac{\sin(2\theta)}{g \cos(\beta)} - 2v_0^2 \frac{\sin^2(\theta)}{g \cos^2(\beta)} \sin(\beta) \\ &= \frac{v_0^2}{g \cos(\beta)} [\sin(2\theta) - 2 \sin^2(\theta) \tan(\beta)] \end{aligned}$$

Auch hier wollen wir nun den oder die Winkel berechnen, um eine gewisse Flugweite x_0 zu erreichen.

Der Ausgangspunkt ist hierbei die Gleichung

$$x_f = x(t_f) = v_0 \cos(\theta) \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\} - \frac{1}{2} g \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\}^2 \sin(\beta)$$

Setzen wir nun hierbei $x_f = x_0$, dann erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für den gesuchten Winkel θ :

$$x_0 = v_0 \cos(\theta) \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\} - \frac{1}{2} g \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\}^2 \sin(\beta)$$

oder

$$0 = v_0 \cos(\theta) \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\} - \frac{1}{2} g \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g \cos(\beta)} \right)^2 + \frac{2y_0}{g \cos(\beta)}} \right\}^2 \sin(\beta) - x_0$$

Damit haben wir bei bekanntem Geländewinkel β ein Nullstellenproblem in θ zu lösen.

Dieses Problem kann mit Hilfe der Funktion `fzero` aus dem Programmpaket Octave gelöst werden.

Es verbleibt noch, zu bekannten Winkeln β und θ die Zeitpunkte auszurechnen, falls die Flugweiten $x(t)$ vorgegeben sind - dann können durch Einsetzen die zugehörigen Flughöhen ausgerechnet werden.

Wir gehen hierzu aus von der Gleichung

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \sin(\beta)$$

Bei vorgegebenen Flugweiten $x(t)$ ist dies eine quadratische Gleichung in t , kann somit nach t aufgelöst werden.

Dies ergibt den frühestmöglichen Zeitpunkt $t = t(x)$ in Abhängigkeit von der Flugweite x :

$$t(x) = \frac{v_0 \cos(\theta)}{g \sin(\beta)} - \sqrt{\left(\frac{v_0 \cos(\theta)}{g \sin(\beta)}\right)^2 - \frac{2x}{g \sin(\beta)}}$$

1.3.3 Seitenwind

Modelliert man den Seitenwind durch einen konstanten Geschwindigkeitsvektor \mathbf{w} , dann fügt sich diese zusätzliche Annahme sehr einfach in unser bisheriges Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} mx'' &= 0 \\ my'' &= -mg \\ mz'' &= 0 \end{aligned}$$

ein, indem man den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ersetzt durch $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, wobei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

und die Anfangsbedingungen entsprechend modifiziert:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0 \cos(\theta) - w_x, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0 \sin(\theta) - w_y \quad \text{und} \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = -w_z.$$

Der Potenzreihenansatz

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

ergibt aus dem Differentialgleichungssystem

$$a_0 = 0, \quad a_1 = v_0 \cos(\theta) - w_x, \quad a_2 = 0 = a_3 = a_4 = \dots$$

$$b_0 = y_0, \quad b_1 = v_0 \sin(\theta) - w_y, \quad 2b_2 = -g, \quad 0 = b_3 = b_4 = \dots$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -w_z, \quad 0 = c_2 = c_3 = \dots$$

Also ergibt sich für die Lösungen

$$x(t) = (v_0 \cos(\theta) - w_x)t, \quad y(t) = y_0 + (v_0 \sin(\theta) - w_y)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad z(t) = -w_z t$$

Damit können wir wieder Flugzeit, Flugweite und Flughöhe bestimmen.

Nun ist ein konstanter Seitenwind vielleicht nicht ganz realistisch - der meteorologische Dienst könnte möglicherweise Informationen verschaffen über die horizontale Windgeschwindigkeit in verschiedenen Lagen über Grund.

Nachlesen kann man dies im Buch von de Mestre (1990), S. 110 ff.

1.3.4 Die Sicherheitsparabel

Wir wollen noch den Begriff der Sicherheitsparabel einführen.

Hierzu betrachten wir die Gleichung

$$y(x) = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

und verändern den Startwinkel θ systematisch durch.

Die verschiedenen Parabeln erreichen dann unterschiedliche Punkte in der vertikalen (Wurf-) Ebene.

Die Reichweite dieser Wurfparabeln wird durch die einhüllende Wurfparabel begrenzt.

Diese Einhüllende wird dann auch Sicherheitsparabel genannt - ihre Gleichung lautet

$$y_h(x) = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Ganz allgemein:

Definition 1

Eine in der x,y -Ebene liegende Menge von stetigen Kurven soll eine einfach-unendliche (oder einparametrische) ebene Kurvenschar heißen, wenn man eine Funktion $F(x,y,c)$ der beiden Koordinaten x und y und eines Parameters c , die für ein gewisses Gebiet G der x,y -Ebene und ein gewisses Intervall I des Parameters c definiert und in dem ganzen (dreidimensionalen) Wertebereich ihrer Argumente stetig ist, so bestimmen kann, dass die Gleichung

$$F(x,y,c) = 0$$

für jeden festen, dem Intervall I angehörenden Wert von c (nötigenfalls bei geeigneter Beschränkung der Veränderlichen x und y) eine Kurve der ins Auge gefassten Menge darstellt und auch nach und nach die Gleichungen aller dieser Kurven liefert, und zwar die einer jeden einzelnen nur ein einziges Mal, wenn der Parameter c das Intervall I vollständig durchläuft.

Weiter definieren wir:

Definition 2

Es sei eine einparametrische Kurvenschar im Sinne der vorhergehenden Definition gegeben.

Wenn es dann eine Kurve $c(t)$ gibt, die von jeder Kurve der Schar berührt wird und von der auch umgekehrt jeder Punkt der Berührungspunkt mit einer Kurve der Schar ist, so soll $c(t)$ die Einhüllende oder Enveloppe oder auch Hüllkurve der gegebenen Kurvenschar genannt werden.

Man kann nun folgenden Satz zeigen (dieser stellt hinreichende Bedingungen für die Einhüllende auf und gibt auch ein Kochrezept für ihre Berechnung an):

Satz 7

Es sei

$$F(x, y, c) = 0$$

die Gleichung einer einparametrischen Kurvenschar.

Die Funktion $F(x, y, c)$ möge in dem ganzen (dreidimensionalen) Wertebereich W ihrer Argumente stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, es mögen auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$F_{cx} = \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial x}, \quad F_{cy} = \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial y}, \quad F_{cc} = \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial c}$$

vorhanden und stetig sein.

Endlich sei (x_0, y_0, c_0) eine Stelle in W , deren Koordinaten den beiden Gleichungen

$$F(x_0, y_0, c_0) = 0, \quad F_c(x_0, y_0, c_0) = 0$$

genügen. Wenn dann an dieser Stelle die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ F_{cx} & F_{cy} \end{pmatrix} \neq 0$$

und auch die Ableitung

$$F_{cc}(x_0, y_0, c_0) \neq 0$$

ist, so besitzt die Schar

$$F(x, y, c) = 0$$

in hinreichender Nähe der Stelle (x_0, y_0) eine Einhüllende, für die durch Auflösung der Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad F_c(x, y, c) = 0$$

nach x und y eine Parameterdarstellung der Form

$$x = \phi(c), \quad y = \psi(c)$$

gewonnen werden kann, wenn bei ihr c auf eine hinreichend kleine Umgebung der Stelle c_0 beschränkt wird.

BEWEIS Siehe Mangoldt und Knopp (1974), S. 521, Satz.

Hierzu folgendes

Beispiel 1

Wir betrachten die durch t parametrisierte und die Gleichung

$$y = f(x, t) := tx - t^2$$

definierte Geradenschar.

Wie oben dargestellt wurde, ist die Einhüllende dieser Geradenschar durch

$$\begin{aligned} y &= f(x, t) = tx - t^2 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial t} = x - 2t \end{aligned}$$

gegeben.

Wir eliminieren t , dies ergibt die parameterfreie Darstellung der Einhüllenden:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Die hier skizzierte Theorie findet Anwendung bei der Berechnung von Sicherheitsparabeln.

Dazu betrachten wir den Winkel θ als Parameter und differenzieren die Gleichung nach θ - dies ergibt

$$y(x) = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

und

$$0 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}x - \frac{gx^2}{v_0^2} \frac{1}{\cos^2(\theta)} \tan(\theta)$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\tan(\theta) = \frac{v_0^2}{gx}$$

Dies substituieren wir zurück in die Gleichung

$$y(x) = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

dabei beachten wir, dass gilt

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} y_e(x) &= y_0 + x \left(\frac{v_0^2}{gx} \right) - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2} \right) \\ &= y_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \end{aligned}$$

siehe hierzu auch Carlucci und Jacobson (2008), S. 200, oder de Mestre (1990), S. 15.

Damit ist die Gleichung der Sicherheitsparabel festgelegt.

Setzen wir $y_0 = 0$, dann erhalten wir:

Für $y_e = 0$ erhalten wir die maximale Reichweite:

$$x_e = \frac{v_0^2}{g}$$

und für $x_e = 0$ die maximale Flughöhe:

$$y_e = \frac{v_0^2}{2g}$$

1.4 Die Luftwiderstandsgesetze G1 bis G8

Auf größeren Entfernungen macht sich nun durchaus der Einfluss des Luftwiderstandes bemerkbar - wir demonstrieren dies anhand von einigen Beispielen.

Beispiel 2

Unterstellen wir ein lineares Luftwiderstandsgesetz, dann lautet das zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -kv_x \\ m\dot{v}_y &= -mg - kv_y \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $v_x(0) = \cos(\theta)v_0$, $y(0) = y_0$ und $v_y(0) = \sin(\theta)v_0$ und einer Konstanten $k > 0$.

Division durch die Masse m des Geschosses ergibt

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -kv_x \\ \dot{v}_y &= -g - kv_y \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir durch Integration von 0 bis t

$$\ln\left(\frac{v_x(t)}{v_x(0)}\right) = -kt \Rightarrow v_x(t) = v_x(0) \exp(-kt)$$

und aus der zweiten Gleichung

$$\ln\left(\frac{g + kv_y(t)}{g + kv_y(0)}\right) = -kt \Rightarrow g + kv_y(t) = (g + kv_y(0)) \exp(-kt)$$

oder

$$v_y(t) = \frac{g + kv_y(0)}{k} \exp(-kt) - \frac{g}{k}$$

Eine nochmalige Integration von 0 bis t ergibt dann

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k} (1 - \exp(-kt))$$

und

$$y(t) = y_0 + \frac{g + kv_y(0)}{k^2} (1 - \exp(-kt)) - \frac{g}{k} t$$

Wir betrachten die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

Für $\exp(-kt)$ ergibt sich hieraus

$$\exp(-kt) = 1 - kt + \frac{1}{2}(kt)^2 - \frac{1}{6}(kt)^3 + \frac{1}{24}(kt)^4 + \dots$$

so dass

$$1 - \exp(-kt) = kt - \frac{1}{2}(kt)^2 + \frac{1}{6}(kt)^3 - \frac{1}{24}(kt)^4 + \dots$$

und somit

$$x(t) = v_x(0)t - k\frac{1}{2}t^2 + k^2\frac{1}{3}t^3 - k^3\frac{1}{24}t^4 + \dots$$

und

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + k\frac{1}{6}gt^3 + k^2\frac{1}{24}gt^4 + \dots + v_y(0)t - kv_y(0)\frac{1}{2}t^2 + k^2v_y(0)\frac{1}{6}t^3 - k^2v_y(0)\frac{1}{24}t^4 + \dots$$

oder nach Umordnung

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 - kv_y(0)\frac{1}{2}t^2 + k^2v_y(0)\frac{1}{6}t^3 - k^2v_y(0)\frac{1}{24}t^4 + \dots + k\frac{1}{6}gt^3 + k^2\frac{1}{24}gt^4 + \dots$$

Vergleicht man die Lösung mit der des Vakuummodells

$$x(t) = v_x(0)t$$

und

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

so ist ersichtlich, dass sich das Modell mit dem Luftwiderstandsgesetz um Zusatzterme unterscheidet.

Differenzieren wir

$$y(t) = y_0 + \frac{g + kv_y(0)}{k^2}(1 - \exp(-kt)) - \frac{g}{k}t$$

nach der Zeit und setzen die Ableitung gleich Null, dann erhalten wir

$$\frac{g + kv_y(0)}{k} \exp(-kt) - \frac{g}{k} = 0$$

oder

$$\exp(-kt) = \frac{g}{g + kv_y(0)} \Rightarrow t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{g + kv_y(0)}{g} \right) = \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_y(0)}{g} \right)$$

Setzen wir diesen Zeitpunkt in $x(t)$ ein, so erhalten wir

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{kv_y(0)}{g}} \right) = \frac{v_x(0)}{k} \frac{kv_y(0)}{g + kv_y(0)} = \frac{v_x(0)v_y(0)}{g + kv_y(0)}$$

Berechnen wir den entsprechenden Zeitpunkt für das Vakuummodell, so erhalten wir

$$t = \frac{v_y(0)}{g}$$

und hieraus durch Einsetzen in $x(t)$:

$$x(t) = v_x(0) \frac{v_y(0)}{g} = \frac{v_x(0)v_y(0)}{g}$$

Vergleicht man die beiden Flugweiten, so erkennt man, dass bei dem Modell mit Luftwiderstand die Flugweite bis zum Scheitelpunkt geringer ist.

Damit ist die Flugbahn im Fall des Modells mit Luftwiderstand stärker gekrümmt.

Wir sollten noch anmerken, dass wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -kv_x \\ \dot{v}_y &= -g - kv_y \end{aligned}$$

prinzipiell auch durch einen Potenzreihenansatz für

$$v_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{und} \quad v_y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

hätten lösen können - nachdem wir die Potenzreihe für $v_x(t)$ und $v_y(t)$ berechnet haben, ergibt eine Integration jeweils die Potenzreihe für $x(t)$ und $y(t)$.

Die entsprechenden technischen Details können zum Beispiel im Buch von Boyce und DiPrima (1995) nachgelesen werden.

Allerdings ist das Verfahren der Trennung der Variablen hier zielführender - obwohl offensichtlich die Lösung eine Darstellung als Potenzreihe gestattet.

Nun kann man argumentieren, dass die durchgeführten Rechnungen mathematische Fiktionen sind - allerdings beobachtet man in der Praxis durchaus, dass die Flugweiten kürzer sind als vom Vakuummodell vorhergesagt.

Beispiel 3

Wir gehen nochmals von dem Differentialgleichungssystem mit linearem Luftwiderstandsgesetz aus

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -kv_x \\ m\dot{v}_y &= -mg - kv_y \end{aligned}$$

und seinen Lösungen

$$v_x(t) = v_x(0) \exp(-kt)$$

$$v_y(t) = \frac{g + kv_y(0)}{k} \exp(-kt) - \frac{g}{k}$$

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k} (1 - \exp(-kt))$$

und

$$y(t) = y_0 + \frac{g + kv_y(0)}{k^2} (1 - \exp(-kt)) - \frac{g}{k} t$$

Um eine konkrete Situation vor Augen zu haben, betrachten wir die Munition von GECO im Kaliber .223 und hier die Laborierung Target VM 4,1 g mit folgenden Daten des Herstellers:

	0m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
v m/s	950	903	857	813	770	728	688

Wir wollen nun die Daten des Herstellers mit den Aussagen des Modells vergleichen.

Um die Geschwindigkeit und die Flugzeit berechnen zu können, müssen wir die Konstante k zumindest näherungsweise bestimmen.

Hierzu verwenden wir die Gleichung

$$v_x(t) = v_x(0) \exp(-kt)$$

Wir erhalten

$$903 = v_x(0) \exp(-kt_{50})$$

und

$$857 = v_x(0) \exp(-kt_{100})$$

Nun ist näherungsweise

$$t_{50} = \frac{50}{903} \quad \text{und} \quad t_{100} = \frac{100}{857}$$

somit

$$t_{50} = 0,05537 \quad \text{und} \quad t_{100} = 0,11668$$

Dividieren wir unsere Ansätze für die Geschwindigkeiten durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{857}{903} = \exp(-k(t_{100} - t_{50}))$$

oder

$$0,949058 = \exp(-k \cdot 0,06131)$$

In dieser Gleichung können wir nun nach k auflösen - wir erhalten

$$k = -\frac{\ln(0,949058)}{0,06131} = -\frac{-0,052285}{0,06131} = 0,852803$$

Lösen wir nun

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k} (1 - \exp(-kt))$$

nach t auf, so erhalten wir zu verschiedenen Flugweiten näherungsweise die zugehörige Flugzeit

$$t = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_x(0)} \right)$$

Damit erhalten wir folgende Tabelle

	0m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
t sec	0,0	0,0538	0,1102	0,1695	0,2320	0,2980	0,3679

Hiermit können wir die zugehörigen Geschwindigkeiten ausrechnen - dies ergibt folgende Tabelle (wir nehmen kleine Rohrerhöhungswinkel an, der Kosinus ist dann praktisch gleich Eins):

	0m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
v m/s	950	903	857	813	770	728	688
v m/s ber.	950	907,39	864,78	822,14	779,46	736,80	694,16

Demgegenüber nimmt das Vakuummodell eine konstante Geschwindigkeit an - sicherlich keine realistische Annahme, aber für nicht zu große Entfernungen brauchbar.

Man sieht an diesem Beispiel, dass auf 300 Meter die Munition ein gutes Viertel ihrer Anfangsgeschwindigkeit verliert - immerhin etwa 27 Prozent.

Hier zum Vergleich die Daten des Kalibers .308 von RWS Target Elite 10.9 g

	0m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
v m/s	800	769	739	710	681	653	626

Hier beträgt der Geschwindigkeitsverlust knapp 22 Prozent.

Für Schüsse auf weitere Distanzen ist von daher das Kaliber .308 wohl eher geeignet als das Kaliber .223 .

Die analogen Rechnungen ergeben hier:

$$t_{50} = \frac{50}{769} \quad \text{und} \quad t_{100} = \frac{100}{739}$$

somit

$$t_{50} = 0,06501 \quad \text{und} \quad t_{100} = 0,13531$$

Dividieren wir unsere Ansätze für die Geschwindigkeiten durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{739}{769} = \exp(-k(t_{100} - t_{50}))$$

oder

$$0,96098 = \exp(-k \cdot 0,0703)$$

In dieser Gleichung können wir nun nach k auflösen - wir erhalten

$$k = -\frac{\ln(0,96098)}{0,0703} = -\frac{-0,039801}{0,0703} = 0,56616$$

Lösen wir nun

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k}(1 - \exp(-kt))$$

nach t auf, so erhalten wir zu verschiedenen Flugweiten näherungsweise die zugehörige Flugzeit

$$t = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_x(0)} \right)$$

Damit erhalten wir folgende Tabelle

	0m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
t sec	0,0	0,0636	0,1296	0,1982	0,2695	0,3438	0,4215

Hiermit können wir die zugehörigen Geschwindigkeiten ausrechnen - dies ergibt folgende Tabelle (wir nehmen wieder kleine Rohrerhöhungswinkel an, der Kosinus ist dann praktisch gleich Eins):

	0m	50m	100m	150m	200m	250m	300m
v m/s	800	769	739	710	681	653	626
v m/s ber.	800	771,71	743,41	715,10	686,82	658,53	630,20

Beispiel 4

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Munition für das Kaliber .308 vom Hersteller Lapua, Geschossgewicht 10,85 Gramm, Geschosstyp Scenar, Produktcode 4317515, Testlauflänge 660 mm.

Der Hersteller macht folgende Angaben:

	0	100m	200m	300m	600m	800m
v m/s	820	754	690	628	459	364
100 m	0	0	-132	-470	-3212	-7258

Die Zeile unter der Geschossgeschwindigkeit ist der Geschossabfall in Millimetern, die Einschießentfernung ist offensichtlich 100 Meter.

Diesmal interessieren wir uns für die Flughöhen, d. h. den Geschossabfall, in Abhängigkeit von der Flugzeit.

Hierzu verwenden wir die Gleichung

$$v_x(t) = v_x(0) \exp(-kt)$$

Wir erhalten

$$754 = v_x(0) \exp(-kt_{100})$$

und

$$690 = v_x(0) \exp(-kt_{200})$$

Nun ist näherungsweise

$$t_{100} = \frac{100}{754} \quad \text{und} \quad t_{200} = \frac{200}{690}$$

somit

$$t_{100} = 0,13262 \quad \text{und} \quad t_{200} = 0,28985$$

Dividieren wir unsere Ansätze für die Geschwindigkeiten durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{690}{754} = \exp(-k(t_{200} - t_{100}))$$

oder

$$0,91511 = \exp(-k \cdot 0,15723)$$

In dieser Gleichung können wir nun nach k auflösen - wir erhalten

$$k = -\frac{\ln(0,91511)}{0,15723} = -\frac{-0,088700}{0,1572} = 0,56414$$

Lösen wir nun

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k}(1 - \exp(-kt))$$

nach t auf, so erhalten wir zu verschiedenen Flugweiten näherungsweise die zugehörige Flugzeit

$$t = -\frac{1}{k} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_x(0)}\right)$$

Damit erhalten wir folgende Tabelle

	100m	200m	300m	600m	800m
t sec	0,126	0,262	0,409	0,943	1,416

Uns interessiert nun die Flughöhe - hierzu berechnen wir zuerst aus der Formel

$$y(t) = y_0 + \frac{g + kv_y(0)}{k^2}(1 - \exp(-kt)) - \frac{g}{k}t$$

für $y_0 = 0$ den konstanten Term

$$\frac{g + kv_y(0)}{k^2}$$

aus der Einschießentfernung. Wir haben

$$y(t_{100}) = \frac{g + kv_y(0)}{k^2} (1 - \exp(-kt_{100})) - \frac{g}{k} t_{100} = 0$$

also

$$\begin{aligned} \frac{g + kv_y(0)}{k^2} &= \frac{\frac{g}{k} t_{100}}{(1 - \exp(-kt_{100}))} = \frac{17,38 \cdot 0,126}{0,0686} \\ &= 31,922 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle für die Flughöhen

	100m	200m	300m	600m	800m
t sec	0,126	0,262	0,409	0,943	1,416
y(t) m	0	-0,169	-0,535	-3,229	-7,062

Wir betrachten noch kurz das Vakuummodell.

Bei einer Einschießentfernung von 100 Metern müssen wir zuerst den Rohrerhebungswinkel θ berechnen - dieser ergibt sich aus der Formel

$$y(x) = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

indem wir $y_0 = 0$ und $y(100) = 0$ setzen und nach θ auflösen.

Somit

$$\sin(2\theta) = \frac{g \cdot 100}{v_0^2} \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{g \cdot 100}{v_0^2}\right)$$

Für eine Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 820$ m/s erhalten wir

$$\theta = 0,04179^\circ$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle

	100m	200m	300m	600m	800m
y(x) m	0	-0,146	-0,427	-2,188	-4,085

Die berechnete Geschossbahn verläuft somit sehr viel flacher als die unter Berücksichtigung des Luftwiderstands berechnete Bahn.

Für Bahnrechnungen auf größere Entfernungen ist das Vakuummodell wohl weniger geeignet.

Aufgrund dieses letzten Beispiels stellen sich zwei Fragen:

- Wie kann man den Luftwiderstand vernünftig modellieren - reicht ein lineares Luftwiderstandsgesetz aus?
- Insbesondere, wenn man auf größere Entfernungen schießen will, welche zusätzlichen Einflussgrößen sollten in ein derartiges mathematisches Modell aufgenommen werden?
- Es gibt eine Unzahl an Kalibern und Geschossformen - es ist von daher unmöglich, für jedes Kaliber und jede Geschossform ein eigenes Luftwiderstandsgesetz aufzustellen. Was wäre eine vernünftige Vorgehensweise?

Die heute gängigen Luftwiderstandsgesetze sind typischerweise von quadratischer Struktur - der Luftwiderstand, den ein Geschoss beim Durchtritt durch die Luft erfährt, hängt vom Quadrat seiner Geschwindigkeit ab.

Dies bedeutet, dass eine Verdoppelung der Geschwindigkeit eine Vervierfachung der Widerstandskraft nach sich zieht.

Eine derartige Annahme findet man erstaunlich oft - siehe zum Beispiel die Bücher von Fontanella (2007), Wesson (2009) und Wesson (2002). In jedem Fall legt man eine quadratische Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit zugrunde.

Der Betrag des Luftwiderstands sieht dann wie folgt aus (siehe z. B. McCoy (1999), S. 33, Formel 2.1-b):

$$\text{Luftwiderstand} = -\frac{1}{2}\rho v^2 \cdot S \cdot C_d$$

Dabei ist ρ die Luftdichte, v die Geschwindigkeit, S die Referenzfläche des Geschosses und C_d der Widerstandskoeffizient - dieser hängt von der Geschwindigkeit ab und ergibt damit ein sogenanntes Luftwiderstandsgesetz.

S berechnet sich zu

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

dabei ist d der Referenzdurchmesser des Projektils.

Genaugenommen sind hier drei Teilaspekte zusammengefasst:

- Ein Staudruck, d. h. der Druck, den das Geschoss durch die Stirnfläche beim Luftdurchtritt erfährt
- Ein Reibdruck, d. h. der Druck, den das Geschoss durch die Reibung an den Seitenflächen des Geschosses beim Luftdurchtritt erfährt

- Ein Bodensog, der vom Heck durch Verwirbelung der Luft herrührt

Diese drei Kraftwirkungen werden typischerweise zusammengefasst - man erhält dadurch ein sogenanntes Luftwiderstandsgesetz.

Derartige Luftwiderstandsgesetze müssten zwangsläufig für jedes Kaliber, jede Geschossform aufgestellt werden - aus praktischer Sicht kaum möglich, wie im Buch von Peelen (2014) ausgeführt.

Man behalf sich damit, dass man

- einerseits Standardgeschossformen einführte und
- andererseits die Geschossgeschwindigkeiten standardisierte, indem man die Geschossgeschwindigkeit durch die Schallgeschwindigkeit dividierte. Hieraus resultiert die sogenannte Mach-zahl.

Damit erhält man Luftwiderstandsgesetze für standardisierte Geschossformen.

Dass diese Vorgehensweise sinnvoll ist, liegt an der Skalierbarkeit der Navier-Stokes-Gleichungen, siehe zum Beispiel das Buch von Schweizer (2013).

Die quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ergibt sich dann mit Hilfe einer sogenannten Dimensionsanalyse - hier ist die Literatur recht umfangreich, siehe zum Beispiel das Buch von Anderson (2011).

Für beliebige Kaliber und Geschossformen müssen die Widerstandswerte experimentell bestimmt werden - ein Verfahren hierzu ist im Buch von Peelen (2006), S. 25 ff., angegeben, siehe auch das Buch von McCoy (1999), S. 104 ff.

Man erhält dann gegebenenfalls folgende Tabelle (Werte aus dem Buch von Peelen (2006), S. 10, entnommen):

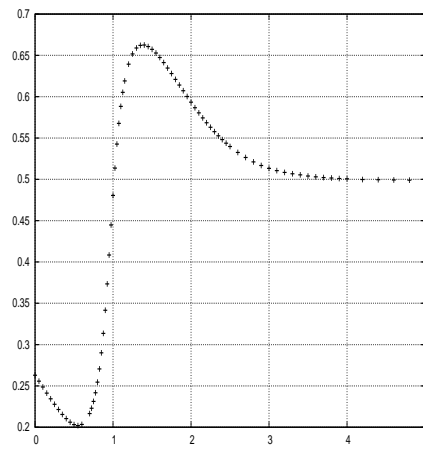
Mach-zahl	zugehöriger C_d
2,5169	0,3257
2,2638	0,3336
2,0315	0,3400
1,8155	0,3602
1,6133	0,3831
1,4205	0,4022

Wie schon angedeutet, gibt es Standardgeschossformen, für die derartige Messungen durchgeführt wurden.

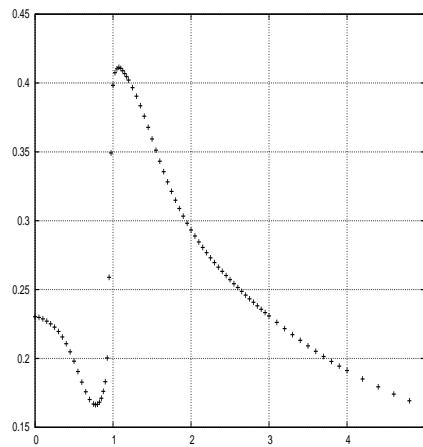
Eine Reihe von derartigen verschiedenen Luftwiderstandsgesetzen sind zum Beispiel im Buch von Peelen (2006), S. 15 ff., beschrieben, insbesondere das Buch von Peelen (2014) - es gibt ungefähr zwei Dutzend verschiedener Standardluftwiderstandsgesetze, jede Nation fühlte sich aufgefordert, ihre eigenen Standardluftwiderstandsgesetze aufzustellen.

Für einige populäre Luftwiderstandsgesetze haben wir nachfolgend entsprechende Graphiken angefügt - die zugehörigen Datenbestände können auf den Webpages von JBM Ballistics gefunden werden. Die populärsten Luftwiderstandsgesetze sind G1 bis G8 - sie sind nachfolgend

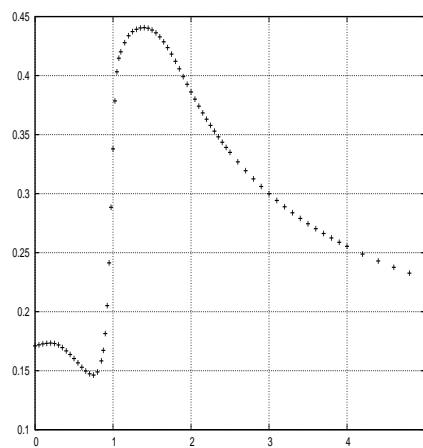
aufgeführt.



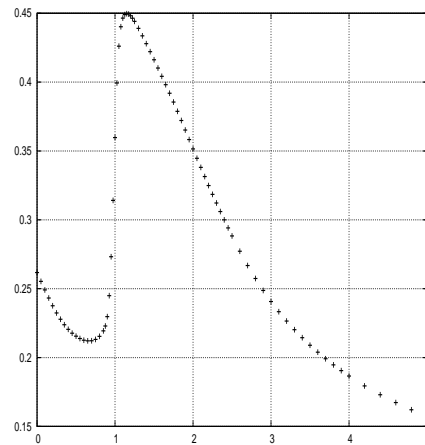
Luftwiderstandswerte für G1



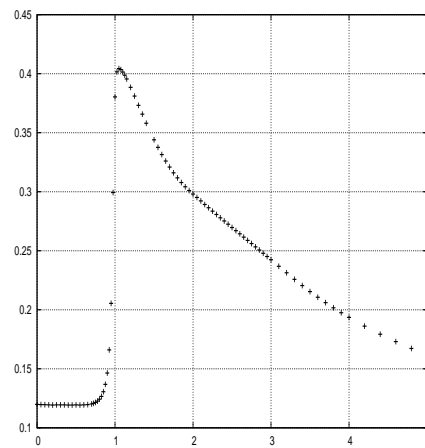
Luftwiderstandswerte für G2



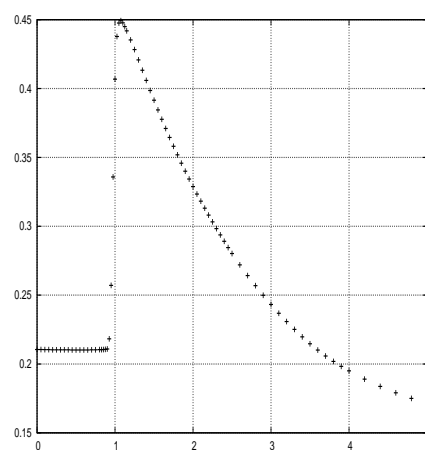
Luftwiderstandswerte für G5



Luftwiderstandswerte für G6



Luftwiderstandswerte für G7



Luftwiderstandswerte für G8

Die Graphiken wurden mit dem Programm Gnuplot erstellt - G3 und G4 gibt es nicht aus Gründen, die dem Buch von Peelen (2006) auf S. 31 zu entnehmen sind.

Man kann nun versuchen, für ein gegebenes Kaliber und eine gegebene Geschossform eines der Standardluftwiderstandsmodelle zu finden, welches das vorgelegte Kaliber und die gegebene Geschossform besonders gut beschreibt.

Hierzu führt man einen sogenannten Formfaktor ein - die Vorgehensweise erläutern wir an einem kleinen Beispiel, welches ebenfalls aus dem Buch von Peelen (2006), S. 11, entnommen wurde:

Mach-zahl	zugehöriger C_d	G1 Modell C_d	Formfaktor
2,5169	0,3257	0,5374	0,6061
2,2638	0,3336	0,5600	0,5957
2,0315	0,3400	0,5897	0,5766
1,8155	0,3602	0,6219	0,5792
1,6133	0,3831	0,6464	0,5927
1,4205	0,4022	0,6616	0,6079

Die Formfaktoren entstehen hierbei dadurch, dass der gemessene C_d -Wert durch den G1 Modell C_d -Wert dividiert wird.

Somit wird in der ersten Zeile der Wert 0,3257 durch 0,5374 dividiert - entsprechend die nachfolgenden Zeilen.

Die Formfaktoren würden somit das G1 Modell derart umskalieren, dass das G1 Modell mehr oder weniger die gemessenen Werte wiedergibt - es liegt nun nahe, aus der Abfolge von Formfaktoren den Mittelwert zu bilden.

In dem obigen Beispiel ergäbe sich dieser Mittelwert zu 0,5930.

Es stellt sich die Frage, wie gut eine derartige Anpassung ist - ein Maß hierfür wäre die Standardabweichung.

In dem obigen Beispiel ergäbe sich diese zu 0,0131.

Diese Formfaktoren sind bekannt - im Buch von McCoy (1999), S. 156, sind eine Reihe von Referenzen aufgeführt, in denen diese Formfaktoren für eine Reihe von Geschossen aufgeführt sind, bis hin zu Artilleriegeschossen. Hier sind zu nennen:

- Hitchcock (1935)
- Hitchcock (1952)
- Hitchcock (1939)
- Hitchcock (1942)
- Hitchcock (1951)
- Hitchcock (1947, revised 1952)

Eine kleine Tabelle mit den Formfaktoren findet man im Buch von McCoy (1999), S. 113.

Die Vorgehensweise, wie zu gegebenem Formfaktor das entsprechende Luftwiderstandsgesetz ausgewählt wird, ist im Buch von McCoy (1999), S. 101 ff., beschrieben - siehe auch das Buch

von Peelen (2006), S. 25 ff.

Außerdem beinhalten die obigen Arbeiten auch Angaben über Reibungskoeffizienten von Magnus-Koeffizienten, Spindämpfungskoeffizienten usw. - somit Angaben, die wertvoll sind, wenn Rotationseffekte in das entsprechende Differentialgleichungssystem mit eingebaut werden sollen.

Nun scheint der Formfaktor oft weniger bekannt zu sein - wohl aber der ballistische Koeffizient.

Beide Größen stehen in folgendem Zusammenhang (siehe hierzu zum Beispiel Litz (2011), S. 563):

$$BC = \frac{w}{7000 d^2 \cdot i}$$

wobei

BC	=	Ballistischer Koeffizient
w	=	Geschossgewicht in Grain
d	=	Geschossdurchmesser in Inch
i	=	Formfaktor des Geschosses

Der ballistische Koeffizient hängt damit natürlich vom Luftwiderstandsgesetz ab - andererseits findet man diesen Koeffizienten in den Produktkatalogen vieler Munitionshersteller.

Damit kann man mit Hilfe der obigen Umrechnungsformel den Formfaktor bestimmen zu

$$i = \frac{w}{7000} \cdot \frac{1}{d^2 \cdot BC}$$

und somit das zugehörige Differentialgleichungssystem (zumindest numerisch) lösen.

1.5 Funktionen für Luftwiderstandsgesetze G1 bis G8

Es ist sicherlich naheliegend, die obigen Luftwiderstandsgesetze durch geeignete Funktionen in Abhängigkeit von der Mach-zahl zu modellieren.

Hierzu beachten wir, dass in den Graphiken offensichtlich die Daten nach links und rechts einer Asymptote zuzustreben scheinen.

Nun gibt es auch physikalische Gründe, die die Annahme einer Asymptote sinnvoll erscheinen lassen - siehe hierzu das Buch von Nielsen (1960).

Gesucht wäre von daher eine Klasse von Funktionen, die ein geeignetes asymptotisches Verhalten aufweisen.

Wir definieren deshalb:

Definition 3

Unter einer gebrochen rationalen Funktion versteht man eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{k=0}^m b_k x^k}$$

mit $b_m \neq 0$ und $a_i, b_k \in \mathbb{R}$.

Der Definitionsbereich von $f(x)$ besteht von daher aus allen reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms.

Die Funktion heißt dabei echt gebrochen, wenn der Zählergrad n kleiner als der Nennergrad m ist. Anderenfalls heißt $f(x)$ unecht gebrochen.

Folgende Sätze sind bei der Bestimmung einer geeigneten Funktion hilfreich:

Satz 8

Jede unecht gebrochene rationale Funktion lässt sich durch Polynomdivision eindeutig in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochen rationalen Funktion zerlegen.

Ist also

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine rationale Funktion mit dem Nennerpolynom $q(x)$ vom Grade $m \geq 1$ und dem Zählerpolynom $p(x)$ vom Grade $n \geq m$, so liefert die Polynomdivision eine Darstellung von $f(x)$ der Gestalt

$$f(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

wobei $h(x)$ ein Polynom vom Grade $m - n$ ist und $r(x)$ ein Polynom von höchstens $(m - 1)$ -ten Grade.

BEWEIS Siehe Burg u. a. (1997), S. 148, Satz 2.5.

Das Verhalten unecht gebrochener rationaler Funktionen $f(x)$ ergibt sich damit sofort aus der obigen Darstellung

$$f(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Da $\frac{r(x)}{q(x)}$ echt gebrochen ist, gilt $\frac{r(x)}{q(x)} \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Also folgt

$$|f(x) - h(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty$$

Damit können wir definieren:

Definition 4

Ein Polynom $h(x)$ heißt Asymptote einer rationalen Funktion, falls gilt:

$$|f(x) - h(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty$$

Damit gilt folgender

Satz 9

Jede rationale Funktion $f(x)$ besitzt eine Asymptote:

- a) *Ist $f(x)$ echt gebrochen, so ist die Asymptote von $f(x)$ die Nullfunktion.*
- b) *Ist $f(x)$ unecht gebrochen, so ist die Asymptote von $f(x)$ das Polynom $h(x)$, welches in der Zerlegung*

$$f(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

auftritt.

BEWEIS Siehe Burg u. a. (1997), S. 149, Satz 2.6.

Es liegt aufgrund der obigen Sätze nahe, gebrochen rationale Funktionen für die Luftwiderstandsgesetze anzusetzen mit **gleichem** Zähler- und Nennergrad - in diesem Fall ist das Polynom $h(x)$ eine Konstante.

Wir erwähnen noch, dass die gebrochen rationalen Funktionen elementar integrierbar sind - siehe hierzu zum Beispiel Burg u. a. (1997), S. 348 ff.; sie sind außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms beliebig oft differenzierbar.

Hiermit stellt sich die Frage, wie man eine derartige Zielfunktion - eine gebrochen rationale Funktion - an die Daten des zugrundegelegten Luftwiderstandsmodells anpasst.

Von diversen Möglichkeiten ist die wohl sinnvollste die folgende:

Man betrachtet die Problemstellung als nichtlineares Ausgleichsproblem - dies ist vielleicht die realistischste und wohl auch pragmatischste Vorgehensweise. In diesem Fall betrachtet man die Koeffizienten der beiden Polynome als unbekannte Parameter, die mit Hilfe der entsprechenden Verfahren aus den Daten der Luftwiderstandsgesetze geschätzt werden müssen.

Es werden dann verschiedene Modelle angepasst - findet im Sinne der Standardabweichung eine Sättigung statt, hat man das wohl passendste Modell gefunden.

Wir beginnen mit dem G1-Modell - hierzu betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}$$

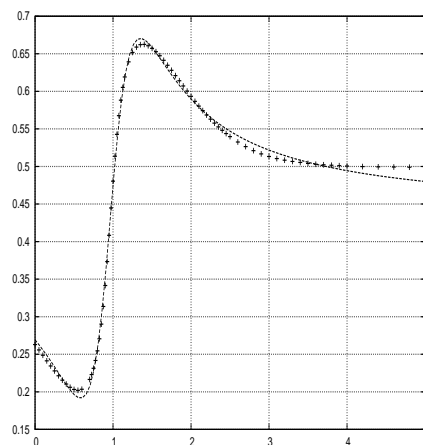
Die Anpassung an den zugehörigen Datensatz ist ein nichtlineares Regressionsproblem - die Lösung derartiger Probleme ist zum Beispiel beschrieben im Buch von Bates und Watts (2007).

Der Algorithmus fit im Programmpaket Gnuplot ergibt als Schätzung für die unbekannt Parameter p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 und q_2 : a, b, c, d, e und f :

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= 0,33890 \\ \hat{p}_1 &= -0,76710 \\ \hat{p}_2 &= 0,51111 \\ \hat{q}_0 &= 1,25903 \\ \hat{q}_1 &= -2,25917 \\ \hat{q}_2 &= 1,17481\end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,00396761.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G1 - Grad 2

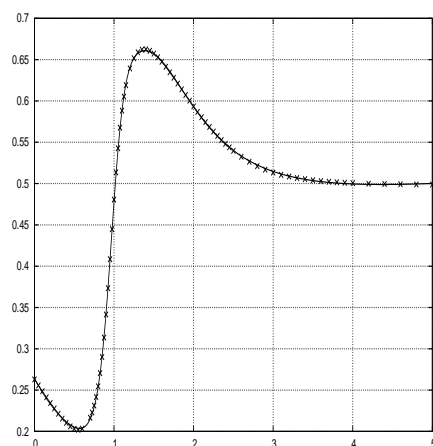
Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind komplex - ein Plot mittels des Programms Gnuplot zeigt dies sofort.

Es liegt nun nahe, den Zähler- wie Nennergrad zu erhöhen, um die Anpassung zu verbessern - dabei müssen Zähler- und Nennergrad gleich gewählt werden.

Wir setzen nun jeweils zwei Polynome vom Grad gleich 6 an - die zugehörige gebrochen rationale Funktion ist dann gleich

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6}$$

und so sieht der zugehörige Plot aus nach der Anpassung:



Anpassung für G1 - Grad 6

In diesem Fall ist die Summe der Residuenquadrate gleich 0,000106988.

Jetzt noch die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_0 &= 5,97528 \\
 \hat{p}_1 &= -17,27900 \\
 \hat{p}_2 &= 20,31110 \\
 \hat{p}_3 &= -14,42120 \\
 \hat{p}_4 &= 9,91939 \\
 \hat{p}_5 &= -5,92595 \\
 \hat{p}_6 &= 1,84657 \\
 \hat{q}_0 &= 22,60060 \\
 \hat{q}_1 &= -49,37570 \\
 \hat{q}_2 &= 27,02670 \\
 \hat{q}_3 &= 8,11422 \\
 \hat{q}_4 &= -5,21977 \\
 \hat{q}_5 &= -5,38708 \\
 \hat{q}_6 &= 3,13215
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun das G2-Modell. Wieder betrachten wir zuerst die Funktion

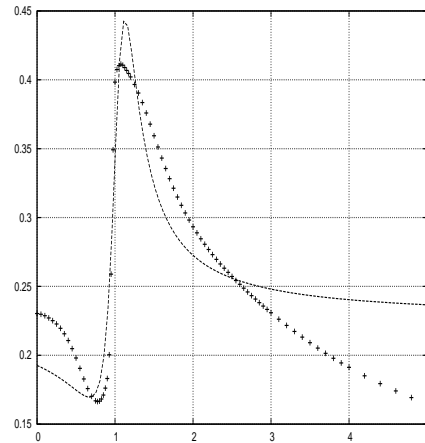
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 und q_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_0 &= -2,98434 \\
 \hat{p}_1 &= 5,98855 \\
 \hat{p}_2 &= -3,17324 \\
 \hat{q}_0 &= -15,49430 \\
 \hat{q}_1 &= 29,04200 \\
 \hat{q}_2 &= -14,04140
 \end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,0806998.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G2 - Grad 2

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0; 5]$ keine Nullstellen besitzt.

Auch hier kann man den Zähler- und Nennergrad wie im G1-Modell sukzessive erhöhen.

Betrachten wir nun die Funktion

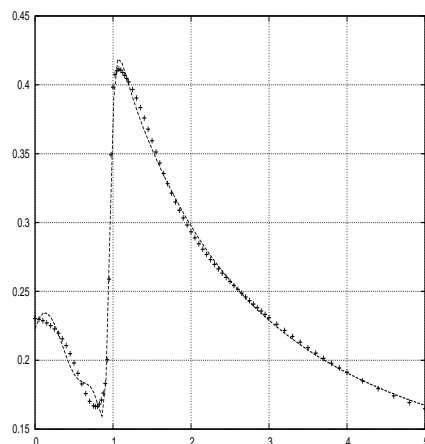
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6 + p_7x^7}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6 + q_7x^7}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ und q_7 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= 8,6598 \\ \hat{p}_1 &= -15,6846 \\ \hat{p}_2 &= -24,3101 \\ \hat{p}_3 &= 84,3486 \\ \hat{p}_4 &= -48,4893 \\ \hat{p}_5 &= -33,5292 \\ \hat{p}_6 &= 24,4535 \\ \hat{p}_7 &= 5,1850 \\ \hat{q}_0 &= 38,8547 \\ \hat{q}_1 &= -102,8020 \\ \hat{q}_2 &= 109,7250 \\ \hat{q}_3 &= -69,4674 \\ \hat{q}_4 &= 50,1876 \\ \hat{q}_5 &= 11,1381 \\ \hat{q}_6 &= -107,3180 \\ \hat{q}_7 &= 71,3619 \end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,00301157.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G2 - Grad 7

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

Betrachten wir nun das G5-Modell. Wieder betrachten wir zuerst die Funktion

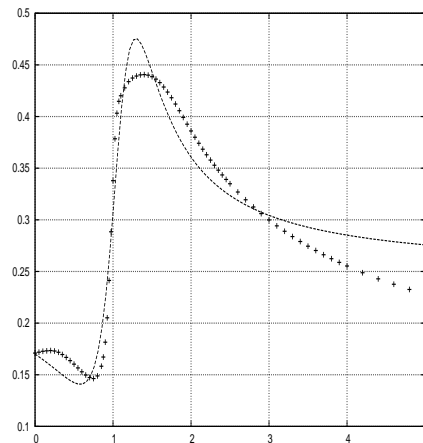
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter p_0 , p_1 , p_2 , q_0 , q_1 und q_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= 0,20311 \\ \hat{p}_1 &= -0,40871 \\ \hat{p}_2 &= 0,23956 \\ \hat{q}_0 &= 1,19486 \\ \hat{q}_1 &= -2,04764 \\ \hat{q}_2 &= 0,96345 \end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,0426762.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G5 - Grad 2

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

Wir erhöhen nun sukzessive den Zähler- wie auch den Nennergrad.

Betrachten wir nun die Funktion

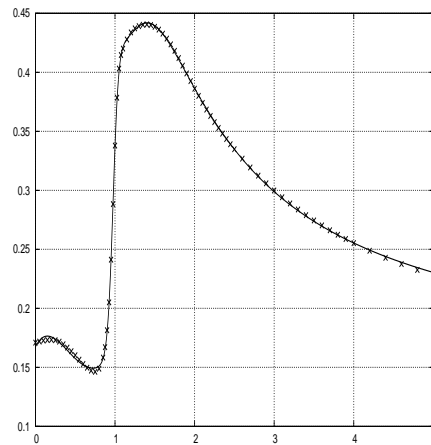
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6 + p_7x^7}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6 + q_7x^7}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ und q_7 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= 2,74524 \\ \hat{p}_1 &= 0,36402 \\ \hat{p}_2 &= -15,89570 \\ \hat{p}_3 &= 16,74480 \\ \hat{p}_4 &= 6,00420 \\ \hat{p}_5 &= -15,01320 \\ \hat{p}_6 &= 2,64985 \\ \hat{p}_7 &= 2,55726 \\ \hat{q}_0 &= 16,39520 \\ \hat{q}_1 &= -11,17340 \\ \hat{q}_2 &= -25,44960 \\ \hat{q}_3 &= 0,44715 \\ \hat{q}_4 &= 35,79450 \\ \hat{q}_5 &= 5,47099 \\ \hat{q}_6 &= -39,52110 \\ \hat{q}_7 &= 18,49980 \end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,000156841.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G5 - Grad 7

Hier ergibt der Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

Betrachten wir nun das G6-Modell. Wieder betrachten wir zuerst die Funktion

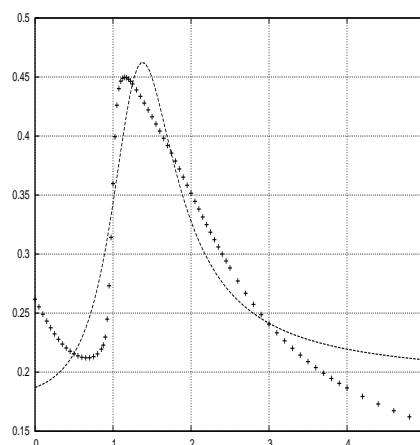
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 und q_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= -0,63575 \\ \hat{p}_1 &= 0,77866 \\ \hat{p}_2 &= -0,34605 \\ \hat{q}_0 &= -3,40074 \\ \hat{q}_1 &= 4,62265 \\ \hat{q}_2 &= -1,81395\end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,0997188.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G6 - Grad 2

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

Wie bei den anderen Modellen erhöhen wir nun sukzessive Zähler- und Nennergrad.

Betrachten wir nun die Funktion

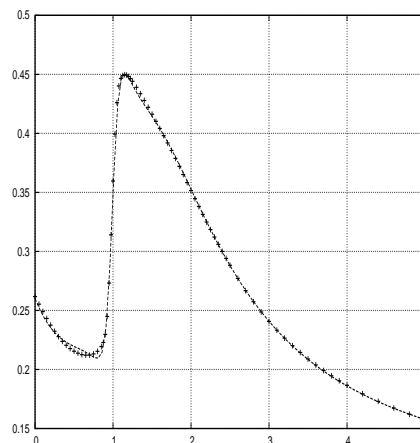
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4$ und q_5 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= 14,1395 \\ \hat{p}_1 &= -35,0454 \\ \hat{p}_2 &= 31,8026 \\ \hat{p}_3 &= -13,7839 \\ \hat{p}_4 &= 1,6474 \\ \hat{p}_5 &= 1,5636 \\ \hat{q}_0 &= 54,3712 \\ \hat{q}_1 &= -100,1130 \\ \hat{q}_2 &= 5,9034 \\ \hat{q}_3 &= 95,5927 \\ \hat{q}_4 &= -76,1232 \\ \hat{q}_5 &= 21,2964 \end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,000765239.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G6 - Grad 5

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstelle besitzt.

Betrachten wir nun das G7-Modell. Wieder betrachten wir zuerst die Funktion

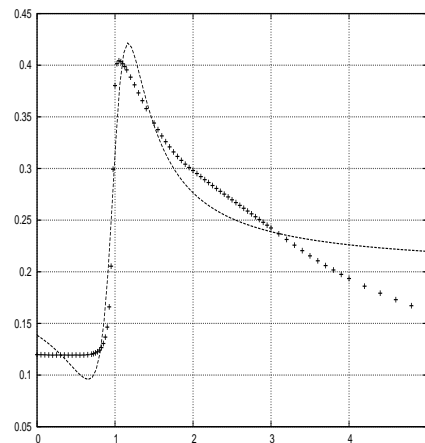
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 und q_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= 0,30194 \\ \hat{p}_1 &= -0,67847 \\ \hat{p}_2 &= 0,41344 \\ \hat{q}_0 &= 2,17881 \\ \hat{q}_1 &= -4,11590 \\ \hat{q}_2 &= 2,05459\end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,0486888.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G7 - Grad 2

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0; 5]$ keine Nullstellen besitzt.

Wie sonst auch erhöhen wir sukzessive Zähler- und Nennergrad.

Wir betrachten nun die Funktion

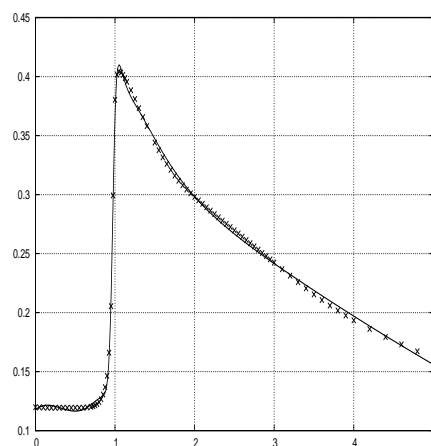
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \dots + p_{11}x^{11}}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \dots + q_{11}x^{11}}$$

Als Schätzung für die Parameter p_0, \dots, q_{11} ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{p}_0 &= 4,19970 \\
\hat{p}_1 &= -0,00637 \\
\hat{p}_2 &= -14,6281 \\
\hat{p}_3 &= 9,78184 \\
\hat{p}_4 &= 6,82649 \\
\hat{p}_5 &= -4,91083 \\
\hat{p}_6 &= -5,75349 \\
\hat{p}_7 &= 7,17414 \\
\hat{p}_8 &= 2,21628 \\
\hat{p}_9 &= -16,5239 \\
\hat{p}_{10} &= 13,11270 \\
\hat{p}_{11} &= -1,14097 \\
\hat{q}_0 &= 35,70250 \\
\hat{q}_1 &= -17,49960 \\
\hat{q}_2 &= -38,89100 \\
\hat{q}_3 &= -19,83250 \\
\hat{q}_4 &= 17,87030 \\
\hat{q}_5 &= 37,04460 \\
\hat{q}_6 &= 19,79470 \\
\hat{q}_7 &= -18,50110 \\
\hat{q}_8 &= -32,47650 \\
\hat{q}_9 &= 0,61651 \\
\hat{q}_{10} &= 14,29000 \\
\hat{q}_{11} &= 2,83057
\end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate gleich 0,00095281.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G7 - Grad 11

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

Betrachten wir nun das G8-Modell. Wieder betrachten wir zuerst die Funktion

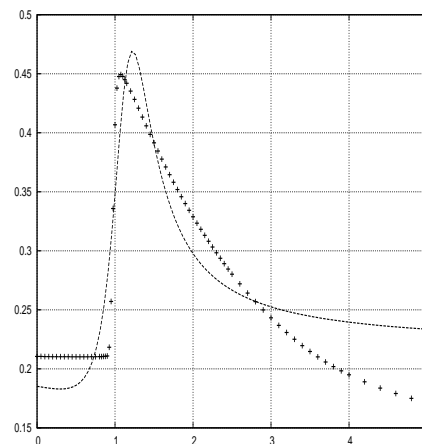
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{q_0 + q_1x + q_2x^2}$$

Als Schätzung für die unbekannt Parameter p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 und q_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= 0,2684 \\ \hat{p}_1 &= -0,4665 \\ \hat{p}_2 &= 0,2376 \\ \hat{q}_0 &= 1,4494 \\ \hat{q}_1 &= -2,4267 \\ \hat{q}_2 &= 1,0913\end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate 0,0842989.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G8 - Grad 2

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

Wir erhöhen wiederum den Zähler- und Nennergrad sukzessive.

Wir betrachten die Funktion

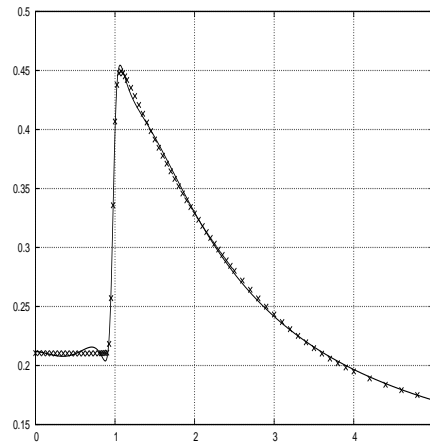
$$f(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_8x^8}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_8x^8}$$

Als Schätzung ergibt sich für die Parameter p_0, p_1, \dots, q_8 :

$$\begin{aligned}
\hat{p}_0 &= 14,02860 \\
\hat{p}_1 &= -14,95220 \\
\hat{p}_2 &= -11,18460 \\
\hat{p}_3 &= 14,43050 \\
\hat{p}_4 &= 5,95291 \\
\hat{p}_5 &= -10,12250 \\
\hat{p}_6 &= -10,64010 \\
\hat{p}_7 &= 10,90040 \\
\hat{p}_8 &= 2,22367 \\
\hat{q}_0 &= 66,17000 \\
\hat{q}_1 &= -68,44980 \\
\hat{q}_2 &= -34,31550 \\
\hat{q}_3 &= 5,16938 \\
\hat{q}_4 &= 36,14770 \\
\hat{q}_5 &= 18,48030 \\
\hat{q}_6 &= -20,88880 \\
\hat{q}_7 &= -30,33720 \\
\hat{q}_8 &= 29,61970
\end{aligned}$$

mit der Summe der Residuenquadrate gleich 0,000661182.

Hier der zugehörige Plot:



Anpassung für G8 - Grad 8

Auch hier ergibt ein Plot, dass das Nennerpolynom auf dem betrachteten Intervall $[0;5]$ keine Nullstellen besitzt.

1.6 Das zugehörige Differentialgleichungssystem

Wir beschränken uns auf die Luftwiderstandsgesetze G1 bis G8 - andernfalls müsste \mathbf{F}_d durch das entsprechende Luftwiderstandsgesetz ersetzt werden².

²Es gibt noch weitere Vorschläge für Luftwiderstandsgesetze, siehe zum Beispiel Peelen (2014)

Ist nun die Luftwiderstandskraft \mathbf{F}_d gegeben durch

$$\mathbf{F}_d = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot \mathbf{v}$$

wobei ρ die Luftdichte, S die Referenzfläche des Projektils, C_d das Luftwiderstandsgesetz, v der Betrag der Geschwindigkeit und \mathbf{v} der Geschwindigkeitsvektor ist, dann ergibt sich mit

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Geschossmasse m und der Erdbeschleunigung g das Differentialgleichungssystem

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{g}$$

zur Beschreibung der Flugbahn des Projektils, siehe McCoy (1999), S. 89.

Dabei ist C_d zu ersetzen durch das Produkt aus dem entsprechendem Luftwiderstandsgesetz und dem zugehörigen Formfaktor.

Hieraus erhalten wir nach Division durch m :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Mit der Abkürzung

$$\hat{C}_d^* = \frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d = \frac{\rho \pi C_d}{8 C}, \quad C = \frac{m}{d^2}$$

ergibt sich für das obige Differentialgleichungssystem in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v v_y - g \\ \dot{v}_z &= -\hat{C}_d^* v v_z \end{aligned}$$

Hierbei ist die Konstante C der sogenannte ballistische Koeffizient des Projektils.

Löst man dieses Differentialgleichungssystem unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ z(0) &= z_0 \\ v_x(0) &= \cos(\theta) v_0 \\ v_y(0) &= \sin(\theta) v_0 \\ v_z(0) &= \sin(\gamma) v_0 \end{aligned}$$

mit v_0 der Mündungsgeschwindigkeit des Projektils, dann erhält man als Lösung einen Ortsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, der die Position des Projektils in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Um dies zu erkennen, schreiben wir das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Wir definieren:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \\ \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \\ -\hat{C}_d^* v v_x \\ -\hat{C}_d^* v v_y - g \\ -\hat{C}_d^* v v_z \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

mit $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Offensichtlich kann man die Abbildung $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ in eine Potenzreihe entwickeln, sofern die Luftwiderstandsgesetze ebenfalls in Potenzreihen entwickelbar sind - nach den Sätzen aus dem Abschnitt über die mathematischen Grundlagen ist dann der Lösungsvektor $\mathbf{y}(t)$ ebenfalls durch eine Potenzreihe darstellbar.

Hat man entsprechende Differenzierbarkeitseigenschaften der Abbildung \mathbf{f} , dann stellt der Satz von Picard und Lindelöf sicher, dass genau eine Lösungskurve zu gegebenen Anfangsbedingungen existiert.

Die ersten drei Komponenten des Lösungsvektors ergeben dann die gesuchten Ortskoordinaten zur Zeit t , die restlichen drei Komponenten die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors.

Dieses Differentialgleichungssystem kann man normalerweise nur noch mit Hilfe eines numerischen Verfahrens lösen, insbesondere, wenn die Luftdichte ρ mit Hilfe der barometrischen Höhenformel modelliert wird.

Insbesondere bedeuten entsprechende Differenzierbarkeitseigenschaften auch, dass die zugehörigen numerischen Verfahren entsprechend hohe Konsistenz- und damit Konvergenzordnungen besitzen, siehe hierzu die Fachliteratur wie zum Beispiel Strehmel u. a. (2012), Hermann (2004) oder Hairer u. a. (2009).

Wir wollen noch anmerken - wählt man in dem obigen Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v v_y - g \\ \dot{v}_z &= -\hat{C}_d^* v v_z\end{aligned}$$

$\hat{C}_d^* = \frac{k}{v}$, wobei k eine positive Konstante ist, dann erhält man

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -k v_x \\ \dot{v}_y &= -k v_y - g \\ \dot{v}_z &= -k v_z\end{aligned}$$

Klammert man die dritte Gleichung für v_z aus, dann erhält man das Differentialgleichungssystem aus dem Beispiel vom Anfang mit seinen Lösungen

$$v_x(t) = v_x(0) \exp(-kt)$$

$$v_y(t) = \frac{g + k v_y(0)}{k} \exp(-kt) - \frac{g}{k}$$

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k} (1 - \exp(-kt))$$

und

$$y(t) = y_0 + \frac{g + k v_y(0)}{k^2} (1 - \exp(-kt)) - \frac{g}{k} t$$

1.7 Höhenabhängige Lösungen

Betrachtet man das allgemeine Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v v_y - g \\ \dot{v}_z &= -\hat{C}_d^* v v_z\end{aligned}$$

wobei nun $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ist und

$$\hat{C}_d^* = \frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d = \frac{\rho \pi C_d}{8 C}, \quad C = \frac{m}{d^2}$$

dann liegt es nahe, die Luftdichte ρ noch von der Höhe y abhängen zu lassen.

Für die Luftdichte ρ setzt man nun die barometrische Höhenformel an:

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(-0,0001036y), \quad \rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$$

siehe de Mestre (1990), S. 60.

Allerdings muss man beachten, dass die barometrische Höhenformel nur in gewissen Grenzen ihre Gültigkeit besitzt - bis in Höhen von etwa 12000 Metern, siehe hierzu zum Beispiel das Buch von Molitz und Strobel (1963).

Das so entstandene Differentialgleichungssystem ist damit nicht mehr analytisch lösbar, sondern nur noch mit den Methoden der numerischen Mathematik.

Vektoriell geschrieben lautet das Differentialgleichungssystem

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \mathbf{g} - \frac{1}{2} \rho(y) S v^2 C_d \left(\frac{v}{a} \right) \hat{\mathbf{v}}$$

wobei a die Schallgeschwindigkeit ist und $\hat{\mathbf{v}}$ der Geschwindigkeitseinheitsvektor.

Mit der Mach-zahl $M = \frac{v}{a}$ geht das System über in

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \mathbf{g} - \frac{1}{2} \rho(y) S v^2 C_d(M) \hat{\mathbf{v}}$$

1.8 Der Schuss auf geneigter Ebene

Wir wollen nun noch die Modifikation des Differentialgleichungssystems betrachten, wenn die Ebene um einen Winkel β geneigt ist - dies entspricht einer Drehung des alten Koordinatensystems um einen Winkel β mit einer Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit geht das Differentialgleichungssystem

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{g}$$

über in

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot \mathbf{v} + m \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}$$

Komponentenweise geschrieben ergibt dies:

$$m \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_x - mg \sin(\beta) \\ -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_y - mg \cos(\beta) \\ -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_z \end{pmatrix}$$

und somit nach Division durch m :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_x - g \sin(\beta) \\ -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_y - g \cos(\beta) \\ -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_z \end{pmatrix}$$

Setzen wir $\beta = 0$, dann erhalten wir wieder das vorherige Differentialgleichungssystem.

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung kann nun in ein System erster Ordnung überführt werden - die Technik wurde in den vorhergehenden Abschnitten erläutert.

Ebenfalls kann die Luftdichte ρ von der Flughöhe y abhängen - auch dieser Fall wurde bereits diskutiert.

1.9 Der Coriolis-Effekt

Um den Coriolis-Effekt in das Differentialgleichungssystem einfügen zu können, müssen die geographischen Koordinaten - die Breiten- und Längengrade - bekannt sein.

Zur Verarbeitung muss hierbei die Dezimaldarstellung vorliegen - sie erfolgt nach der Formel

$$\text{Grad}^\circ \text{Minute}' \text{Sekunde}'' = \text{Grad} + \frac{\text{Minute}}{60} + \frac{\text{Sekunde}}{3600}$$

München mit $48^\circ 8' 13,94''$ nördlicher Breite hätte damit die Dezimaldarstellung $48,133^\circ$ nördlicher Breite.

Ist nun

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

der Geschwindigkeitsvektor und sind ϕ der Breitengrad und ψ der Längengrad, dann ist die Coriolis-Beschleunigung durch die folgende Gleichung gegeben (siehe z. B. McCoy (1999), S. 178):

$$\Lambda = 2\omega \begin{pmatrix} -v_y \cos(\phi) \sin(\psi) - v_z \sin(\phi) \\ v_x \cos(\phi) \sin(\psi) + v_z \cos(\phi) \cos(\psi) \\ v_x \sin(\phi) - v_y \cos(\phi) \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

wobei $\omega = 0,00007292 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde darstellt.

$m\Lambda$ wäre somit die Coriolis-Kraft - dieser Term, dividiert durch m , wäre der Zusatzterm für das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_x - g \sin(\beta) \\ -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_y - g \cos(\beta) \\ -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_z \end{pmatrix}$$

Es ergäbe sich somit insgesamt:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_x - g \sin(\beta) \\ -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_y - g \cos(\beta) \\ -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d \cdot v \cdot v_z \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -v_y \cos(\phi) \sin(\psi) - v_z \sin(\phi) \\ v_x \cos(\phi) \sin(\psi) + v_z \cos(\phi) \cos(\psi) \\ v_x \sin(\phi) - v_y \cos(\phi) \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

1.10 Rotationseffekte

Unser Ausgangssystem

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot i \cdot C_d v v_x \\ \dot{v}_y &= -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot i \cdot C_d v v_y - g \\ \dot{v}_z &= -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot i \cdot C_d v v_z \end{aligned}$$

wollen wir jetzt um Rotationseffekte erweitern - siehe hierzu McCoy (1999), S. 190 ff., oder Carlucci und Jacobson (2008).

Diese Erweiterung beruht auf dem Drehimpulssatz - hierzu müssen wir folgende Größen definieren - siehe McCoy (1999), S. 189:

C_d	=	Luftwiderstandskoeffizient
C_L	=	Auftriebskoeffizient
C_{N_p}	=	Koeffizient für die Magnus-Kraft
C_{M_p}	=	Koeffizient für das Magnus-Moment
C_{M_q}	=	Koeffizient für die Kraft der Pitch-Dämpfung
C_{l_p}	=	Koeffizient der Spin-Dämpfung
C_{M_α}	=	Koeffizient des Überschlagsmoments

Um in den Differentialgleichungen nicht ständig die Masse wie auch die Spin-Rate mitschleppen zu müssen, bildet man folgende abgekürzte Größen:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_d &= \frac{\rho v S C_d}{2m} \\ \tilde{C}_L &= \frac{\rho v S C_L}{2m} \\ \tilde{C}_{N_p} &= \frac{\rho v S C_{N_p} p}{2m} \\ \tilde{C}_{M_p} &= \frac{\rho S d^2 C_{M_p} p}{2I_y} \\ \tilde{C}_{M_q} &= \frac{\rho v S d C_{M_q}}{2m} \\ \tilde{C}_{l_p} &= \frac{\rho v S d^2 C_{l_p} p}{2I_y} \\ \tilde{C}_{M_\alpha} &= \frac{\rho v S d C_{M_\alpha}}{2I_y}\end{aligned}$$

wobei

$$p = \frac{I_y}{I_x} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{x})$$

die axiale Spin-Rate des Projektils

$$v_1 = V_1 - W_1, v_2 = V_2 - W_2, v_3 = V_3 - W_3, v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3}{v}$$

der Kosinus des Anstellwinkels des Projektils ist, W_i , $i = 1, 2, 3$ die Komponenten der Windgeschwindigkeit und $\dot{x}_i = v_i$.

V_i sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Projektils bzgl. eines erdfesten Koordinatensystem, v_i die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Projektils bzgl der Luft.

I_x und I_y sind die Trägheitsmomente des Projektils in x - bzw. y -Richtung des Projektils.

Hiermit können wir dann folgende sechs gewöhnliche Differentialgleichungen aufstellen:

$$\dot{v}_1 = -\tilde{C}_d v_1 + \tilde{C}_L (v^2 x_1 - v v_1 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{N_p} (x_2 v_3 - x_3 v_2) + \tilde{C}_{N_q} (h_2 x_3 - h_3 x_2) + g_1$$

$$\dot{v}_2 = -\tilde{C}_d v_2 + \tilde{C}_L (v^2 x_2 - v v_2 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{N_p} (x_3 v_1 - x_1 v_3) + \tilde{C}_{N_q} (h_3 x_1 - h_1 x_3) + g_2$$

$$\dot{v}_3 = -\tilde{C}_d v_3 + \tilde{C}_L (v^2 x_3 - v v_3 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{N_p} (x_1 v_2 - x_2 v_1) + \tilde{C}_{N_q} (h_1 x_2 - h_2 x_1) + g_3$$

$$\dot{h}_1 = \tilde{C}_{I_p} x_1 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_2 x_3 - v_3 x_2) + \tilde{C}_{M_p} (v_1 - v x_1 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{M_q} \left(h_1 - \frac{I_x p}{I_y} x_1 \right)$$

$$\dot{h}_2 = \tilde{C}_{I_p} x_2 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_3 x_1 - v_1 x_3) + \tilde{C}_{M_p} (v_2 - v x_2 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{M_q} \left(h_2 - \frac{I_x p}{I_y} x_2 \right)$$

$$\dot{h}_3 = \tilde{C}_{I_p} x_3 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \tilde{C}_{M_p} (v_3 - v x_3 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{M_q} \left(h_3 - \frac{I_x p}{I_y} x_3 \right)$$

wobei g_1 , g_2 und g_3 die Komponenten des Gravitationsvektors sind.

Dabei ist $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^T$ und \mathbf{H} der Drehimpulsvektor - \mathbf{h} ist der Drehimpulsvektor \mathbf{H} durch I_y dividiert.

Beachtet man noch, dass $\dot{v}_i = \dot{V}_i$, dann nehmen die sechs Differentialgleichungen die folgende Form an:

$$\dot{V}_1 = -\tilde{C}_d v_1 + \tilde{C}_L (v^2 x_1 - v v_1 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{N_p} (x_2 v_3 - x_3 v_2) + \tilde{C}_{N_q} (h_2 x_3 - h_3 x_2) + g_1$$

$$\dot{V}_2 = -\tilde{C}_d v_2 + \tilde{C}_L (v^2 x_2 - v v_2 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{N_p} (x_3 v_1 - x_1 v_3) + \tilde{C}_{N_q} (h_3 x_1 - h_1 x_3) + g_2$$

$$\dot{V}_3 = -\tilde{C}_d v_3 + \tilde{C}_L (v^2 x_3 - v v_3 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{N_p} (x_1 v_2 - x_2 v_1) + \tilde{C}_{N_q} (h_1 x_2 - h_2 x_1) + g_3$$

$$\dot{h}_1 = \tilde{C}_{I_p} x_1 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_2 x_3 - v_3 x_2) + \tilde{C}_{M_p} (v_1 - v x_1 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{M_q} \left(h_1 - \frac{I_x p}{I_y} x_1 \right)$$

$$\dot{h}_2 = \tilde{C}_{I_p} x_2 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_3 x_1 - v_1 x_3) + \tilde{C}_{M_p} (v_2 - v x_2 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{M_q} \left(h_2 - \frac{I_x p}{I_y} x_2 \right)$$

$$\dot{h}_3 = \tilde{C}_{I_p} x_3 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \tilde{C}_{M_p} (v_3 - v x_3 \cos(\alpha)) + \tilde{C}_{M_q} \left(h_3 - \frac{I_x p}{I_y} x_3 \right)$$

Auch dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung kann man offensichtlich in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführen mit der üblichen Technik.

Um ein derartiges System erster Ordnung mit dem Mitteln der numerischen Mathematik zu lösen, benötigen wir Kenntnis über die Konstanten

$$\begin{aligned}\tilde{C}_d &= \frac{\rho v S C_d}{2m} \\ \tilde{C}_L &= \frac{\rho v S C_L}{2m} \\ \tilde{C}_{N_p} &= \frac{\rho v S C_{N_p} p}{2m} \\ \tilde{C}_{M_p} &= \frac{\rho S d^2 C_{M_p} p}{2I_y} \\ \tilde{C}_{M_q} &= \frac{\rho v S d C_{M_q}}{2m} \\ \tilde{C}_{l_p} &= \frac{\rho v S d^2 C_{l_p} p}{2I_y} \\ \tilde{C}_{M_\alpha} &= \frac{\rho v S d C_{M_\alpha}}{2I_y}\end{aligned}$$

Löst man das System, so erhält man neben der Flugbahn auch die seitliche Abweichung - allerdings ist dazu die Kenntnis der angesprochenen Konstanten erforderlich.

Diese Konstanten sind wohl eher schwer erhältlich, man kann sie aber aus Flugbahndaten schätzen, indem man die Bahnkurven in Abhängigkeit von den obigen Konstanten jeweils berechnet und ein nichtlineares Ausgleichsproblem löst - die Lösung ergibt dann optimale Schätzungen für die unbekannt Konstanten.

Ist dieser Weg verschlossen, ist zumindest aber eine Näherung für die seitliche Abweichung verfügbar, siehe das Buch von Litz (2011), S. 87.

Hierzu benötigt man

- eine Schätzung für den sogenannten Stabilitätsfaktor
- eine Abschätzung für die seitliche Abweichung, den sogenannten drift - in diesen geht der Stabilitätsfaktor ein

Im Buch von Litz (2011), S. 574, ist der Stabilitätsfaktor angegeben - leider in amerikanischen Einheiten. Schon angenehmer ist die Angabe im Buch von Peelen (2014), S. 450 - hier ist der Stabilitätsfaktor in das metrische System überführt:

$$SG = \frac{7587000 \cdot m_G}{D_a^2 \cdot d_G^3 \cdot l_a (1 + l_a^2)}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 m_G &= \text{Masse des Geschosses in Gramm} \\
 d_G &= \text{Durchmesser in Millimeter} \\
 l_d &= \text{Geschosslänge in Durchmessern} \\
 D_d &= \text{Dralllänge in Durchmessern}
 \end{aligned}$$

Beispiel 5

Gegeben ein 10,9 Gramm schweres Geschoss von 7.82 mm Durchmesser und einer Länge von $3.98d$, ein Lauf mit einer Dralllänge von $39,0d$ (entspricht 305 Millimetern oder einem Drall von 1 : 12), dann ergibt dies

$$SG = \frac{7587000 \cdot 10,9}{39,0^2 \cdot 7,82^3 \cdot 3,98(1 + 3,98^2)} = 1,70$$

Die obige Formel wurde von Donald Miller entwickelt - er empfiehlt für sichere Stabilität des Flugverhaltens des Projektils einen Wert von 2,0, wogegen Bryan Litz einen Wert als mindestens 1,4 als angemessen ansieht.

Für Werte zwischen 1,0 und 1,4 redet Miller von marginaler Stabilität, siehe Litz (2011), S. 138, und Werte unterhalb von 1,0 bedeuten Instabilität.

Da die Formel für eine Geschossgeschwindigkeit von 2800 feet per second entwickelt wurde, gibt Miller auch Korrekturformeln an für Geschwindigkeiten, die hiervon abweichen - siehe das Buch von Litz (2011), S. 575. Der Umrechnungsfaktor von feet per second auf Meter pro Sekunde fällt dabei heraus.

Mit Hilfe dieses Stabilitätsfaktors SG ist es möglich, eine Abschätzung für die seitliche Abweichung, den drift, zu geben:

$$drift = 3,175 \cdot (SG + 1,2) \cdot t^{1,83}$$

wobei nun t die Flugzeit ist - der Drift, die seitliche Abweichung, wird dabei in Zentimetern angegeben.

Bei einem Rechtsdrall ist die Abweichung nach rechts, demzufolge ist das Ergebnis noch mit einem Minuszeichen zu versehen, bei einem Linksdrall ist die Abweichung nach links, somit ist das Ergebnis positiv.

Im Buch von Litz (2011), S. 90 ff., sind Vergleiche der Formel zu finden zwischen den Ergebnissen eines 6-Freiheitsgrade-Modells einerseits und den Ergebnissen durch die obigen Formeln andererseits.

In Anbetracht der Einfachheit der Formel für den Drift ist die Genauigkeit nicht allzu schlecht.

Kapitel 2

Die Programme

2.1 Die verwendete Software

Als Software wurde die Programmiersprache Octave verwendet - sie ist frei verfügbar und bietet eine Unzahl an Programmen an, welche zur Lösung mathematischer Probleme eingesetzt werden können.

Weiterhin ist sie relativ leicht zu erlernen - es gibt eine Reihe von Tutorials im Internet und manche Literatur (zum Beispiel Thuselt und Gennrich (2013) und Quarteroni u. a. (2014) oder auch Hansen (2011)).

Ebenso gibt es ein umfangreiches Manual, siehe Eaton u. a. (2008) - ein Blick auf die Webpage von GNU Octave ist auf jeden Fall ein "Augenöffner"¹.

Einziger Nachteil - in Sachen GUI's ist die Sprache leider sehr spartanisch ausgerüstet.

So bietet Octave

- *lsode*, ein Programmpaket, welches die Lösung von Differentialgleichungssystemen ermöglicht, insbesondere von steifen Differentialgleichungssystemen
- *fminunc*, ein Programmpaket, welches die Minimierung von Funktionen mehrerer Veränderlicher beinhaltet
- *fzero* und *fsolve*, Programme, welche Nullstellenprobleme lösen - das erste Programm für eindimensionale, das zweite Programm für mehrdimensionale Probleme
- *fminbnd*, eine Funktion, welche eindimensionale Minimierungsprobleme löst

Sicherlich kann man derartige Programme auch in Matlab finden - für Matlab benötigt man allerdings eine Lizenz.

Weiterhin bietet Octave eine Unmenge an Möglichkeiten, einen Plot anzufertigen - früher stützte sich Octave auf Gnuplot, heutzutage kann auch das Paket fltk angewählt werden.

Dies bezieht sich auf zweidimensionale wie auch auf dreidimensionale Plots (diese sind für

¹es scheint mittlerweile ein neueres, noch umfangreicheres Manual zu geben

unsere Zwecke eher uninteressant).

2.2 Die beiden Programme zur zweidimensionalen Flugbahnbe- rechnung

Ursprünglich wurden zwei Programme erstellt, welche eine zweidimensionale Betrachtungsweise erlaubten:

- Luftw_modell.m : dieses basiert auf der Kenntnis des Formfaktors und berechnet zu
 - vorgegebenem Kaliber (genauer Geschossdurchmesser, siehe Peelen (2014))
 - vorgegebener Mündungsgeschwindigkeit
 - vorgegebener Fleckschussweite
 - vorgegebener maximaler Schussweite (muss größer als die Fleckschussweite sein)
 - vorgegebenem Formfaktor
 - vorgegebener Höhe des Zielfernrohrs über der Laufachse
 - vorgegebenem Luftwiderstandsmodell
 - und gegebenenfalls vorgegebenem filename zur Abspeicherung

die Flugbahn - d. h. für Flugweiten in Schritten von 10 Metern bis zur maximalen Flugweite die zugehörige Flughöhe.

- Luftw_modell_bc.m : dieses basiert auf der Kenntnis des ballistischen Koeffizienten und berechnet zu
 - vorgegebenem Kaliber (genauer Geschossdurchmesser, siehe Peelen (2014))
 - vorgegebener Mündungsgeschwindigkeit
 - vorgegebener Fleckschussweite
 - vorgegebener maximaler Schussweite (muss größer als die Fleckschussweite sein)
 - vorgegebenem ballistischen Koeffizienten
 - vorgegebener Höhe des Zielfernrohrs über der Laufachse
 - vorgegebenem Luftwiderstandsmodell
 - und gegebenenfalls vorgegebenem filename zur Abspeicherung

die Flugbahn - d. h. für Flugweiten in Schritten von 10 Metern bis zur maximalen Flugweite die zugehörige Flughöhe. Hierbei ist anzumerken, dass der ballistische Koeffizient zu dem gewählten Luftwiderstandsmodell passen muss - siehe zum Beispiel das Buch von Litz (2011).

Insbesondere gibt das erste Programm natürlich den Hochschuss auf 100 Meter Entfernung aus - sollte zum Beispiel ein Fleckschuss von 200 Metern gewählt worden sein.

Dies ergibt als Konsequenz, dass mit Hilfe des Hochschusses auf 100 Metern die notwendige Verstellung des Zielfernrohres berechnet werden kann (da die Hersteller die Verstellung meistens auf 100 Meter beziehen, aber jeder Hersteller seine eigenen Vorstellungen hat, ist eine einheitliche Behandlung nicht möglich).

Beispiel 6

Hier ein Ausschnitt aus einer typischen Ausgabe des Programms

Flugweite (Meter)	Flughöhe (Meter)	Geschwindigkeit	Energie (Joule)
0.000	-0.040	930.000	1729.800
10.000	-0.018	920.368	1694.156
20.000	+0.003	910.784	1659.054
30.000	+0.023	901.246	1624.489
40.000	+0.042	891.756	1590.459
50.000	+0.059	882.315	1556.958
60.000	+0.075	872.921	1523.983
70.000	+0.090	863.577	1491.529
80.000	+0.103	854.281	1459.592
90.000	+0.116	845.035	1428.168
100.000	+0.126	835.838	1397.251
110.000	+0.136	826.691	1366.837
120.000	+0.144	817.594	1336.921
130.000	+0.150	808.548	1307.498
140.000	+0.155	799.551	1278.564
150.000	+0.159	790.605	1250.113
160.000	+0.161	781.710	1222.140
170.000	+0.161	772.865	1194.639
180.000	+0.159	764.070	1167.607
190.000	+0.156	755.327	1141.036
200.000	+0.152	746.633	1114.923
210.000	+0.145	737.991	1089.261
220.000	+0.137	729.399	1064.045
230.000	+0.127	720.857	1039.269
240.000	+0.115	712.365	1014.929
250.000	+0.101	703.924	991.018
260.000	+0.085	695.533	967.532
270.000	+0.067	687.191	944.464
280.000	+0.047	678.900	921.809
290.000	+0.024	670.657	899.562
300.000	-0.000	662.464	877.717
310.000	-0.027	654.320	856.269

Die Waffe wäre hier auf 300 Meter Fleck eingeschossen - verstellt man das Zielfernrohr somit so, dass auf 100 Meter ein Hochschuss von 12,6 Zentimeter vorhanden ist, dann ist der Fleckschuss auf 300 Meter gesichert.

Bedeutet somit 1 Klick 1 Zentimeter auf 100 Meter, so würden ca. 13 Klicks genügen, um auf 300 Meter Fleck schießen zu können.

Im Buch von Litz (2011) sind für eine Unzahl von Kalibern und Geschossen die zugehörigen Formfaktoren angegeben - man kann somit an Informationen über die Formfaktoren für das entsprechende Geschoss gelangen.

Weiterhin sind in den Katalogen der Hersteller oft die ballistischen Koeffizienten angegeben - hier ist allerdings die Frage, auf welches Luftwiderstandsgesetz sich diese Koeffizienten beziehen. Zur Berechnung der Flughöhen kann man dann Luftw_modell_bc.m verwenden.

Da Luftw_modell.m den Benutzer nach dem Formfaktor fragt, liegt es nahe, den Formfaktor zu variieren und die Ausgabewerte mit den Herstellerdaten - sofern verfügbar - zu vergleichen.

In der Tat - hier ein Beispiel, was zu beobachten ist:

Beispiel 7

Wir betrachteten das Produkt D46 (dahinter verbirgt sich das Kaliber .308 des Herstellers Lapua) mit den folgenden ballistischen Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie):

0m	100m	200m	300m	600m	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815

Das Geschossgewicht beträgt hier 185 Grains oder 12 Gramm.

Für dieses Produkt ergeben sich folgende Flughöhen (nach Herstellerangaben):

	100m	200m	300m	600m	800m
100m	0	-157	-547	-3588	-7908
300m	182	207	0	-2495	-6450
600m	598	1039	1247	0	-3123

und berechnet:

	100m	200m	300m	600m	800m
100m	0	-157	-541	-3495	-7589
300m	180	204	0	-2412	-6146
600m	582	1008	1206	0	-2930

Wiederum beinhaltet die erste Spalte die Fleckschussweiten.

Der Formfaktor wurde dem Buch von Litz (2011), Seite 530, entnommen zu 1,081.

Man kann nun versuchen, den Formfaktor zu optimieren - in der Tat ergibt sich nach ein wenig Probieren mit dem Formfaktor 1,15 folgende Tabelle:

	100m	200m	300m	600m	800m
100m	0	-158	-550	-3597	-7904
300m	183	208	0	-2497	-6437
600m	599	1040	1249	0	-3108

In der Tat ist ein gewisses Verbesserungspotential vorhanden.

Nun ist es sicherlich mühselig, durch Probieren einen besseren Formfaktor zu finden.

Es liegt nahe, diesen Vorgang zu automatisieren.

2.3 Drei Programme zur Schätzung des Formfaktors

Wie im vorhergehenden Abschnitt angedeutet, wurden drei Programme geschrieben, um den optimalen Formfaktor zu bestimmen - hierzu gibt es ein separates Dokument, in dem die zugrundeliegende Mathematik beschrieben ist.

Es handelt sich hierbei um die Programme

- `schaetzung_ffg1.m` : schätzt den Formfaktor unter der Voraussetzung, dass die Flugweiten und die zugehörigen Flughöhen bekannt sind, wobei das Luftwiderstandsgesetz **G1** unterstellt wird.
- `schaetzung_ffg7.m` : schätzt den Formfaktor unter der Voraussetzung, dass die Flugweiten und die zugehörigen Flughöhen bekannt sind, wobei das Luftwiderstandsgesetz **G7** unterstellt wird.
- `schaetzung_ffv0.m` : schätzt den Formfaktor unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeiten und die zugehörigen Flugweiten bekannt sind, wobei das Luftwiderstandsgesetz **G7** unterstellt wird.

Da das Schätzverfahren auf der Minimierung eines Funktionals beruht (im Prinzip die Summe der Abstandsquadrate), gibt jedes dieser Programme sowohl den Wert des Funktionals aus wie auch den optimalen Formfaktor.

Mit dem so gewonnenen optimierten Formfaktor kann dann natürlich die Flugbahnberechnung durchgeführt werden, d. h. das Differentialgleichungssystem gelöst werden.

Beispiel 8

Die Munition mit dem Produkt-Code GB528 von Lapua (Kaliber .338 Lapua Magnum) hat folgende ballistische Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie):

0m	100m	200m	300m	600m	800	1000m
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223

Das Geschossgewicht beträgt hier 300 Grains oder 19,4 Gramm.

Für dieses Produkt ergeben sich folgende Flughöhen (nach Herstellerangaben):

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	-117	-413	-2583	-5231	-9289
300m	136	155	0	-1710	-4146	-7932
600m	421	725	855	0	-1865	-5082

und berechnet:

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	-117	-406	-2506	-5178	-9169
300m	135	154	0	-1694	-4094	-7814
600m	418	719	847	0	-1836	-4992

Auch hier beinhaltet die erste Spalte die Fleckschussweiten.

Der Formfaktor wurde dem Buch von Litz (2011), Seite 557, entnommen zu 0,956.

Optimieren wir nun den Formfaktor, so erhalten wir hierfür den Wert 0,98351, und es ergibt sich folgende Tabelle nach dem Lösen des Differentialgleichungssystems:

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	-117	-408	-2526	-5233	-9297
300m	136	155	0	-1710	-4145	-7936
600m	421	725	855	0	-1865	-5086

Die Rechnungen wurden mit dem Programm `schaetzung_ffg7.m` durchgeführt.

Es ist sehr einfach, die Programme um weitere Luftwiderstandsgesetze zu erweitern - damit eröffnet sich eine elegante Möglichkeit, unter konkurrierenden Luftwiderstandsgesetzen das passendste Luftwiderstandsgesetz auszuwählen - dasjenige wird letztlich akzeptiert, für welches das zugehörige Funktional den kleinsten Wert annimmt.

Es macht auch Sinn - das Funktional ist im Prinzip nichts anderes als ein Abstand der Lösungskurve von den Daten. Die Lösungskurve hängt vom Luftwiderstandsgesetz ab, damit erhält man nach der Minimierung einen deutlichen Hinweis, welches Luftwiderstandsgesetz am besten zu den Daten passt.

Aus mathematischer Sicht liegt es nahe, das Differentialgleichungssystem zu erweitern - bis hin zu Rotationseffekten. Damit erhöht sich gegebenenfalls auch die Anzahl der zu schätzenden Parameter - prinzipiell ist dies aber kein Problem, sofern geeignete Daten vorhanden sind.

Dies aber eröffnet aber die prinzipielle Möglichkeit, auch Konstanten wie die Spindämpfungskonstante, die Liftkonstante etc., somit die Konstanten in einem 6-Freiheitsgrade-Modell zu schätzen.

2.4 Die beiden Programme zur dreidimensionalen Flugbahnberechnung

Da die vorhergehenden Programme nur Flugweiten und Flughöhen betrachten konnten, liegt es nahe, die Berechnungen um eine weitere Dimension zu erweitern.

Aus mathematischer Sicht betrachten wir damit dreidimensionale Probleme, d. h. die Lösungskurven $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ sind damit dreidimensional.

In diesem Fall ist es mindestens möglich, zumindest einen konstanten Seitenwind mit in die Betrachtungen einzubeziehen oder zum Beispiel auch den Coriolis-Effekt.

Da je nachdem entweder der Formfaktor oder der ballistische Koeffizient als bekannt vorausgesetzt wird bzw. kann, gibt es zwei derartiger Programme:

- Luftw_modell3d.m : neben den Größen, welche in der zweidimensionalen Variante Luftw_modell.m abgefragt werden, fragt dieses Programm auch ab:
 - den Geländewinkel
 - die Komponenten des Seitenwindes w_x , w_y und w_z (nur konstanter Wind)
 - ob die geographische Länge und Breite bekannt sind - damit kann der Coriolis-Effekt berechnet werden. Wenn ja, dann fragt das Programm die geographischen Koordinaten ab - sie werden in Dezimalschreibweise erwartet (die Umrechnungsformel ist mit angegeben)
 - ob die Dralllänge und die Geschosslänge bekannt sind (siehe hierzu das Buch von Litz (2011), dort sind für viele Geschosse die Geschosslängen angegeben, allerdings in inch) - damit kann die seitliche Abweichung aufgrund der Rotation abgeschätzt werden. Im Buch von Litz (2011) ist eine Näherungsformel für die seitliche Abweichung angegeben.
- Luft_modell_bc3d.m : dieses ist die dreidimensionale Variante von Luftw_modell3d.m, welche anstelle des Formfaktors den ballistischen Koeffizienten abfragt.

Bei beiden Varianten kann der Anwender wählen, welche der Kombinationen er berechnet haben möchte (zum Beispiel nur den Seitenwind und sonst nichts; oder nur den Coriolis-Effekt, aber keinen Seitenwind; oder Seitenwind und Coriolis-Effekt) bzw. welche Kombination oder ob er auch eine Kompensation berechnet haben möchte - zum Beispiel wäre vorstellbar, dass der Anwender wissen möchte, wie groß der Vorhalt bei konstant 5 Meter pro Sekunde Seitenwind sein muss, damit er auf 600 Meter Entfernung Fleck schießen kann.

Dabei können sich die einzelnen Effekte unter Umständen gegenseitig kompensieren - zum Beispiel der Seitenwind bei entsprechender Geschwindigkeit und der Effekt durch die Rotation.

Hier ein Beispiel für eine typische Ausgabe:

Beispiel 9

Flugweite (Meter)	Flughöhe (Meter)	Seitenabw. (Meter)	Geschwindigkeit	Energie (Joule)
0.000	-0.050	0.000	870.000	4919.850
10.000	-0.039	0.000	864.428	4857.027
20.000	-0.029	0.001	858.872	4794.803
30.000	-0.021	0.002	853.335	4733.174
40.000	-0.013	0.003	847.815	4672.137
50.000	-0.008	0.005	842.313	4611.690
60.000	-0.003	0.007	836.828	4551.829
70.000	-0.000	0.009	831.361	4492.550
80.000	+0.001	0.012	825.912	4433.851
90.000	+0.001	0.015	820.481	4375.728
100.000	+0.000	0.019	815.067	4318.177
110.000	-0.003	0.023	809.672	4261.196
120.000	-0.007	0.028	804.294	4204.780
130.000	-0.013	0.033	798.935	4148.927
140.000	-0.020	0.038	793.593	4093.633
150.000	-0.029	0.044	788.269	4038.893
160.000	-0.040	0.050	782.963	3984.706
170.000	-0.052	0.056	777.676	3931.066
180.000	-0.066	0.063	772.406	3877.971
190.000	-0.081	0.071	767.154	3825.417
200.000	-0.098	0.079	761.921	3773.400

Der Schütze müsste somit auf 100 Meter 19 Millimeter Seitenabweichung über das Zielfernrohr kompensieren - dies wären bei 1 Zentimeter pro Klick auf 100 Meter etwa 2 Klicks nach rechts.

Bei beiden Programmen sind zur Zeit nur die beiden Luftwiderstandsgesetze G1 und G7 verfügbar - im Fall von G1 ist die seitliche Abweichung nicht eingefügt, anscheinend ist die Näherung für die seitliche Abweichung aus dem Buch von Litz (2011) nur für das Luftwiderstandsgesetz G7 gültig (?).

Weitere Luftwiderstandsgesetze können leicht installiert werden - aufgrund der Programmierung eine Sache von Copy und Paste.

Ebenso ist eine Erweiterung auf das 6-Freiheitsgrade-Modell wie auch auf das 4-Freiheitsgrade-Modell möglich - dazu müssten allerdings die hierzu notwendigen Konstanten (wie zum Beispiel die Konstante für die Spindämpfung oder den Lift) bekannt gemacht werden bzw. sein.

Der Arbeitsaufwand hierzu ist sicherlich eher recht überschaubar.

Wie bei den beiden zweidimensionalen Varianten ist auch hier zur Zeit kein GUI verfügbar - es schmälert allerdings nicht die Schlagkraft der Programme: Man kann sich ein gewisses Schmunzeln kaum verkneifen, wenn man mit den Programmen feststellt, dass der vom Hersteller für gewisse Büchsenpatronen angegebene ballistische Koeffizient wohl zum Luftwiderstandsgesetz G1 gehört, obwohl in dieser Situation das Luftwiderstandsgesetz G7 viel passender wäre - die Programme zeigen es anhand seiner Daten sehr deutlich ...

Da GUI's sicherlich heutzutage Stand der Technik sind, wäre zu überdenken, inwieweit die Programme in Matlab transferiert werden sollten - da Octave der Programmiersprache Matlab sehr ähnlich ist, sollte dieser Übergang nicht zu schwierig sein.

2.5 Graphik

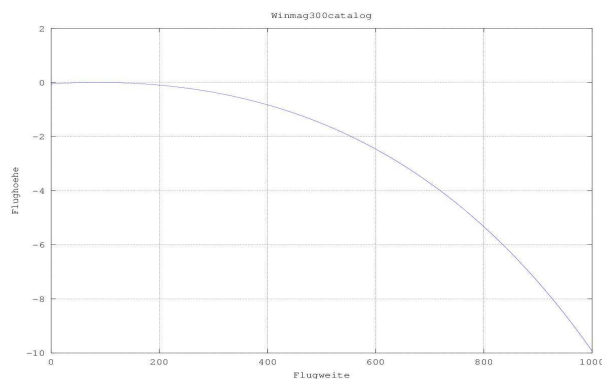
Bei den zwei- wie auch bei den dreidimensionalen Varianten sind Plots verfügbar und werden automatisch erstellt:

- bei den zweidimensionalen Varianten wird ein Plot erzeugt, bei dem die Flughöhe in Abhängigkeit von der Flugweite geplottet wird, der Plot wird als jpg-Graphik abgespeichert unter dem Filename, der zuvor angegeben wurde
- bei den dreidimensionalen Varianten wird nicht nur die Flughöhe in Abhängigkeit von der Flugweite geplottet, sondern auch noch die Seitenabweichung in Abhängigkeit von der Flugweite - beide Plots werden unter dem Filename gespeichert, der zuvor angegeben wurde (der erste Plot hat zusätzlich die Bezeichnung *hoehe*, der zweite Plot die Bezeichnung *seite* an den Filename angefügt, durch “_“ getrennt). Zum Beispiel: *DMR151_seite.jpg* und *DMR151_hoehe.jpg*, wenn *DMR151* der Filename war.

Auch diese beiden Plots werden als jpg-Graphik abgespeichert.

Aufgrund des Graphik-Formats ist eine Weiterverarbeitung mühelos möglich - zum Beispiel eine Umwandlung in eine eps-Datei, um diese in ein LaTeX-Dokument einzubetten.

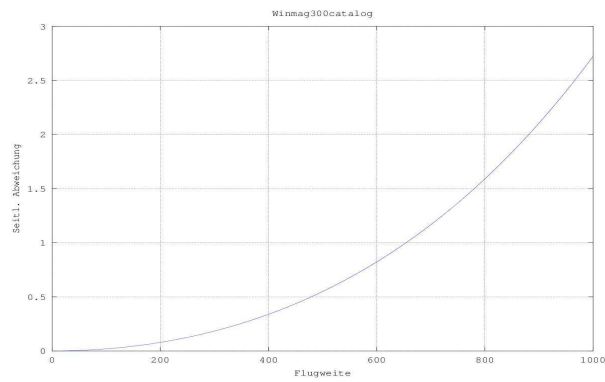
Hier zwei Beispiele:



Flughöhe für .300 Win Mag

Dies ist der Standardplot im zweidimensionalen Fall.

Im dreidimensionalen Fall kommt noch der nachfolgende Plot hinzu:



Seitenabweichung für .300 Win Mag

Diese beiden Plots werden im dreidimensionalen Fall standardmäßig erzeugt und entsprechend - wie besprochen - abgespeichert, neben der Text-Datei mit den numerischen Ergebnissen.

Literaturverzeichnis

- [Anderson 2011] ANDERSON, J. D.: *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 2011
- [Bates und Watts 2007] BATES, D. M. ; WATTS, D.: *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. Wiley, 2007
- [Boyce und DiPrima 1995] BOYCE, W. E. ; DiPRIMA, R. C.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995
- [Burg u. a. 1997] BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. I*. B. G. Teubner Stuttgart, 1997
- [Carlucci und Jacobson 2008] CARLUCCI, D. E. ; JACOBSON, S. S.: *Ballistics Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press, 2008
- [Eaton u. a. 2008] EATON, J. W. ; BATEMAN, D. ; HAUBERG, S.: *GNU Octave Manual Version 3*. Network Theory Limited, 2008
- [Erwe 1964] ERWE, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. BI Hochschultaschenbücher Bd. 19, 1964
- [Fontanella 2007] FONTANELLA, J. J.: *The Physics of Basketball*. The John Hopkins University Press, 2007
- [Hairer u. a. 2009] HAIRER, E. ; NØRSETT, S. P. ; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer, 2009
- [Hansen 2011] HANSEN, J. s.: *GNU Octave Beginner's Guide*. PACKT Publishing, 2011
- [Hermann 2004] HERMANN, M.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Oldenbourg Verlag, 2004
- [Hitchcock 1935] HITCHCOCK, H. P.: Resistance Functions of Various Types of Projectiles / Ballistic Research Laboratories. 1935 (27). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland
- [Hitchcock 1939] HITCHCOCK, H. P.: A Study of Form Factors of Spinning Projectiles / Ballistic Research Laboratories. 1939 (166). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland
- [Hitchcock 1942] HITCHCOCK, H. P.: Form Factors of Projectiles / Ballistic Research Laboratories. 1942 (284). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland
- [Hitchcock 1947, revised 1952] HITCHCOCK, H. P.: Aerodynamic Data for Spinning Projectiles / Ballistic Research Laboratories. 1947, revised 1952 (620). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland

- [Hitchcock 1951] HITCHCOCK, H. P.: Table of Form Factors of Projectiles / Ballistic Research Laboratories. 1951 (564). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland
- [Hitchcock 1952] HITCHCOCK, H. P.: Bibliography of Tables of Drag and Related Functions / Ballistic Research Laboratories. 1952 (1630). – Forschungsbericht. Aberdeen Proving Ground, Maryland
- [Kamke 1969] KAMKE, E.: *Differentialgleichungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1969
- [Litz 2011] LITZ, B.: *Applied Ballistics for Long-Range Shooting*. Applied Ballistics, LLC, 2011
- [Mangoldt und Knopp 1974] MANGOLDT, H. ; KNOPP, K.: *Einführung in die Höhere Mathematik Bd. 2*. Hirzel Verlag, 1974
- [McCoy 1999] MCCOY, R. L.: *Modern Exterior Ballistics*. Schiffer Military History, 1999
- [de Mestre 1990] MESTRE, N. de: *The Mathematics of Projectiles in Sport*. Cambridge University Press, 1990
- [Molitz und Strobel 1963] MOLITZ, H. ; STROBEL, R.: *Äußere Ballistik*. Springer, 1963
- [Nielsen 1960] NIELSEN, J.: *Missile Aerodynamics*. McGraw-Hill, 1960
- [Peelen 2006] PEELEN, J.: *A Look at Drag Models in Old Small Arms Firing Tables*. Books on Demand GmbH, 22848 Norderstedt, 2006
- [Peelen 2014] PEELEN, J.: *Ballistik kleiner Kaliber: der Luftwiderstand*. Verlagshaus Monsenstein und Vannerdat OHG Münster, 2014
- [Quarteroni u. a. 2014] QUARTERONI, A. ; SALERI, F. ; GERVASIO, P.: *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Springer, 2014
- [Schweizer 2013] SCHWEIZER, B.: *Partielle Differentialgleichungen*. Springer Spektrum, 2013
- [Strehmel u. a. 2012] STREHMEL, K. ; WEINER, R. ; PODHAISKY, H.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Springer, 2012
- [Thuselt und Gennrich 2013] THUSELT, F. ; GENNRICH, F. P.: *Praktische Mathematik mit MATLAB, Scilab und Octave*. Springer Spektrum, 2013
- [Wesson 2002] WESSON, J.: *The Science of Soccer*. IOP Publishing Ltd, 2002
- [Wesson 2009] WESSON, J.: *The Science of Golf*. Oxford University Press, 2009

Index

Asymptote, 37

ballistischer Koeffizient, 35, 49

ballistisches Koordinatensystem, 8

barometrische Höhenformel, 51

Drift, 57

Einhüllende, 18

einparametrische Kurvenschar, 17

Envelope, 18

Flughöhe, 9

Flugweite, 9

gebrochen rationale Funktion, 36

Geländewinkel, 12

geneigte Ebene, 12

Hüllkurve, 18

lineares Luftwiderstandsgesetz, 21

Luftwiderstand, 21

nichtlineares Regressionsproblem, 38

Seitenwind, 16

Sicherheitsparabel, 17

Stabilitätsfaktor, 57

Trennung der Variablen, 4

