Flachbahntrajektorien - Kleinste-Quadrate-Schätzung der Konstanten k_1, k_2 und k_3 in den drei populären Ansätzen

Prof. Dr. Andreas Rudolph
Universität der Bundeswehr
München
Institut für Mathematik und Informatik
FB BW
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg
Email: Andreas.Rudolph@unibw.de

24. April 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Überblick

1.1 Einführung

Bei allen Modellen zur Beschreibung der Flugbahn eines Geschosses liegt die Newton'sche Mechanik zugrunde, d. h. die Gesamtheit **aller** auf das Geschoss einwirkenden Kräfte $\mathbf{F}$ ist gleich deren Masse m multipliziert mit seiner Beschleunigung $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ die Ortskoordinate des Geschosses zum Zeitpunkt t darstellt. Hierbei unterstellt man, dass das Projektil als Massenpunkt dargestellt werden kann - man beschreibt strenggenommen die Bahn seines Schwerpunktes.

In erster Näherung vernachlässigt man zuerst die Ausdehnung des Geschosses - Rotationseffekte wie die Präzession, die Nutation, den Magnus-Effekt, den Spin-Dämpfungseffekt und weitere Effekte betrachtet man dann in einem zweiten Schritt.

Formuliert man nun die Kräfte, die auf das Geschoss einwirken, und löst das obige Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

dann erhält man damit die Flugbahn des Geschosses in sogenannter parametrisierter Form - damit kann man in Abhängigkeit von der Zeit alle Größen bestimmen, die für das sportliche, aber auch für das militärische Schießen von Interesse sind.

1.2 Mathematische Grundlagen

Betrachtet man das vorliegende Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$$

dann stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen ein derartiges System lösbar ist, und wenn es lösbar ist, wann die Lösung eindeutig ist.

Dazu schreibt man das System um in ein System erster Ordnung - man erhält dadurch prinzipiell ein System der Gestalt

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

dem noch entsprechende Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ hinzugefügt werden[1].

Hierbei ist nun

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

Gesucht ist damit ein Vektor $\mathbf{y}(t)$ von Funktionen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, der das obige Differentialgleichungssystem erster Ordnung samt Anfangsbedingungen erfüllt.

Beispiel 1

Wir betrachten das sogenannte Vakuum-Modell, d. h. der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

Damit haben wir als Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -mg \end{aligned}$$

wenn nur die Flugweite $x = x(t)$ und die Flughöhe $y = y(t)$ betrachtet werden sollen. Der Punkt oberhalb von x und y soll dabei - wie in der Physik üblich - die Ableitung nach der Zeit bedeuten.

Zusätzlich stellt man Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ v_x(0) &= v_0 \cos(\theta) \\ v_y(0) &= v_0 \sin(\theta) \end{aligned}$$

wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses ist und g die Erdbeschleunigung.

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung überführen wir durch Division mit m in

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

[1] t_0 ist typischerweise bei unseren Betrachtungen gleich 0.

Wir definieren die Vektoren

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$$

ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Damit stellt sich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines derartigen Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

Ein Satz, der die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungssystemen erster Ordnung generell sicherstellt, ist der bekannte Satz von Picard und Lindelöf - dieser besagt:

Satz 1

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(u) = \mathbf{v}$$

Die Abbildung $\mathbf{f}$ *sei in dem* $(n+1)$*-dimensionalen Zylinder*

$$|\, x-u \,| < a, \quad \|\, \mathbf{y}-\mathbf{v} \,\| < b$$

stetig und beschränkt, sie soll weiter in diesem eine Lipschitz-Bedingung erfüllen, d. h. es gelte

$$\|\, \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) \,\| \leq A, \quad \|\, \mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2) \,\| \leq M \,\|\, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \,\|$$

Dann gibt es für das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$$

genau eine Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$*, welche die Anfangsbedingung* $\mathbf{y}(u) = \mathbf{v}$ *erfüllt. und für* $|\, x-u \,| < \alpha$ *existiert, wobei*

$$\alpha = \min\{a, \frac{b}{A}\}$$

ist.

BEWEIS

Siehe zum Beispiel Kamke (1969), S. 74, Satz 1 und S. 104, Satz 3.

Beispiel 2

Betrachten wir nochmals das obige Beispiel des Vakuum-Modells, dann besagt der Satz von Picard-Lindelöf, dass genau eine Lösung existiert.

Dies bedeutet, dass ein Vektor $\mathbf{y}(t)$ existiert mit

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

der die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $v_x(0) = v_0 \cos(\theta)$ und $v_y(0) = v_0 \sin(\theta)$ erfüllt, wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit darstellt.

Diese Lösung kann man durch entsprechende Integrationen oder durch einen Potenzreihenansatz erhalten[2] - es ergibt sich:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\theta) t \\ y(t) &= y_0 + v_0 \sin(\theta) t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

und durch Differentiation

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos(\theta) \\ v_y(t) &= v_0 \sin(\theta) - gt \end{aligned}$$

Oft hängen die Differentialgleichungssysteme der Ballistik noch von zusätzlichen Parametern ab und müssen in Abhängigkeit von diesen gelöst werden (ein derartiger Parameter könnten zum Beispiel ein Rohrerhebungswinkel und eine Fleckschussentfernung sein) - es stellt sich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

Die Lösungen hängen damit ja auch von den Parametern ab.

Hier sind folgende Sätze hilfreich:

Satz 2

Sei $\mathcal{G}(x, \mathbf{y})$ ein Gebiet, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ ein k-dimensionaler Vektor, $\mathcal{C}$ sei eine offene Menge in dem $\mathbf{c}$-Raum und $\mathcal{G} \times \mathcal{C}$ das Kartesische Produkt von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{C}$ - d. h. der Bereich der Punkte $x, \mathbf{y}, \mathbf{c}$ eines $(n+k+1)$-dimensionalen Raumes mit $x, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$ und $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$.

Die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c})$ sei in $\mathcal{G} \times \mathcal{C}$ stetig, so dass für jedes $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ durch jeden Punkt $x, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$ mindestens eine Integralkurve der Differentialgleichung

[2] Es gibt auch die Möglichkeit, die sogenannten Picard-Lindelöf-Iterationen durchzuführen - eine Frage des Geschmacks

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c})$$

geht. Es wird weiter vorausgesetzt, dass es auch nur ***eine*** *solche von Rand zu Rand laufende Integralkurve gibt, die mit*

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$$

bezeichnet wird.

Dann gilt folgendes:

(a) *Wenn die Funktion $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$ an einer Stelle $x_0, u_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{c}_0$ existiert und wenn $\alpha \leq x \leq \beta$ ein abgeschlossenes Intervall ist, dass x_0, u_0 als innere Punkte enthält und in dem $\mathbf{Y}(x, u_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{c}_0)$ existiert, dann existieren die Funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$ in diesem Intervall auch für alle hinreichend nahe an $u_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{c}_0$ gelegenen $u, \mathbf{y}, \mathbf{c}$.*

(b) *Die Funktionen $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c})$ sind an jeder Stelle ihres Existenzbereiches stetige Funktionen ihrer Argumente $x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}$.*

BEWEIS

Siehe Kamke (1969), S. 116, Satz 2.

Damit hängen die Lösungen stetig von den Parametern ab.

Unter Zusatzvoraussetzungen kann man auch die Differenzierbarkeit bzgl. der Parameter zeigen.

Dabei sei $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ ein k-dimensionaler Vektor, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_l)$ ein l-dimensionaler Vektor, $\mathcal{C}$ eine offene Menge im $\mathbf{c}$-Raum und $\mathcal{B}$ eine offene Menge im $\mathbf{b}$-Raum.

Ist $\mathcal{G}(x, \mathbf{y})$ ein Gebiet, dann sei $\mathcal{G} \times \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ die Menge aller Punkte $x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$ mit $x, \mathbf{y} \in \mathcal{G}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$.

Es gilt dann

Satz 3

Die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}; \mathbf{c}, \mathbf{b})$ sei in $\mathcal{G} \times \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ stetig und besitze stetige partielle Ableitungen bzgl $y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_k$.

Für jeden Punkt $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ von $\mathcal{C} \times \mathcal{B}$ gibt es dann durch den Punkt $u, \mathbf{v} \in \mathcal{G}$ eine in $\mathcal{G}$ von Rand zu Rand verlaufende Integralkurve

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}; \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

Die Integralkurve $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ ist an jeder Stelle $x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$ ihres Existenzbereiches nach x, u, $v_1, \ldots, v_n$, $c_1, \ldots, c_k$ partiell differenzierbar, und diese partiellen Ableitungen sind stetige Funktionen von $x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$.

Ferner ist die partielle Ableitung

$$\mathbf{w}_p = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial c_p}, \quad 1 \leq p \leq k$$

die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\mathbf{w}' = \mathbf{f}_{c_p}(x, \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})) + \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b}), \mathbf{c}, \mathbf{b})\mathbf{w} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{w}_p(u) = \mathbf{0}$$

Hierbei ist **F** *die Matrix*

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = \frac{\partial f_p}{\partial y_q}, \quad p, q = 1, \ldots, n$$

BEWEIS

Siehe Kamke (1969), S. 122, Satz 2.

Anmerkung

Ist die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ entsprechend oft partiell differenzierbar, dann überträgt sich dies auf die Integralkurven

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x, u, \mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$$

siehe hierzu Kamke (1969), S. 124, Satz 3, und S. 125, Satz 4.

Für die weiteren Ausführungen betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

mit der Anfangsbedingung v, der Mündungsgeschwindigkeit.

Wir definieren nun das Funktional

$$h(x, \mathbf{c}) = \| \mathbf{y}_{Ziel} - \mathbf{Y}(x, u, v, \mathbf{c}) \|^2$$

welches bzgl. x und **c** unter der Nebenbedingung minimiert werden soll, dass in der Fleckschussentfernung die Flughöhe gleich Null ist.

Dieses bedeutet, dass wir einen Zeitpunkt t_{Fleck} und einen Winkel θ^* finden müssen, so dass

$$\begin{aligned} x(t_{Fleck}) &= x_{Fleck} \\ y(t_{Fleck}) &= 0 \end{aligned}$$

gilt (gegebenenfalls kommt noch ein Winkel ζ^* für die z-Komponente hinzu, ein Seitenkorrektur- oder Vorhaltewinkel, falls der Einfluss von Seitenwind mit eingerechnet werden soll).

c übernimmt hierbei die Rolle der Konstanten, die in den Flachbahntrajektorien auftritt.

Äquivalent hierzu ist als Nebenbedingung für die Schätzung der Konstanten

$$\begin{aligned} x(t_{Fleck}) - x_{Fleck} &= 0 \\ y(t_{Fleck}) &= 0 \end{aligned}$$

Das obige Funktional ist sicherlich differenzierbar, falls die Abbildung $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$, die das Differentialgleichungssystem definierte, diese Eigenschaft besaß.

Wir haben damit prinzipiell zwei Möglichkeiten:

1. Wir können unser Problem als Optimierungsaufgabe auffassen.

2. Wir können unser Problem als mehrdimensionales Nullstellenproblem formulieren.

Zu 1.: Hier sind Verfahren wie das BFGS-Verfahren oder das DFP-Verfahren zu nennen - derartige Verfahren sind in der Literatur ausführlich beschrieben und in der Programmiersprache Octave auch realisiert.

Zu 2.: Bildet man die Ableitung des obigen Funktionals nach den Parametern, so ergibt sich in natürlicher Weise ein Nullstellenproblem, welches mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren gelöst werden kann. Auch dieses Verfahren ist in Octave verfügbar.

Besitzt das Problem noch eine dritte Komponente, so stellt die Behandlung des dreidimensionalen Problems prinzipiell keine Schwierigkeit dar.

Derartige Probleme sind in der Literatur durchaus bekannt - sie rangieren unter dem Begriff "Kompartimentmodelle", siehe zum Beispiel das Buch von Bates und Watts (2007).

Kapitel 2

Anwendung der Theorie - Flachbahntrajektorien

2.1 Vorbetrachtungen

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir das Vakuum-Modell angesprochen - der Luftwiderstand war hier vernachlässigt.

Modelliert man nun den Luftwiderstand mit, so erhält man ein erheblich komplizierteres Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}_x & = & -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y & = & -\hat{C}_d^* v v_y - g \\ \dot{v}_z & = & -\hat{C}_d^* v v_z \end{array}$$

mit der Abkürzung

$$\hat{C}_d^* = \frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_d = \frac{\rho \pi}{8} \frac{C_d}{C}, \quad C = \frac{m}{d^2}$$

C ist hierbei der ballistische Koeffizient, ρ die Luftdichte, S die Referenzfläche des Geschosses und

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

C_d ist hierbei das Luftwiderstandsgesetz.

Dies ist die Beschreibung der Flugbahn eines Geschosses unter dem Einfluss der Schwerkraft bei Vorhandensein des Luftwiderstands, siehe hierzu zum Beispiel das Buch von McCoy (2012), S. 88 ff.

Es gibt hierbei zwei Möglichkeiten:

- Man löst das Differentialgleichungssystem mit Hilfe eines numerischen Verfahrens. Dazu muss man ein geeignetes Luftwiderstandsgesetz ausgewählt und das System zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung überführt haben. Die Wahl eines geeigneten numerischen Verfahrens lassen wir einmal außen vor[1].

- Man versucht, geeignete Näherungen zu finden, um eine analytische Lösung des System zu errechnen.

Die zweite Möglichkeit wollen wir hier betrachten.

Ist nun **keinerlei** Seitenwind vorhanden, dann bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir die z-Komponente vernachlässigen.

Dies wollen wir in einem ersten Schritt annehmen.

Damit vereinfacht sich das obige System zu:

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v v_y - g\end{aligned}$$

wobei nun $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ist.

Um nun Flachbahntrajektorien zu betrachten, beachten wir, dass nun

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x \sqrt{1 + \left(\frac{v_y}{v_x}\right)^2}$$

Ist nun $\tan(\phi) = \left|\frac{v_y}{v_x}\right| < 0,1$ [2], dann unterscheiden sich v und v_x um weniger als 1 Prozent (siehe McCoy (2012), S. 90, oder Carlucci und Jacobson (2008), S. 204) - wir können somit v durch v_x ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v_x^2 \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v_x v_y - g\end{aligned}$$

gegenüber dem Originalsystem

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v v_y - g\end{aligned}$$

2.2 Zeitabhängige Lösungen des zweidimensionalen Systems

Wir wollen nun das angenäherte Differentialgleichungssystem lösen, d. h. wir suchen Lösungen $x(t)$ und $y(t)$, welche die Anfangsbedingungen wie auch das Differentialgleichungssystem

[1] siehe zum Beispiel Strehmel u. a. (2012).

[2] dies entspricht einem Winkel von maximal $5,7^\circ$

erfüllen.

Dabei betrachten wir folgende Spezialfälle (siehe zum Beispiel Carlucci und Jacobson (2008), S. 206 ff.):

1. Der Luftwiderstandskoeffizient $\hat{C}_d^*$ ist konstant, d. h.

$$\hat{C}_d^* = k_1$$

2. Der Luftwiderstandskoeffizient $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl $\frac{v}{a} \approx \frac{v_x}{a}$, a die Schallgeschwindigkeit, d. h.

$$\hat{C}_d^* = \hat{k}_2 \frac{1}{\frac{v}{a}} = \frac{k_2}{v} \approx \frac{k_2}{v_x}$$

3. Der Luftwiderstandskoeffizient $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl, d. h.

$$\hat{C}_d^* = \hat{k}_3 \frac{1}{\sqrt{\frac{v}{a}}} = \frac{k_3}{\sqrt{v}} \approx \frac{k_3}{\sqrt{v_x}}$$

Für diese drei Fälle wollen wir die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v_x^2 \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v_x v_y - g \end{aligned}$$

kurz zusammenstellen - die Lösungen kann man durch entsprechende Integrationen erhalten.

2.2.1 Der Fall $\hat{C}_d^* = k_1$

Beginnen wir mit dem Fall $\hat{C}_d^* = k_1$.

Das Differentialgleichungssystem lautet dann:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -k_1 v_x^2 \\ \dot{v}_y &= -k_1 v_x v_y - g \end{aligned}$$

Für dieses Differentialgleichungssystem erhalten wir folgende Gleichungen:

$$x(t) = \frac{1}{k_1} \ln(1 + v_x(0) k_1 t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$v_x(t) = \frac{v_x(0)}{1 + v_x(0) \cdot k_1 \cdot t}$$

$$t = \frac{\exp(k_1 x(t)) - 1}{v_x(0) k_1}$$

$$v_y(t) = \left(v_y(0) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 v_x(0)} \right) \frac{1}{1 + k_1 v_x(0) t} - \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 v_x(0)} - \frac{1}{2} g t$$

und

$$y(t) = y(0) + \left(v_y(0) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 v_x(0)} \right) \frac{1}{k_1 v_x(0)} \ln(1 + k_1 v_x(0) t) - \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 v_x(0)} t - \frac{1}{4} g t^2$$

Die Konstante k_1 kann man nun durch einen Kleinste-Quadrate-Schätzer aus Herstellerdaten schätzen, wie im ersten Teil angeführt.

2.2.2 Der Fall $\hat{C}_d^* = \frac{k_2}{v_x}$

Betrachten wir nun den Fall

$$\hat{C}_d^* = \frac{k_2}{v_x}$$

dann lautet das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -k_2 v_x \\ \dot{v}_y &= -k_2 v_y - g \end{aligned}$$

Durch Integrationen erhalten wir folgende Gleichungen:

$$v_x(t) = v_x(0) \exp(-k_2 t)$$

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k_2} (1 - \exp(-k_2 t))$$

$$t = \frac{\ln\left(1 - \frac{x(t) \cdot k_2}{v_x(0)}\right)}{-k_2}$$

$$v_y(t) = \exp(-k_2 t) \left(v_y(0) + \frac{g}{k_2} \right) - \frac{g}{k_2}$$

$$y(t) = y(0) + \frac{\left(v_y(0) + \frac{g}{k_2} \right)}{k_2} (1 - \exp(-k_2 t)) - \frac{g}{k_2} t$$

Die Konstante k_2 kann man nun durch einen Kleinste-Quadrate-Schätzer aus Herstellerdaten schätzen, wie im ersten Teil angeführt.

2.2.3 Der Fall $\hat{C}_d^* = \frac{k_3}{\sqrt{v_x}}$

Es verbleibt noch der Fall

$$\hat{C}_d^* = \frac{k_3}{\sqrt{v_x}}$$

dann lautet das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -k_3 v_x^{\frac{3}{2}} \\ \dot{v}_y &= -k_3 v_y \sqrt{v_x} - g \end{aligned}$$

Auch dieses Differentialgleichungssystem kann durch Integrationen gelöst werden - wir erhalten folgende Gleichungen:

$$v_x(t) = \left(\frac{2\sqrt{v_x(0)}}{2 + \sqrt{v_x(0)}k_3 t} \right)^2$$

$$x(t) = \frac{4\sqrt{v_x(0)}}{k_3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 + \sqrt{v_x(0)}k_3 t} \right) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$t = \frac{4}{k_3(2\sqrt{v_x(0)} - k_3 x(t))} - \frac{2}{\sqrt{v_x(0)}k_3}$$

$$v_y(t) = \frac{v_y(0) + \frac{2g}{3\sqrt{v_x(0)}k_3}}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)}k_3 t)^2} - \frac{2g}{3\sqrt{v_x(0)}k_3}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)}k_3 t)$$

$$y(t) = y(0) + \left(\frac{2v_y(0)}{\sqrt{v_x(0)}k_3} + \frac{4g}{3v_x(0)k_3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)}k_3 t} \right)$$

$$- \frac{2g}{3v_x(0)k_3^2} \left((1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)}k_3 t)^2 - 1 \right)$$

Die Konstante k_3 kann man nun durch einen Kleinste-Quadrate-Schätzer aus Herstellerdaten schätzen, wie im ersten Teil angeführt.

2.3 Schätzung der Konstanten k_1, k_2 und k_3

Für die drei Ansätze hatten wir die Lösungskurven jeweils aufgeschrieben.

Sind nun von Seiten der Munitionshersteller Flughöhen in Abhängigkeit von der Flugweite gegeben - typischerweise in den Katalogen der Hersteller, wo einerseits für verschiedene Fleckschussentfernungen die Flughöhen ausgewiesen sind, andererseits auch für die günstigste Einschießentfernung die Flughöhen - dann kann man versuchen, die obigen Konstanten k_1, k_2 und k_3 optimal im Sinne eines Kleinste-Quadrate-Schätzers zu bestimmen.

Dass ein derartiges Optimierungsproblem eine Lösung besitzt, stellen die Sätze 2 und 3 sicher - die Konstanten k_1, k_2 und k_3 übernehmen die Rolle des Parameters **c**.

Man kann somit - anschaulich formuliert - für gegebenen Parameter k_i (wobei i nun 1, 2 oder 3 bedeutet) die Lösungskurve $y(t,k_i)$ - welche die theoretischen Flughöhen darstellt - berechnen und diese mit den tatsächlichen Flughöhen y_t abgleichen.

Da es nicht darum geht, für eine einzige Flugweite x_t die Flughöhe y_t exakt zu treffen, liegt es nahe, die Summe der Abweichungsquadrate

$$\sum_{j=1}^{n} (y(t_j,k_i) - y_{t_j})^2$$

in Abhängigkeit von k_i zu minimieren - unter der Nebenbedingung, dass in der Fleckschussentfernung die Flughöhe gleich Null ist.

Hierbei setzen wir n Flughöhen zu n Flugweiten als bekannt voraus - die Flugzeiten müssen dabei in Flugweiten umgerechnet werden.

Die entsprechenden numerischen Programme werden von Octave bereitgestellt.

Hat man die Schätzungen $\hat{k}_1$, $\hat{k}_2$ und $\hat{k}_3$ für k_1, k_2 und k_3, dann kann man auch dreidimensionale Probleme berechnen.

2.4 Das dreidimensionale System - konstanter Seitenwind

Der Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v v_x \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v v_y - g \\ \dot{v}_z &= -\hat{C}_d^* v v_z \end{aligned}$$

Wir setzen nun einen konstanten Seitenwindvektor **W** mit Komponenten

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$$

voraus - mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - W_x \\ v_y - W_y \\ v_z - W_z \end{pmatrix}$$

geht das obige Differentialgleichungssystem über in

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= -\hat{C}_d^* V V_x \\ \dot{V}_y &= -\hat{C}_d^* V V_y - g \\ \dot{V}_z &= -\hat{C}_d^* V V_z \end{aligned}$$

wobei nun $V = \sqrt{(v_x - W_x)^2 + (v_y - W_y)^2 + (v_z - W_z)^2}$ ist, siehe hierzu zum Beispiel McCoy (2012), S. 157 ff.

Ist nun analog zum zweidimensionalen Fall

$$\left| \frac{v_y - W_y}{v_x - W_x} \right| < 0,1 \qquad \left| \frac{v_z - W_z}{v_x - W_x} \right| < 0,1$$

dann ist

$$V = (v_x - W_x) \sqrt{1 + \left(\frac{v_y - W_y}{v_x - W_x} \right)^2 + \left(\frac{v_z - W_z}{v_x - W_x} \right)^2} \approx (v_x - W_x) = V_x$$

Damit ergibt sich für das obige Differentialgleichungssystem das angenäherte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= -\hat{C}_d^* V_x^2 \\ \dot{V}_y &= -\hat{C}_d^* V_x V_y - g \\ \dot{V}_z &= -\hat{C}_d^* V_x V_z \end{aligned}$$

Vergleichen wir diese drei Gleichungen mit den Gleichungen des zweidimensionalen Systems

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\hat{C}_d^* v_x^2 \\ \dot{v}_y &= -\hat{C}_d^* v_x v_y - g \end{aligned}$$

dann sind die ersten beiden Gleichungen formal identisch - wir können somit für die drei möglichen Fälle Anleihen machen und die Lösungen modifizieren, die Anfangsbedingungen müssen entsprechend angepasst werden.

2.4.1 Der Fall $\hat{C}_d^* = k_1$

Beginnen wir mit dem Fall $\hat{C}_d^* = k_1$.

In der zweidimensionalen Situation hatten wir als Lösungen erhalten:

$$x(t) = \frac{1}{k_1}\ln(1+v_x(0)k_1t) \quad \text{mit} \quad x(0)=0$$

$$v_x(t) = \frac{v_x(0)}{1+v_x(0)\cdot k_1\cdot t}$$

$$t = \frac{\exp(k_1x(t))-1}{v_x(0)k_1}$$

$$v_y(t) = \left(v_y(0)+\frac{1}{2}\frac{g}{k_1v_x(0)}\right)\frac{1}{1+k_1v_x(0)t}-\frac{1}{2}\frac{g}{k_1v_x(0)}-\frac{1}{2}gt$$

und

$$y(t) = y(0)+\left(v_y(0)+\frac{1}{2}\frac{g}{k_1v_x(0)}\right)\frac{1}{k_1v_x(0)}\ln(1+k_1v_x(0)t)-\frac{1}{2}\frac{g}{k_1v_x(0)}t-\frac{1}{4}gt^2$$

und eine Gleichung, um die Konstante k_1 zu bestimmen

$$k_1 = \frac{1}{x(t)}\ln(\frac{v_x(0)}{v_x(t)})$$

Aufgrund des Ansatzes für den Vektor **V** ersetzen wir die Anfangsbedingungen $v_x(0)$ durch $v_x(0)-W_x$ und $v_y(0)$ durch $v_y(0)-W_y$ - dies ergibt als Lösungen für die Geschwindigkeiten

$$V_x(t) = \frac{v_x(0)-W_x}{1+(v_x(0)-W_x)\cdot k_1\cdot t}$$

und

$$V_y(t) = \left((v_y(0)-W_y)+\frac{1}{2}\frac{g}{k_1(v_x(0)-W_x)}\right)\frac{1}{1+k_1(v_x(0)-W_x)t}-\frac{1}{2}\frac{g}{k_1(v_x(0)-W_x)}-\frac{1}{2}gt$$

Hieraus folgt

$$v_x(t)-W_x = \frac{v_x(0)-W_x}{1+(v_x(0)-W_x)\cdot k_1\cdot t}$$

oder

$$v_x(t) = W_x+\frac{v_x(0)-W_x}{1+(v_x(0)-W_x)\cdot k_1\cdot t}$$

Entsprechend erhalten wir

$$v_y(t) - W_y = \left((v_y(0) - W_y) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} \right) \frac{1}{1 + k_1(v_x(0) - W_x)t} - \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} - \frac{1}{2} gt$$

oder

$$v_y(t) = W_y + \left((v_y(0) - W_y) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} \right) \frac{1}{1 + k_1(v_x(0) - W_x)t} - \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} - \frac{1}{2} gt$$

Integrieren wir die Gleichung

$$v_x(t) = W_x + \frac{v_x(0) - W_x}{1 + (v_x(0) - W_x) \cdot k_1 \cdot t}$$

so erhalten wir

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{1}{k_1} \ln(1 + (v_x(0) - W_x)k_1 t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

und integrieren wir die Gleichung

$$v_y(t) = W_y + \left((v_y(0) - W_y) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} \right) \frac{1}{1 + k_1(v_x(0) - W_x)t} - \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} - \frac{1}{2} gt$$

so erhalten wir

$$y(t) = W_y \cdot t + y(0) + \left((v_y(0) - W_y) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} \right) \frac{1}{k_1(v_x(0) - W_x)} \ln(1 + k_1(v_x(0) - W_x)t)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{g}{k_1(v_x(0) - W_x)} t - \frac{1}{4} gt^2$$

Die Flugzeit t kann man prinzipiell aus der Beziehung

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{1}{k_1} \ln(1 + (v_x(0) - W_x)k_1 t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

bei vorgegebener Flugweite erhalten durch Auflösen nach t.

Verbleibt noch die Differentialgleichung

$$\dot{V}_z = -\hat{C}_d^* V_x V_z = -k_1 \cdot \frac{v_x(0) - W_x}{1 + (v_x(0) - W_x) \cdot k_1 \cdot t} \cdot V_z$$

Die Integration ergibt

$$V_z(t) = \frac{v_z(0) - W_z}{1 + (v_x(0) - W_x) k_1 t}$$

und damit

$$v_z(t) = W_z + \frac{v_z(0) - W_z}{1 + (v_x(0) - W_x) k_1 t}$$

Die nochmalige Integration ergibt dann

$$z(t) = W_z \cdot t + \frac{v_z(0) - W_z}{k_1 (v_x(0) - W_x)} \ln(1 + k_1 (v_x(0) - W_x) t) \quad \text{mit} \quad z(0) = 0$$

Wir erhalten damit folgenden Satz von Gleichungen:

$$v_x(t) = W_x + \frac{v_x(0) - W_x}{1 + (v_x(0) - W_x) \cdot k_1 \cdot t}$$

$$v_y(t) = W_y + \left((v_y(0) - W_y) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 (v_x(0) - W_x)} \right) \frac{1}{1 + k_1 (v_x(0) - W_x) t} - \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 (v_x(0) - W_x)} - \frac{1}{2} g t$$

$$v_z(t) = W_z + \frac{v_z(0) - W_z}{1 + (v_x(0) - W_x) k_1 t}$$

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{1}{k_1} \ln(1 + (v_x(0) - W_x) k_1 t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = W_y \cdot t + y(0) + \left((v_y(0) - W_y) + \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 (v_x(0) - W_x)} \right) \frac{1}{k_1 (v_x(0) - W_x)} \ln(1 + k_1 (v_x(0) - W_x) t)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{g}{k_1 (v_x(0) - W_x)} t - \frac{1}{4} g t^2$$

$$z(t) = W_z \cdot t + \frac{v_z(0) - W_z}{k_1 (v_x(0) - W_x)} \ln(1 + k_1 (v_x(0) - W_x) t) \quad \text{mit} \quad z(0) = 0$$

und einer Gleichung für die Konstante k_1

$$k_1 = \frac{1}{x(t)} \ln(\frac{v_x(0)}{v_x(t)})$$

Die Flugzeit t muss gegebenenfalls numerisch bestimmt werden aus der Gleichung

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{1}{k_1} \ln(1 + (v_x(0) - W_x) k_1 t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

2.4.2 Der Fall $\hat{C}_d^* = \frac{k_2}{v_x}$

Wir betrachten nun den Fall

$$\hat{C}_d^* = \frac{k_2}{v_x}$$

Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_x & = & -\hat{C}_d^* V_x^2 \\ \dot{V}_y & = & -\hat{C}_d^* V_x V_y - g \\ \dot{V}_z & = & -\hat{C}_d^* V_x V_z \end{array}$$

geht dann aufgrund des Ansatzes über in

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_x & = & -k_2 V_x \\ \dot{V}_y & = & -k_2 V_y - g \\ \dot{V}_z & = & -k_2 V_z \end{array}$$

In der zweidimensionalen Situation hatten wir folgende Lösungsgleichungen

$$v_x(t) = v_x(0) \exp(-k_2 t)$$

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{k_2} (1 - \exp(-k_2 t))$$

$$t = \frac{\ln\left(1 - \frac{x(t) \cdot k_2}{v_x(0)}\right)}{-k_2}$$

$$v_y(t) = \exp(-k_2 t) \left(v_y(0) + \frac{g}{k_2}\right) - \frac{g}{k_2}$$

$$y(t) = y(0) + \frac{\left(v_y(0) + \frac{g}{k_2}\right)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t)) - \frac{g}{k_2}t$$

und für die Konstante k_2

$$k_2 = \frac{v_x(0)}{x(t)}\left(1 - \frac{v_x(t)}{v_x(0)}\right)$$

Aufgrund des Ansatzes für den Vektor **V** ersetzen wir die Anfangsbedingungen $v_x(0)$ durch $v_x(0) - W_x$ und $v_y(0)$ durch $v_y(0) - W_y$ - dies ergibt als Lösungen für die Geschwindigkeiten:

$$V_x(t) = (v_x(0) - W_x)\exp(-k_2 t)$$

$$V_y(t) = \exp(-k_2 t)\left((v_y(0) - W_y) + \frac{g}{k_2}\right) - \frac{g}{k_2}$$

und

$$V_z(t) = (v_z(0) - W_z)\exp(-k_2 t)$$

Hieraus folgt:

$$v_x(t) = W_x + (v_x(0) - W_x)\exp(-k_2 t)$$

$$v_y(t) = W_y + \exp(-k_2 t)\left((v_y(0) - W_y) + \frac{g}{k_2}\right) - \frac{g}{k_2}$$

und

$$v_z(t) = W_z + (v_z(0) - W_z)\exp(-k_2 t)$$

Nochmalige Integration ergibt dann

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{(v_x(0) - W_x)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t))$$

$$y(t) = W_y \cdot t + y(0) + \frac{\left((v_y(0) - W_y) + \frac{g}{k_2}\right)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t)) - \frac{g}{k_2}t$$

und

$$z(t) = W_z \cdot t + \frac{(v_z(0) - W_z)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t))$$

Die Flugzeit t kann dann nur numerisch in Abhängigkeit von der Flugweite aus der Gleichung

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{(v_x(0) - W_x)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t))$$

bestimmt werden.

Wir erhalten damit folgenden Satz von Gleichungen:

$$v_x(t) = W_x + (v_x(0) - W_x)\exp(-k_2 t)$$

$$v_y(t) = W_y + \exp(-k_2 t)\left((v_y(0) - W_y) + \frac{g}{k_2}\right) - \frac{g}{k_2}$$

$$v_z(t) = W_z + (v_z(0) - W_z)\exp(-k_2 t)$$

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{(v_x(0) - W_x)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t))$$

$$y(t) = W_y \cdot t + y(0) + \frac{\left((v_y(0) - W_y) + \frac{g}{k_2}\right)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t)) - \frac{g}{k_2} t$$

und

$$z(t) = W_z \cdot t + \frac{(v_z(0) - W_z)}{k_2}(1 - \exp(-k_2 t))$$

2.4.3 Der Fall $\hat{C}_d^* = \frac{k_3}{\sqrt{v_x}}$

Es verbleibt noch der Fall

$$\hat{C}_d^* = \frac{k_3}{\sqrt{v_x}}$$

Hier geht das Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_x &= -\hat{C}_d^* V_x^2 \\
\dot{V}_y &= -\hat{C}_d^* V_x V_y - g \\
\dot{V}_z &= -\hat{C}_d^* V_x V_z
\end{aligned}
$$

aufgrund des Ansatzes über in

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_x &= -k_3 V_x^{3/2} \\
\dot{V}_y &= -k_3 V_x^{1/2} V_y - g \\
\dot{V}_z &= -k_2 V_x^{1/2} V_z
\end{aligned}
$$

In der zweidimensionalen Situation erhielten wir die Lösungsgleichungen

$$v_x(t) = \left(\frac{2\sqrt{v_x(0)}}{2 + \sqrt{v_x(0)} k_3 t} \right)^2$$

$$x(t) = \frac{4\sqrt{v_x(0)}}{k_3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 + \sqrt{v_x(0)} k_3 t} \right) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$t = \frac{4}{k_3 (2\sqrt{v_x(0)} - k_3 x(t))} - \frac{2}{\sqrt{v_x(0)} k_3}$$

$$v_y(t) = \frac{v_y(0) + \dfrac{2g}{3\sqrt{v_x(0)} k_3}}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)} k_3 t)^2} - \frac{2g}{3\sqrt{v_x(0)} k_3} (1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)} k_3 t)$$

$$y(t) = y(0) + \left(\frac{2 v_y(0)}{\sqrt{v_x(0)} k_3} + \frac{4g}{3 v_x(0) k_3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)} k_3 t} \right)$$

$$- \frac{2g}{3 v_x(0) k_3^2} \left((1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0)} k_3 t)^2 - 1 \right)$$

$$k_3 = 2 \frac{\sqrt{v_x(0)} - \sqrt{v_x(t)}}{x(t)}$$

Aufgrund des Ansatzes für den Vektor **V** ersetzen wir die Anfangsbedingungen $v_x(0)$ durch $v_x(0) - W_x$ und $v_y(0)$ durch $v_y(0) - W_y$ - dies ergibt als Lösungen für die Geschwindigkeiten:

$$V_x(t) = \left(\frac{2\sqrt{v_x(0) - W_x}}{2 + \sqrt{v_x(0) - W_x} k_3 t} \right)^2$$

$$V_y(t) = \frac{(v_y(0) - W_y) + \dfrac{2g}{3\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)^2} - \frac{2g}{3\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)$$

Die dritte Differentialgleichung ist formal identisch mit der zweiten Differentialgleichung, wenn man g gleich Null setzt - damit ergibt sich:

$$V_z(t) = \frac{v_z(0) - W_z}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)^2}$$

Aus diesen drei Lösungen $V_x(t)$, $V_y(t)$ und $V_z(t)$ folgt nun durch Auflösen:

$$v_x(t) = W_x + \left(\frac{2\sqrt{v_x(0) - W_x}}{2 + \sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t}\right)^2$$

$$v_y(t) = W_y + \frac{(v_y(0) - W_y) + \dfrac{2g}{3\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)^2} - \frac{2g}{3\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)$$

$$v_z(t) = W_z + \frac{v_z(0) - W_z}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)^2}$$

Nochmalige Integration liefert:

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{4\sqrt{v_x(0) - W_x}}{k_3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 + \sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t}\right) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = W_y \cdot t + y(0) + \left(\frac{2(v_y(0) - W_y)}{\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3} + \frac{4g}{3(v_x(0) - W_x)k_3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t}\right)$$

$$- \frac{2g}{3(v_x(0) - W_x)k_3^2}\left((1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t)^2 - 1\right)$$

$$z(t) = W_z \cdot t + \frac{2(v_z(0) - W_z)}{\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t}\right)$$

Damit haben wir folgenden Satz von Gleichungen:

$$v_x(t) = W_x + \left(\frac{2\sqrt{v_x(0) - W_x}}{2 + \sqrt{v_x(0) - W_x}k_3 t}\right)^2$$

$$v_y(t) = W_y + \frac{(v_y(0) - W_y) + \dfrac{2g}{3\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t)^2} - \frac{2g}{3\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t)$$

$$v_z(t) = W_z + \frac{v_z(0) - W_z}{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t)^2}$$

$$x(t) = W_x \cdot t + \frac{4\sqrt{v_x(0) - W_x}}{k_3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 + \sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t}\right) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = W_y \cdot t + y(0) + \left(\frac{2(v_y(0) - W_y)}{\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3} + \frac{4g}{3(v_x(0) - W_x)k_3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t}\right)$$
$$- \frac{2g}{3(v_x(0) - W_x)k_3^2}\left((1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t)^2 - 1\right)$$

$$z(t) = W_z \cdot t + \frac{2(v_z(0) - W_z)}{\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{v_x(0) - W_x}k_3t}\right)$$

Kapitel 3

Ergebnisse

3.1 Die Daten

Wir betrachten zuerst das Kaliber .308 und hier das Produkt D46 vom Hersteller Lapua mit den folgenden ballistischen Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie, dann die Seitenwindabweichung in Millimetern bei 4 Metern pro Sekunde):

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772

Das Geschossgewicht beträgt hier 185 Grains oder 12 Gramm.

Für dieses Produkt ergeben sich folgende Flughöhen (nach Herstellerangaben):

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-157	-547	-3588	-7908
$300m$	182	207	0	-2495	-6450
$600m$	598	1039	1247	0	-3123

bei einer Höhe des Zielfernrohrs von 4 Zentimeter über der Laufachse.

Weiterhin betrachten wir die Daten mit dem Produkt-Code GB491 von Lapua (Kaliber .308). Hier haben wir folgende ballistische Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie):

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857

Das Geschossgewicht beträgt hier 155 Grains oder 10 Gramm.

Für dieses Produkt ergeben sich folgende Flughöhen (nach Herstellerangaben, die erste Spalte beinhaltet wieder die Fleckschussweiten):

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	−115	−414	−2813	−6265	−12106
300m	138	161	0	−1984	−5160	−10726
600m	469	822	992	0	−2515	−7418

Hier nun das Kaliber .338 Lapua Magnum.

Die Munition mit dem Produkt-Code GB528 von Lapua hat folgende ballistische Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie, dann die Seitenwindabweichung in Millimetern bei 4 Metern pro Sekunde):

0m	100m	200m	300m	600m	800	1000m
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457

Das Geschossgewicht beträgt hier 300 Grains oder 19,4 Gramm.

Für dieses Produkt ergeben sich folgende Flughöhen (nach Herstellerangaben):

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	−117	−413	−2583	−5231	−9289
300m	136	155	0	−1710	−4146	−7932
600m	421	725	855	0	−1865	−5082

Um weiterhin die entwickelte Theorie zu testen, wurden Daten von RWS aus der Serie "Target Elite Plus "genommen.

Hier die Daten[1]

Kaliber .308, Geschossgewicht 10,9 Gramm, Lauflänge 650 Millimeter

Entfernung		0m	200m	400m	600m	800m	1000m
Geschwindigkeit	m/s	805	676	555	447	362	311
Energie	Joule	3529	2487	1675	1088	715	528
Seitenwind	cm	0,0	11,2	49,6	126,6	252,2	427,7

Nun die zugehörigen Flughöhen in cm:

	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	−13,1	−107,8	−333,6	−764,4	−1503,5
300m	18,6	−44,3	−238,5	−637,5	−1344,9
500m	67,7	53,8	−91,3	−441,3	−1099,6

[1] Das Kaliber .223 wurde weggelassen - es scheint sich ein Druckfehler in die Daten eingeschlichen zu haben

Kaliber .300 Win. Mag., Geschossgewicht 13,0 Gramm, Lauflänge 650 Millimeter

Entfernung		$0m$	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
Geschwindigkeit	m/s	870	762	661	568	484	407
Energie	Joule	4904	3758	2853	2091	1521	1073
Seitenwind	cm	0,0	8,1	34,1	81,3	158,8	268,9

Nun die zugehörigen Flughöhen in cm:

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	−9,8	−82,7	−244,6	−534,5	−992,4
$300m$	14,4	−34,3	−172,1	−437,7	−871,5
$500m$	50,7	38,2	−63,3	−292,7	−690,3

Kaliber .338 Lapua Mag., Geschossgewicht 16,2 Gramm, Lauflänge 650 Millimeter

Entfernung		$0m$	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
Geschwindigkeit	m/s	865	761	664	572	498	425	358
Energie	Joule	6061	4690	3574	2699	2008	1464	1039
Seitenwind	cm	0,0	4,9	20,4	48,2	93,2	155,8	243,7

Nun die zugehörigen Flughöhen in cm:

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	−9,9	−82,9	−243,9	−528,3	−969,2	1640,0
$300m$	14,5	−34,3	−171,0	−431,0	−847,6	−1494,1
$500m$	50,7	38,1	−62,3	−286,2	−666,5	−1276,7

3.2 Der zweidimensionale Fall

Vorab: Hat man für verschiedene Flugweiten neben den Flughöhen auch deren Geschwindigkeiten zur Verfügung, so kann man durchaus aus der Geschwindigkeit zu einer bestimmten Flugweite auf die zugehörige Konstante k_1, k_2 und k_3 schließen - dies wurde in einem früheren Dokument auch getan.

Aus diesem Grund wurden auch die zugehörigen Flughöhen nach diesem alten Verfahren mit angegeben.

Der Vergleich mit den Schätzungen und den daraus resultierenden Flugbahnberechnungen ist damit sicherlich von Interesse.

Wir beginnen mit dem Kaliber .308 und hier mit den Daten von Lapua mit dem Produkt-Code D46 - hier zuerst die Flughöhen des Herstellers:

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-157	-547	-3588	-7908
$300m$	182	207	0	-2495	-6450
$600m$	598	1039	1247	0	-3123

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-159	-551	-3550	-7635
$300m$	184	208	0	-2448	-6167
$600m$	592	1024	1224	0	-2902

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_1 = 8,2643 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,0030511$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-161	-559	-3639	-7890
$300m$	186	211	0	-2513	-6374
$600m$	606	1052	1261	0	-3038

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich mit dem alten Verfahren folgende Werte

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-158	-549	-3653	-8282
$300m$	183	208	0	-2555	-6819
$600m$	609	1060	1278	0	-3412

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,52095$, Norm $= 0,0015816$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-156	-541	-3550	-7919
$300m$	180	205	0	-2467	-6475
$600m$	592	1027	1234	0	-3186

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich mit dem alten Verfahren folgende Werte

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-158	-550	-3595	-7892
$300m$	183	208	0	-2495	-6426
$600m$	599	1040	1248	0	-3100

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren $k_3 = 0,020777$, Norm $= 1,3672 \cdot 10^{-4}$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$
$100m$	0	-159	-550	-3599	-7905
$300m$	183	208	0	-2498	-6438
$600m$	600	1041	1240	0	-3107

Die Norm, die mit ausgegeben wird, sagt schon, wo die genauesten Ergebnisse zu erwarten sind - je kleiner, umso präziser.

Nun die Daten des Herstellers Lapua mit dem Produkt-Code GB491, ebenfalls das Kaliber .308 - hier die Flughöhen

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	-115	-414	-2813	-6265	-12106
$300m$	138	161	0	-1984	-5160	-10726
$600m$	469	822	992	0	-2515	-7418

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	-117	-418	-2787	-6069	-11337
$300m$	139	162	0	-1951	-4955	-9944
$600m$	465	812	976	0	-2353	-6692

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_1 = 8,8391 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,019813$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	-119	-427	-2890	-6368	-12052
$300m$	142	166	0	-2037	-5230	-10629
$600m$	482	845	1018	0	-2515	-7235

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	-116	-416	-2880	-6669	-14127
$300m$	139	162	0	-2048	-5558	-12739
$600m$	480	844	1024	0	-2828	-9327

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,58646$, Norm $= 0,039974$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	-113	-404	-2707	-6050	-12013
$300m$	135	156	0	-1900	-4973	-10668
$600m$	451	790	950	0	-2440	-7501

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	−116	−417	−2827	−6302	−12236
$300m$	139	162	0	−1993	−5190	−10846
$600m$	471	826	997	0	−2533	−7525

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_3 = 0,022837$, Norm $= 1,2143 \cdot 10^{-4}$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	−116	−416	−2812	−6255	−12110
$300m$	139	161	0	−1981	−5146	−10724
$600m$	469	822	990	0	−2505	−7423

Auch hier sagt die ausgegebene Norm alles aus.

Nun das Kaliber .338 Lapua Magnum.

Für dieses Produkt ergeben sich folgende Flughöhen (nach Herstellerangaben von Lapua):

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	−117	−413	−2583	−5231	−9289
$300m$	136	155	0	−1710	−4146	−7932
$600m$	421	725	855	0	−1865	−5082

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	−118	−410	−2530	−5215	−9186
$300m$	137	156	0	−1710	−4122	−7820
$600m$	422	726	855	0	−1842	−4969

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_1 = 5,1863 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,0021508$

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	−118	−412	−2547	−5259	−9282
$300m$	137	156	0	−1724	−4162	−7910
$600m$	424	731	862	0	−1863	−5038

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte

	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	−117	−409	−2556	−5353	−9678
$300m$	136	156	0	−1737	−4261	−8313
$600m$	426	735	868	0	−1945	−5418

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,37417$, Norm = $0,0073599$

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	-116	-405	-2505	-5204	-9311
300m	135	154	0	-1695	-4125	-7961
600m	418	719	848	0	-1864	-5136

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	-118	-410	-2542	-5277	-9395
300m	137	156	0	-1723	-4184	-8029
600m	424	730	861	0	-1887	-5158

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_3 = 0,013942$, Norm = $0,0032376$

	100m	200m	300m	600m	800m	1000m
100m	0	-117	-408	-2527	-5234	-9297
300m	136	155	0	-1710	-4145	-7936
600m	421	725	855	0	-1865	-5085

Auch hier sagt die ausgegebene Norm alles aus.

Nun die Daten von RWS - RWS gibt im Katalog eine Höhe des Zielfernrohrs von 5 Zentimeter an:

Hier das Kaliber .308 - für die Flughöhen gibt RWS folgende Werte in Zentimeter an:

	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	$-13,1$	$-107,8$	$-333,6$	$-764,4$	$-1503,5$
300m	$18,6$	$-44,3$	$-238,5$	$-637,5$	$-1344,9$
500m	$67,7$	$53,8$	$-91,3$	$-441,3$	$-1099,6$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	$-13,1$	$-107,9$	$-325,7$	$-718,0$	$-1357,6$
300m	$18,7$	$-44,3$	$-230,4$	$-590,9$	$-1198,7$
500m	$66,4$	$51,0$	$-87,4$	$-400,2$	$-960,4$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_1 = 9,7454 \cdot 10^{-4}$, Norm = $0,031711$

	$100m$	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	$-13,5$	$-112,5$	$-345,2$	$-775,4$	$-1497,3$
$300m$	$16,4$	$19,4$	$-46,7$	$-246,5$	$-643,9$	$-1332,8$
$600m$	$57,5$	$101,6$	$117,7$	0	$-315,6$	$-922,0$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	$-13,0$	$-108,4$	$-338,8$	$-805,1$	$-1795,4$
$300m$	$18,7$	$-45,1$	$-243,8$	$-678,5$	$-1637,2$
$500m$	$68,0$	$53,5$	$-96,0$	$-481,4$	$-1390,9$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,58583$, Norm $= 0,13840$

	$100m$	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	$-12,7$	$-104,5$	$-319,4$	$-731,8$	$-1514,0$
$300m$	$15,4$	$18,1$	$-43,0$	$-227,2$	$-608,8$	$-1360,3$
$600m$	$53,2$	$93,8$	$108,5$	0	$-305,9$	$-981,7$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	$-13,0$	$-108,1$	$-331,3$	$-750,7$	$-1487,2$
$300m$	$18,7$	$-44,7$	$-236,1$	$-623,9$	$-1328,6$
$500m$	$67,1$	$52,1$	$-91,0$	$-430,3$	$-1086,7$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_3 = 0,023987$, Norm $= 0,0055031$

	$100m$	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	0	$-13,1$	$-108,6$	$-333,3$	$-757,5$	$-1506,0$
$300m$	$15,9$	$18,8$	$-44,9$	$-237,9$	$-630,2$	$-1346,9$
$600m$	$55,6$	$98,1$	$113,7$	0	$-313,1$	$-950,5$

Auch hier sagt die Norm alles.

Nun das Kaliber 300 Win Mag. - für die Flughöhen gibt RWS folgende Werte an:

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$
$100m$	$-9,8$	$-82,7$	$-244,6$	$-534,5$	$-992,4$
$300m$	$14,4$	$-34,3$	$-172,1$	$-437,7$	$-871,5$
$500m$	$50,7$	$38,2$	$-63,3$	$-292,7$	$-690,3$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	$-9,8$	$-82,6$	$-244,0$	$-520,9$	$-948,4$
300m	$14,6$	$-33,9$	$-170,9$	$-423,5$	$-826,6$
500m	$50,5$	$38,0$	$-63,2$	$-279,8$	$-647,0$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_1 = 7,0866 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,00645$

	100m	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	0	$-10,0$	$-84,2$	$-250,5$	$-538,9$	$-989,5$
300m	$12,4$	$14,8$	$-34,7$	$-176,2$	$-439,8$	$-865,6$
600m	$41,7$	$73,5$	$82,8$	0	$-204,9$	$-572,1$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	$-9,8$	$-82,8$	$-248,8$	$-549,2$	$-1060,5$
300m	$14,5$	$-34,2$	$-175,9$	$-451,9$	$-939,0$
500m	$51,1$	$38,9$	$-66,3$	$-305,7$	$-756,2$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,50490$, Norm $= 0,0090287$

	100m	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	0	$-9,6$	$-81,2$	$-241,7$	$-526,2$	$-995,8$
300m	$12,0$	$14,3$	$-33,3$	$-169,9$	$-430,5$	$-876,1$
600m	$40,3$	$70,9$	$79,9$	0	$-204,0$	$-592,9$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	$-9,8$	$-82,7$	$-246,2$	$-532,8$	$-991,2$
300m	$14,5$	$-34,0$	$-173,2$	$-435,5$	$-869,5$
500m	$50,8$	$38,4$	$-64,5$	$-290,6$	$-688,5$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_3 = 0,018949$, Norm $= 4,4508 \cdot 10^{-4}$

	100m	200m	400m	600m	800m	1000m
100m	0	$-9,8$	$-82,7$	$-246,4$	$-533,4$	$-992,6$
300m	$12,2$	$14,6$	$-34,0$	$-173,3$	$-436,0$	$-870,8$
600m	$41,1$	$72,3$	$81,5$	0	$-204,9$	$-582,0$

Nun das Kaliber .338 Lapua Mag. - für die Flughöhen gibt RWS folgende Werte an:

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-9,9$	$-82,9$	$-243,9$	$-528,3$	$-969,2$	$-1640,0$
$300m$	$14,5$	$-34,3$	$-171,0$	$-431,0$	$-847,6$	$-1494,1$
$500m$	$50,7$	$38,1$	$-62,3$	$-286,2$	$-666,5$	$-1276,7$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren:

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-9,9$	$-83,0$	$-244,1$	$-518,9$	$-940,6$	$-1552,2$
$300m$	$14,6$	$-33,9$	$-170,4$	$-420,7$	$-817,9$	$-1404,9$
$500m$	$50,5$	$37,9$	$-62,8$	$-277,2$	$-638,5$	$-1189,6$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_1 = 6,8554 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,029264$

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-10,1$	$-84,5$	$-250,4$	$-536,3$	$-980,3$	$-1632,2$
$300m$	$12,5$	$-34,7$	$-175,6$	$-436,6$	$-855,7$	$-1482,6$
$500m$	$30,9$	$51,7$	$-65,1$	$-289,2$	$-671,5$	$-1261,6$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-9,9$	$-83,1$	$-248,5$	$-544,5$	$-1040,5$	$1882,1$
$300m$	$14,6$	$-34,2$	$-175,0$	$-446,5$	$-918,1$	$-1735,2$
$500m$	41.7	73.4	$-66,6$	$-300,7$	$-735,8$	$-1516,5$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,46839$, Norm $= 0,066505$

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-9,7$	$-80,8$	$-238,2$	$-512,2$	$-952,5$	$-1649,4$
$300m$	$14,2$	$-33,0$	$-166,5$	$-416,5$	$-832,9$	$-1505,9$
$500m$	$36,3$	$25,2$	$-38,3$	$-154,3$	$-322,8$	$-543,7$

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-9,9$	$-83,1$	$-246,0$	$-529,7$	$-979,4$	$1663,9$
$300m$	$14,6$	$-34,0$	$-172,5$	$-431,7$	$-856,9$	$-1516,9$
$500m$	$50,8$	$38,3$	$-64,1$	$-287,1$	$-676,1$	$-1300,0$

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_3 = 0,017969$, Norm $= 9,3419 \cdot 10^{-4}$

	$200m$	$400m$	$600m$	$800m$	$1000m$	$1200m$
$100m$	$-9,9$	$-82,7$	$-244,6$	$-525,4$	$-969,0$	$-1640,8$
$300m$	$14,6$	$-33,9$	$-171,3$	$-427,7$	$-846,8$	$-1494,3$
$500m$	$50,5$	$38,0$	$-38,3$	$-284,0$	$-667,2$	$-1278,7$

Auch hier sagt die Norm alles aus.

3.3 Der dreidimensionale Fall - die Seitenwindabweichung

Hier rechnen wir für verschiedene Munitionssorten die Seitenwindabweichung durch - es werden die Daten von Lapua herangezogen.

Wir beginnen mit den Daten mit dem Produkt-Code GB491 von Lapua (Kaliber .308).

Wir hatten folgende ballistische Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie):

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857

Das Geschossgewicht beträgt hier 155 Grains oder 10 Gramm.

Die letzte Zeile beinhaltete die Seitenwindabweichung bei einem Seitenwind von 4 Metern pro Sekunde.

Wir betrachten zuerst die Situation: $\hat{C}_d^*$ ist konstant

Rechnet man für diesen Fall die Abweichung durch den Seitenwind durch, so erhält man mit dem alten Verfahren

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857
0	20	81	186	814	1536	2553

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_1 = 8,8391 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,019813$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857
0	21	87	203	890	1689	2823

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857
0	19	78	187	927	1990	4025

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_2 = 0,58646$, Norm $= 0,039974$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857
0	17	70	166	798	1658	3162

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857
0	19	79	187	862	1709	3016

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren, $k_3 = 0,022837$, Norm $= 1,2143 \cdot 10^{-4}$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
860	794	730	669	503	408	331
3698	3151	2663	2235	1264	833	548
0	18	76	180	831	1640	2857
0	19	79	185	851	1683	2966

Nun die Berechnungen für das Kaliber .308 und das Produkt D46 vom Hersteller Lapua mit den folgenden ballistischen Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie, dann die Seitenwindabweichung in Millimetern bei 4 Metern pro Sekunde):

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772

Das Geschossgewicht beträgt hier 185 Grains oder 12 Gramm.

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772
0	21	87	201	871	1640

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_1 = 8{,}2643 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0{,}0030511$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772
0	22	92	213	930	1757

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772
0	20	84	201	984	2080

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_2 = 0{,}52095$, Norm $= 0{,}0015810$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772
0	19	80	189	910	1893

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772
0	21	86	201	920	1811

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_3 = 0,020777$, Norm $= 1,3672 \cdot 10^{-4}$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800
760	704	650	597	452	369
3466	2974	2533	2141	1228	815
0	20	82	193	895	1772
0	21	86	201	923	1817

Hier nun das Kaliber .338 Lapua Magnum.

Die Munition mit dem Produkt-Code GB528 von Lapua hat folgende ballistische Daten (zuerst die Geschwindigkeit, dann die kinetische Energie, dann die Seitenwindabweichung in Millimetern bei 4 Metern pro Sekunde):

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457

Das Geschossgewicht beträgt hier 300 Grains oder 19,4 Gramm.

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist konstant ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457
0	12	51	116	488	899	1456

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_1 = 5,1863 \cdot 10^{-4}$, Norm $= 0,0021508$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457
0	13	52	119	500	923	1497

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457
0	12	50	116	521	1015	1757

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_2 = 0,37417$, Norm $= 0,0073599$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457
0	11	46	108	480	926	1588

Im Fall: $\hat{C}_d^*$ ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-Zahl ergeben sich folgende Werte mit dem alten Verfahren

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457
0	12	50	116	503	950	1581

Die letzte Zeile gibt hierbei die berechneten Werte aus.

Nun das Kleinste-Quadrate-Verfahren mit $k_3 = 0,013942$, Norm $= 0,0032376$

$0m$	$100m$	$200m$	$300m$	$600m$	800	$1000m$
830	789	750	712	605	539	478
6696	6054	5465	4925	3558	2827	2223
0	12	47	109	469	880	1457
0	12	49	113	491	925	1538

3.4 Fazit

Generell scheinen die Kleinste-Quadrate-Schätzer doch Verbesserungen zu bringen, was die Vorhersagegenauigkeit der Flugbahnberechnung betrifft.

Der numerische Aufwand hält sich in Grenzen, der Gewinn an Genauigkeit ist dafür doch teilweise erheblich.

Die verwendeten Routinen sind in Octave standardmäßig vorhanden, so dass sich auch der Programmieraufwand in Grenzen hält.

Es ist auch zu beachten, dass die Laufzeiten der Programme erstaunlich gering sind - der verwendete Rechner ist sicherlich um die zehn Jahre alt, läuft allerdings unter OpenSuse. Die allerneuste Hardware ist der verwendete Rechner sicherlich nicht.

Betrachtet man die dreidimensionale Situation, dann liegt der Schluss nahe, dass die modellmäßigen Ansätze sicher nicht die ganze Wahrheit beinhalten. Es sind sicherlich weitere Effekte in das Modell einzuführen - Stichwort: 6-Freiheitsgrade-Modell.

Es liegt nahe, den Ansatz des Kleinste-Quadrate-Schätzers zu verallgemeinern, um nicht nur einen einzigen Parameter in den Lösungskurven zu schätzen, sondern gleichzeitig mehrere Parameter in den Lösungskurven - derartige Probleme sind in der Literatur bekannt, siehe zum Beispiel das Buch von Bates und Watts (2007).

Derartige Ansätze rangieren unter dem Begriff "Kompartimentmodelle".

Literaturverzeichnis

[Bates und Watts 2007] BATES, D. M. ; WATTS, D.: *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. Wiley, 2007

[Carlucci und Jacobson 2008] CARLUCCI, D. E. ; JACOBSON, S. S.: *Ballistics Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press, 2008

[Kamke 1969] KAMKE, E.: *Differentialgleichungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1969

[McCoy 2012] MCCOY, R. L.: *Modern Exterior Ballistics*. Schiffer Military History, 2012

[Strehmel u. a. 2012] STREHMEL, K. ; WEINER, R. ; PODHAISKY, H.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Springer, 2012