Ballistische Modelle

Prof. Dr. Andreas Rudolph
Universität der Bundeswehr
München
WE 2 Mathematik und Informatik
FB BW
Werner-Heisenberg-Weg 39
85577 Neubiberg
Email: Andreas.Rudolph@unibw.de

18. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zeichen

Mengenlehre, Logik

Zeichen	Sprechweise	Bemerkungen
$x \in M$	x ist Element von M	
$x \notin M$	x ist nicht Element von M	
$\{\ldots\}$	Menge mit den Elementen ...	
$\{x \mid \ldots\}$	Menge aller x mit der Eigenschaft, dass ...	
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B	$A \subset B \Leftrightarrow$ für alle x: $(x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A \cap B$	A geschnitten mit B	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \cup B$	A vereinigt B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$\emptyset$ oder $\{\}$	leere Menge	
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit Einschluss der Null	
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{Z}^+$	Menge der positiven ganzen Zahlen	
$\mathbb{Z}^-$	Menge der negativen ganzen Zahlen	
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B	Implikationspfeil
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt	Äquivalenzpfeil
$A \wedge B$	A und B	
$A \vee B$	A oder B	
$\neg A$	nicht A	
$\bigwedge x \in A$	für jedes x aus A	Allquantor
$\forall x \in A$	für jedes x aus A	Allquantor
$\bigvee x \in A$	es gibt ein x aus A	Existenzquantor
$\exists x \in A$	es gibt ein x aus A	Existenzquantor

Algebra, Arithmetik, Zahlentheorie

Zeichen	Sprechweise	Bemerkungen
$x = y$	x gleich y	
$x \neq y$	x ungleich y	
$x < y$	x ist kleiner y	
$x \leq y$	x ist kleiner oder gleich y	
$x > y$	x ist größer als y	
$x \geq y$	x ist größer oder gleich y	
$x \ll y$	x ist klein gegen y	x kann gegenüber y für die Zwecke des Benutzers vernachlässigt werden
$x \gg y$	x ist groß gegen y	$y \ll x$
$x \approx y$	x ist ungefähr gleich y	x und y stimmen mit einer für den Benutzer ausreichenden Genauigkeit überein
$y := x^2$	y ist definiert als x^2	
$x + y$	x plus y	
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	Summe aller a_i von $i = 1$ bis n	$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \ldots + a_n$
$x - y$	x minus y	
$x \cdot y$	x mal y	
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	Produkt aller a_i von $i = 1$ bis n	$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$
$x : y$ oder x/y	x geteilt durch y	
x^n	x hoch n	
$\sqrt{x}$	Wurzel aus x	es ist $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x$ vorausgesetzt; $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[n]{x}$	n-te Wurzel aus x	
$n!$	n-Fakultät	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \Pi_{i=1}^{n} i$
$\binom{n}{p}$	n über p	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
$\mid z \mid$	absoluter Betrag von z	$\mid z \mid := \operatorname{sgn}(z)$
$\operatorname{sgn}(x)$	Signum von (x)	$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$
i oder j		imaginäre Einheit $i^2 = j^2 = -1$
$\mathbf{a}$	Vektor $\mathbf{a}$	
$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ mal $\mathbf{b}$	skalares Produkt
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ kreuz $\mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$\parallel \mathbf{a} \parallel$	Betrag oder Norm von $\mathbf{a}$	Länge des Vektors $\mathbf{a}$
(a_{ik}) ; A	Matrix A mit den Elementen a_{ik}	
$\det(a_{ik})$	Determinante mit den Elementen a_{ik}	
A^T	transponierte Matrix zu A	wenn $A = (a_{ik})$, ist $A^T = (a_{ki})$
A^{-1}	inverse Matrix zu A	AA^{-1} = Einheitsmatrix

Funktionen, Analysis

Zeichen	Sprechweise	Bemerkungen
$[a;b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a;b)$	offenes Intervall von a bis b	$\{x \mid a < x < b\}$
$(a;b]$	links offenes Intervall von a bis b	$\{x \mid a < x \leq b\}$
$[a;b)$	rechts offenes Intervall von a bis b	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	a ist Limes (Grenzwert) der Folge (a_n)	zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0
		so dass für alle $n > n_0$
		gilt $\mid a - a_n \mid < \varepsilon$
∞	unendlich	
$f : A \to B$	f ist Abbildung von A auf B	Zuordnungspfeil bei Abbildungen
$x \mapsto y$	x auf y	y ist Funktion von x
		Diese Darstellung betont, dass
		die Funktion eine Abbildung ist
$y = f(x)$	y ist gleich f an der Stelle x	übliche Schreibweise einer
		Funktion
D	Definitionsbereich	
W	Wertebereich	
$f'(x)$; $\frac{df(x)}{dx}$	f Strich von x	Ableitung der Funktion $y = f(x)$
		nach x
	$df(x)$ nach dx	
$f^{(n)}; \frac{d^n f(x)}{dx^n}$	f n-Strich	n-te Ableitung
$z_x; \frac{\partial z}{\partial x}$	z partiell nach x	partielle Ableitung
	dz partiell nach dx	
$\int f(x)dx$	Integral $f(x)dx$	unbestimmtes Integral
$\int_a^b f(x)dx$	Integral von $f(x)$ von a bis b	bestimmtes Integral
$F(x) \mid_a^b$	$F(x)$ zwischen den Grenzen a und b	
e^x; $\exp(x)$	e hoch x, Exponentialfunktion von x	
$\ln(x)$	natürlicher Logarithmus von x	
$\log_a(x)$	Logarithmus von x zur Basis a	
$\sin(x)$	Sinus von x	
$\cos(x)$	Kosinus von x	
$\sinh(x)$	Sinus hyperbolicus von x	
$\cosh(x)$	Cosinus hyperbolicus von x	
$\tanh(x)$	Tangens hyperbolicus von x	
$\coth(x)$	Cotangens hyperbolicus von x	
$\arcsin(x)$	Arcussinus von x	
$\arccos(x)$	Arcuscosinus von x	
$\mathrm{artan}(x)$	Arcustangens von x	
$\mathrm{arccot}(x)$	Arcuscotangens von x	
$\mathrm{arsinh}(x)$	Areasinus hyperbolicus von x	
$\mathrm{arcosh}(x)$	Areacosinus hyperbolicus von x	
$\mathrm{artanh}(x)$	Areatangens hyperbolicus von x	
$\mathrm{arcoth}(x)$	Areacotangens hyperbolicus von x	

Das griechische Alphabet

Großbuchstaben	Sprechweise
Γ	gamma
Δ	delta
Θ	theta
Λ	lambda
Ξ	xi
Π	pi
Σ	sigma
Υ	ypsilon
Φ	phi
Ψ	psi
Ω	omega

Kleinbuchstaben	Sprechweise
α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	delta
η	eta
ι	iota
ε	epsilon
κ	kappa
λ	lambda
μ	mü
ν	nü
ω	omega
π	pi
ρ	rho
ϕ	phi
σ	sigma
τ	tau
ζ	zeta
ξ	xi
υ	ypsilon
ψ	psi

Kapitel 1

Physikalische Grundlagen

1.1 Einführung

In diesem Abschnitt wollen wir einige Grundlagen aus der theoretischen Physik zusammenstellen, die für die Ballistik wesentlich sind. Hierbei orientieren wir uns an den Büchern von Sommerfeld (1994) und Kuypers (2010).

Wir werden in den folgenden Ausführungen ein ballistisches Koordinatensystem voraussetzen, Dabei ist x die Koordinate für Flugweite, y die Koordinate für die Flughöhe und z die Auslenkung seitwärts.

Die drei Koordinaten zur Zeit t fassen wir zu einem Vektor zusammen, den wir mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

bezeichnen wollen. Der Tangentialvektor ergibt sich zu

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{v}(t)$$

und der Beschleunigungsvektor zu

$$\mathbf{x}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{a}(t)$$

Hierbei bezeichnet $'$ die erste Ableitung nach der Zeit, entsprechend $''$ die zweite Ableitung nach der Zeit.

1.2 Bewegung des Schwerpunktes

Wesentlich für unsere Zwecke ist das Bewegungsgesetz Newtons, die "Lex Secunda", welches folgendes besagt (siehe Sommerfeld (1994), S. 5):

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Wenn wir von relativistischen Effekten absehen (und die treten innerhalb der Ballistik wohl weniger auf), dann können wir, da die Masse dann als konstant angesehen werden kann, dies wie folgt formulieren

$$m\,\mathbf{x}'' = \mathbf{F} \quad \text{oder } m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

wenn m die Masse des Geschosses ist und $\mathbf{F}$ die Summe aller Kräfte darstellt, die auf das Geschoss einwirken. $\mathbf{a}$ ist hierbei der Beschleunigungsvektor.

Hierbei denken wir uns die gesamte Masse m des Geschosses im Schwerpunkt desselben vereinigt, was natürlich eine mathematische Idealisierung bdeutet. Demzufolge hat das Geschoss insofern keine Ausdehnung, sondern wird als mathematischer Punkt betrachtet.

Dass man dies so machen kann, besagt der sogenannte **Schwerpunktsatz** (siehe Kuypers (2010), S. 195):

Danach bewegt sich der Schwerpunkt so, als ob die gesamte Masse m des starren Körpers in ihm vereinigt wäre und als ob die Resultierende **F** *aller äußeren Kräfte in ihm angreifen würde.*

Bemerkenswert - die inneren Kräfte des Körpers beeinflussen die Schwerpunktbewegung **nicht**. Ebenfalls sind die Angriffspunkte der äußeren Kräfte für die Schwerpunktbewegung (**nicht** für die Drehung) völlig belanglos - lediglich die Resultierende der äußeren Kräfte ist entscheidend.

Definiert man nun den Impuls $\mathbf{P} = m\,\mathbf{v}$, dann kann man die Gleichung $m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$ auch als den sogenannten **Impulssatz** formulieren:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{F}$$

siehe hierzu Sommerfeld (1994), S. 61.

1.3 Bewegung des starren Körpers

Nun ist das Geschoss typischerweise kein mathematischer Punkt, sondern räumlich ausgedehnt. Deshalb greift aus physikalischer Sicht das Konzept des starren Körpers.

Um die Bewegung des starren Körpers zu beschreiben, führen wir zwei Koordinatensysteme ein, nämlich

- ein Inertialsystem mit Koordinaten x_1, y_1 und z_1 und

- ein körperfestes Koordinatensystem x, y und z, welches fest mit dem Körper verbunden ist.

Das **Euler-Theorem** besagt nun (siehe Kuypers (2010), S. 184 ff.):

Die Bewegung eines starren Körpers besteht aus einer

- *Translation, bei der sich die Winkellage des Körpers nicht ändert und alle Massenpunkte dieselbe Geschwindigkeit haben, und einer*

- *Drehung um den beliebig wählbaren körperfesten Koordinatenursprung* **0**.

Dabei hängt die Translationsgeschwindigkeit von der Wahl des Koordinatenursprungs ab; die Winkelgeschwindigkeit hingegen ist für alle Koordinatenursprünge bzw. für alle Punkte, um die sich der Körper drehen soll, gleich groß.

Da Translationen durch drei Koordinaten und Drehungen durch die Richtung der momentanen Drehachse und die Größe des Drehwinkels gekennzeichnet werden, hat ein starrer Körper **sechs Freiheitsgrade** (siehe Sommerfeld (1994), S. 42).

Greifen nun an einem starren Körper äußere Kräfte an einem Punkt $\mathbf{x}$ des starren Körpers an, dann erzeugt die Summe dieser Kräfte $\mathbf{F}$ an ihm ein Drehmoment $\mathbf{M}$.

Der **Drehimpulssatz** stellt nun den Zusammenhang zwischen dem Drehmoment $\mathbf{M}$ und dem Drehimpuls $\mathbf{H}$ her:

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathbf{H}$ *des Systems ist gleich dem resultierenden Drehmoment* $\mathbf{M}$ *der äußeren Kräfte.*

$$\mathbf{H}' = \mathbf{M}$$

Damit kann man die Dynamik des starren Körpers durch die folgenden Differentialgleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{F} \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{M} \end{aligned}$$

Da der starre Körper, wie gesagt, nur sechs Freiheitsgrade besitzt, genügen diese beiden Vektorgleichungen zur vollständigen Beschreibung seines Bewegungszustandes (siehe Sommerfeld (1994), S. 116).

Ist die Kraft $\mathbf{F}$ von der Winkelgeschwindigkeit und $\mathbf{M}$ von der Translationsgeschwindigkeit unabhängig, dann kann man die beiden Differentialgleichungssysteme separat behandeln. Dies ist innerhalb der Ballistik allerdings nicht der Fall.

Kapitel 2

Das Vakuummodell

2.1 Das Differentialgleichungssystem

Beim Vakuummodell geht man davon aus, dass nur die Erdanziehung auf das Geschoss einwirkt. Der Luftwiderstand wird somit (vorerst) außer Betracht gelassen.

Demzufolge hat der Kraftvektor **F** die Gestalt

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

falls seitwärtige Auslenkungen nicht betrachtet werden sollen und im anderen Fall

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit lautet das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$m\mathbf{y}'' = \mathbf{F}$$

oder ausgeschrieben im zweidimensionalen Fall

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

und im dreidimensionalen Fall

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sollen seitliche Auslenkungen mit berücksichtigt werden, muss die dritte Komponente entsprechend modifiziert werden, sie ist dann ungleich Null.

Hier kommen noch Anfangsbedingungen hinzu

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & x'(0) = \cos(\phi_0)v_0 \\ y(0) = y_0 & y'(0) = \sin(\phi_0)v_0 \end{array}$$

und gegebenenfalls noch eine Anfangsbedingung für die z-Koordinate, siehe McCoy (1999), S. 42 ff.

Hierbei sind ϕ_0 der Erhebungswinkel des Laufes und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit.

Die bekannte analytische Lösung stellen wir gleich anschließend vor.

Wir übertragen jetzt das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Hierzu definieren wir im zweidimensionalen Fall

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

also

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Entsprechend ergibt sich im dreidimensionalen Fall mit

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

somit

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Damit kann man ein numerisches Verfahren wie Runge-Kutta oder ein Extrapolationsverfahren zur Lösung des Differentialgleichungssystems ansetzen.

Derartige Verfahren können zum Beispiel in Bücher wie Hairer et al. (1993) oder Hermann (2004) nachgelesen werden.

Da das obige Differentialgleichungssystem bequem durch eine zweimalige Integration gelöst werden kann, ist an sich eine numerische Integration unnötig; die Umschreibung hat aber an sich einen pädagogischen Effekt für spätere Modelle.

2.2 Die analytische Lösung

Die analytische Lösung ist z. B. im Buch von McCoy (1999), S. 42 ff., oder Carlucci and Jacobson (2008), S. 195 ff., beschrieben und ergibt sich durch zweimalige Integration. Man erhält die Koordinatenfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ als Funktionen der Zeit:

$$x(t) = v_0 t \cos(\phi_0), \qquad y(t) = y_0 + v_0 t \sin(\phi_0) - \frac{1}{2} g t^2$$

Löst man die erste Gleichung nach t auf

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos(\phi_0)}$$

und ersetzt t in der zweiten Gleichung, so erhält man die Flughöhe $y = y(t)$ in Abhängigkeit von der Flugweite $x = x(t)$:

$$y = y(x) = y_0 + x \tan(\phi_0) - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2(\phi_0)}$$

Wir setzen nun $y_0 = 0$.

Um ein Ziel zu einem bestimmten Erhebungswinkel ϕ_0 in einer bestimmten Entfernung R treffen zu können, muss $y(R) = 0$ gelten, somit

$$0 = y(R) = R \left(\tan(\phi_0) - \frac{1}{2} \frac{gR}{v_0^2 \cos^2(\phi_0)} \right)$$

Die Lösung $R = 0$ scheidet aus, also erhalten wir

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\phi_0)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $2 \sin(\phi_0) \cos(\phi_0) = \sin(2\phi_0)$ gilt nach dem Additionstheorem von Sinus und Kosinus.

Anders formuliert: Um ein Ziel in einer Entfernung R treffen zu können, ist ein Erhebungswinkel

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{Rg}{v_0^2})$$

notwendig.

Die maximale Flughöhe zu einem Erhebungswinkel ϕ_0 ergibt sich durch Differentiation von $y = y(x)$ nach x, Nullsetzen und anschließendes Einsetzen

$$y'(x) = \tan(\phi_0) - \frac{gx}{v_0^2\cos^2(\phi_0)} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{1}{g}\sin(\phi_0)\cos(\phi_0)v_0^2$$

also

$$y_{\max} = v_0^2\frac{\sin^2(\phi_0)}{g} - \frac{1}{2}\frac{gv_0^4\sin^2(\phi_0)}{v_0^2g^2} = \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2(\phi_0)$$

Weitere Beziehungen kann man z. B. im Buch von Carlucci and Jacobson (2008) nachlesen.

Kapitel 3

Modelle mit Luftwiderstand

3.1 Einführung

Auch hier handelt es sich um Modelle, bei denen die gesamte Masse in den Schwerpunkt verlagert wird, ein Drehimpuls wird außer Betracht gelassen. Im Gegensatz zum Vakuummodell wird aber nun der Luftwiderstand mit berücksichtigt.

Dies führt zu Luftwiderstandsgesetzen. Derartige Gesetze (Englisch: aerodynamic drag) sind von der Form

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_D \cdot v \cdot \mathbf{v}$$

mit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

und

ρ	Luftdichte
S	Geschossreferenzfläche, in erster Näherung der Geschossdurchmesser
C_D	dimensionsloser Luftwiderstandswert

Die Größe C_D hängt typischerweise von der Geschwindigkeit ab, man normiert in den meisten Fällen auf die Schallgeschwindigkeit und erhält damit C_D als Funktion der Mach-Zahl.

Hier gibt es eine Unzahl von Vorschlägen, für Sportschützen und Jäger scheint sich die G1-Luftwiderstandsfunktion durchgesetzt zu haben. Diverse Luftwiderstandsmodelle sind z. B. im Buch von McCoy (1999) angegeben, siehe S. 52 ff.

Die Werte liegen in Tabellenform vor, es ist naheliegend, sie zu interpolieren.

Die Größe ρ kann als Funktion von der Flughöhe dargestellt werden (Stichwort: barometrische Höhenformel), d. h. $\rho = \rho(y)$.

3.2 Das Differentialgleichungssystem

Hier wird das Vakuummodell entsprechend um die Luftwiderstandskraft erweitert.

Demzufolge hat der Kraftvektor **F** die Gestalt

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, x' \\ -\frac{1}{2}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, y' \end{pmatrix}$$

falls seitwärtige Auslenkungen nicht betrachtet werden sollen und im anderen Fall

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, x' \\ -\frac{1}{2}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, y' \\ -\frac{1}{2}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, z' \end{pmatrix}$$

Damit lautet das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}$$

oder ausgeschrieben im zweidimensionalen Fall

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, x' \\ -\dfrac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, y' \end{pmatrix}$$

und im dreidimensionalen Fall

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, x' \\ -\dfrac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, y' \\ -\dfrac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, z' \end{pmatrix}$$

Hinzu kommen noch Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & x'(0) = \cos(\phi_0) v_0 \\ y(0) = y_0 & y'(0) = \sin(\phi_0) v_0 \end{array}$$

und gegebenenfalls Anfangsbedingungen für die z-Koordinate (siehe McCoy (1999), S. 89).

Unter bestimmten vereinfachenden Annahmen gibt es analytische Lösungen, wir stellen sie im Anschluss vor.

Hier die Übertragung des Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung in ein Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

Wie im Vakuummodell setzen wir im zweidimensionalen Fall

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

also

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2}x' \\ -g - \frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2}y' \end{pmatrix} \qquad \text{oder } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

und im dreidimensionalen Fall

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

also

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}x' \\ -g - \frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}y' \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}z' \end{pmatrix} \qquad \text{oder } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Damit kann das Differentialgleichungssystem mit einem numerischen Verfahren wie Runge-Kutta gelöst werden.

3.3 Analytische Lösungen

Will man nicht den Weg über analytische Lösungen beschreiten, muss man gewisse Vereinfachungen des Differentialgleichungssystems akzeptieren. Dadurch gelangt man zwar zu analytischen Lösungen, d. h. kann die Differentialgleichungen lösen, hat aber das Problem, dass die Lösungen nur unter bestimmten Voraussetzungen Gültigkeit besitzen.

3.3.1 Flachbahntrajektorien

An der Herleitung orientieren wir uns an Carlucci and Jacobson (2008), S. 202 ff.

Ausgehend von dem dreidimensionalen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,x' \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,y' \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,z' \end{pmatrix}$$

setzen wir zuerst voraus, dass es keinen Seitenwind gibt, d. h. $v_z = 0$.

Weiterhin setzen wir voraus, dass das Verhältnis von vertikaler zu horizontaler Geschwindigkeit klein ist, d. h.

$$\left|\frac{v_y}{v_x}\right| = \tan(\phi) \ll 0,1$$

Dies bedeutet, dass Abschuss- und Fallwinkel kleiner als $5,7^\circ$ sind.

Unter diesen Annahmen ergibt sich für v:

$$v = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2} = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \approx \sqrt{v_x^2} = v_x$$

Damit wird aus dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_x &= -C_D^* v_x^2 \\ \frac{d}{dt}v_y &= -C_D^* v_x v_y - g \\ \frac{d}{dt}v_z &= 0 \end{aligned}$$

Lassen wir nun v_x von der Schussentfernung abhängen anstelle von der Zeit, dann erhalten wir nach der Kettenregel (hier ist die Differentiation nach der Schussweite von jetzt an durch einen $'$ angedeutet):

$$\begin{aligned} v_x v_x' &= -C_D^* v_x^2 \\ v_x v_y' &= -C_D^* v_x v_y - g \end{aligned}$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch v_x, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} v_x' &= -C_D^* v_x \\ v_y' &= -C_D^* v_y - \frac{g}{v_x} \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann durch Trennung der Veränderlichen sofort integriert werden und ergibt:

$$v_x = v_{x_0} \cdot \exp\left(-\int_0^x C_D^* \, dx_1 \right)$$

Mit konstantem C_D^* ergibt sich hieraus

$$v_x = v_{x_0} \cdot \exp(-C_D^* x)$$

Kennt man somit die Geschossgeschwindigkeit in einer Entfernung x, dann kann man hieraus bei gegebener Mündungsgeschwindigkeit v_{x_0} die Konstante C_D^* bestimmen.

Die zweite Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v_y und kann geschlossen gelöst werden (siehe z. B. Kamke (1969), S. 32, Satz).

Mit den Anfangsbedingungen $x = 0$, $t = 0$ und $v_y = v_{y_0}$ ergibt sich

$$v_y = \exp\left(-\int_0^x C_D^* dx_1 \right) \left\{ v_{y_0} - \int_0^x \left(\frac{g}{v_x(x_2)} \right) \exp\left(\int_0^{x_2} C_D^* \, dx_1 \right) dx_2 \right\}$$

Anmerkung

Hieraus kann man mit $\tan(\phi) = \dfrac{v_y}{v_x}$ folgern:

$$\tan(\phi) = \left[\tan(\phi_0) - \frac{1}{v_x} \int_0^x \left(\frac{g}{v_x} \right) \exp\left(\int_0^{x_2} C_D^* dx_1 \right) dx_2 \right]$$

wobei ϕ_0 der Abschusswinkel ist (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 205).

Eine nochmalige Integration ergibt

$$y = \int_0^t v_y dt \quad \text{und } x = \int_0^t v_x dt$$

Setzt man nun die obigen Ausdrücke für v_y und v_x ein, so erhält man mit den Anfangsbedingungen $x = 0$, $t = 0$ und $y = y_0$:

$$y = t \exp\left(-\int_0^x C_D^* dx_1\right) \left\{ v_{y_0} - \int_0^x \left(\frac{g}{v_x(x_2)}\right) \exp\left(\int_0^{x_2} C_D^* dx_1\right) dx_2 \right\} + y_0$$

Wir wollen nun noch eine Gleichung für t finden und beachten hierzu $v_x = \frac{d}{dt}x$. Von der Gleichung

$$v_x = v_{x_0} \cdot \exp\left(-\int_0^x C_D^* dx_1\right)$$

und durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$t = \frac{1}{v_{x_0}} \int_0^{x_0} \exp\left(\int_0^{x_2} C_D^* dx_1\right) dx_2$$

Um diese Integrale auswerten zu können, muss der Koeffizient C_D^* hinreichend einfach gebaut sein. Folgende Fälle sind deshalb von Interesse:

1. Der Koeffizient C_D^* ist konstant.
2. Der Koeffizient C_D^* ist umgekehrt proportional zur Mach- Zahl, d. h. $C_D^* = \frac{K_2}{M}$.
3. Der Koeffizient C_D^* ist umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Mach-Zahl, d. h. $C_D^* = \frac{K_3}{\sqrt{M}}$.

Die **Mach-Zahl** M ist dabei definiert als

$$M = \frac{v}{a}, \qquad a = \text{ Schallgeschwindigkeit}$$

Diese drei Fälle werden wir in den folgenden Abschnitten abhandeln.

3.3.1.1 Näherung für konstantes C_D^*

In diesem Abschnitt behandeln wir den Fall des konstanten Koeffizienten C_D^*, d. h.

$$C_D^* = \frac{\rho S}{2m} C_D = k_1$$

Damit ergibt sich für v_x:

$$v_x = v_{x_0} \exp\left(-k_1 \int_0^x dx_1\right) = v_{x_0} \exp(-k_1 x)$$

Die Flugzeit t erhalten wir aus

$$t = \frac{1}{v_{x_0}} \int_0^{x_0} \exp\left(\int_0^{x_2} C_D^* dx_1\right) dx_2$$

zu

$$t = \frac{1}{v_{x_0}} \int_0^{x} \exp\left(\int_0^{x_2} k_1 dx_1\right) dx_2 = \frac{1}{v_{x_0}} \int_0^{x} \exp(-k_1 x_2) dx_2$$

oder

$$t = \frac{1}{v_{x_0} k_1} (\exp(k_1 x) - \exp(0)) = \frac{1}{v_{x_0} k_1} (\exp(k_1 x) - 1)$$

Wir berechnen nun v_y. Dazu beachten wir, dass

$$\exp\left(-\int_0^x C_D^* dx_1\right) = \frac{v_x}{v_{x_0}}$$

und deshalb

$$\exp\left(\int_0^x C_D^* dx_1\right) = \frac{v_{x_0}}{v_x}$$

Da $\tan(\phi_0) = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}}$, erhalten wir weiter

$$v_y = v_x \left[\tan(\phi_0) - \frac{gt}{v_{x_0}} \left(1 + \frac{v_{x_0} k_1 t}{2}\right)\right]$$

Interessant sind noch der Fallwinkel ϕ und die Geschwindigkeit v_x in einer Entfernung x. Hierzu bestimmen wir die Konstante k_1 aus der Gleichung

$$v_x = v_{x_0} \exp\left(-k_1 \int\limits_0^x dx_1\right) = v_{x_0} \exp(-k_1 x)$$

zu

$$k_1 = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{v_{x_0}}{v_x}\right)$$

und setzen die Konstante k_1 in die Gleichung

$$t = \frac{1}{v_{x_0} k_1}(\exp(k_1 x) - \exp(0)) = \frac{1}{v_{x_0} k_1}(\exp(k_1 x) - 1)$$

ein. Wir erhalten mit $\tan(\phi) = \frac{v_y}{v_x}$:

$$\tan(\phi) = \tan(\phi_0) - \frac{gt}{v_{x_0}} \left[1 + \frac{v_{x_0} t}{2} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{v_{x_0}}{v_x}\right)\right]$$

Um nun noch die Flughöhe y in Abhängigkeit von der Flugweite x und der Fluggeschwindigkeit v_x zu berechnen, formen wir die Gleichung

$$\tan(\phi) = \left[\tan(\phi_0) - \frac{1}{v_x} \int\limits_0^x \left(\frac{g}{v_x}\right) \exp\left(\int\limits_0^{x_2} C_D^* dx_1\right) dx_2\right]$$

um mit dem konstanten Koeffizienten C_D^*, benützen die Gleichung für t und erhalten

$$y = y_0 + \tan(\phi_0) - \frac{g}{2} \left[\frac{x}{v_{x_0}} \frac{1}{\ln\left(\frac{v_{x_0}}{v_x}\right)}\right]^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v_{x_0}}{v_x} - 1\right)^2 + \left(\frac{v_{x_0}}{v_x} - 1\right) - \ln\left(\frac{v_{x_0}}{v_x}\right)\right]$$

Derartige Näherungen können interessant sein für Berechnungen im Unterschallbereich.

3.3.1.2 Näherung für C_D^* umgekehrt proportional zur Mach-zahl

Hier setzen wir

$$C_D^* = \frac{\rho S}{2m} \frac{K_2}{M}$$

Mit

$$k_2 = \frac{\rho S}{2m} K_2 a$$

wird aus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v_x &= -C_D^* v_x^2\\ \frac{d}{dt}v_y &= -C_D^* v_x v_y - g\\ \frac{d}{dt}v_z &= 0\end{aligned}$$

das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}v_x = -k_2 v_x \qquad \text{und } \frac{d}{dt}v_y = -k_2 v_y - g$$

oder umgeschrieben auf die Flugweite

$$v_x' = -C_D^* v_x$$

ergibt sich

$$v_x = v_{x_0}\exp(-k_2 t) \qquad \text{und} \qquad v_y = \left(v_{y_0} + \frac{g}{k_2}\right)\exp(-k_2 t) - \frac{g}{k_2}$$

Weiterhin kann man folgern

$$t = \frac{\frac{x}{v_{x_0}}\ln\left(\frac{v_{x_0}}{v_x}\right)}{\left(1 - \frac{v_x}{v_{x_0}}\right)}$$

$$\tan(\phi) = \tan(\phi_0) + \frac{gx}{v_{x_0}^2}\left(\frac{1 - \frac{v_{x_0}}{v_x}}{1 - \frac{v_x}{v_{x_0}}}\right)$$

$$y = y_0 + x\tan(\phi_0) - \left(\frac{gt^2}{2\ln\frac{v_{x_0}}{v_x}}\right)$$

Carlucci and Jacobson (2008), S. 209, bemerken, dass diese Beziehungen nützlich sind für Mach-Zahlen im Bereich $2{,}5 < M < 5$.

3.3.1.3 Näherung für C_D^* umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Mach-zahl

Hier setzen wir

$$C_D^* = \frac{\rho S}{2m} \frac{K_3}{\sqrt{M}}$$

Aufgrund der Beziehung

$$\sqrt{M} = \sqrt{\frac{v_x}{a}}$$

definieren wir eine neue Konstante k_3 durch

$$k_3 = \frac{\rho S}{2m} K_3 \sqrt{a}$$

wo dass wir schreiben können

$$C_D^* = \frac{\rho S}{2m} K_3 \sqrt{a} v_x = \frac{k_3}{\sqrt{v_x}}$$

Wir können damit (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 209 ff.) folgende Beziehungen ableiten:

$$\sqrt{v_x} = \frac{4 v_{x_0}}{(k_3 \sqrt{v_{x_0}} t + 2)}$$

$$v_y = -\frac{g}{(k_3 \sqrt{v_{x_0}} t + 2)} \left(\frac{k_3^2 v_{x_0} t^3}{3} + 2 k_3 \sqrt{v_{x_0}} t^2 + 4t \right) + \frac{4 v_{y_0}}{(k_3 \sqrt{v_{x_0}} t + 2)^2}$$

$$t = \frac{x}{v_{x_0}} \sqrt{\frac{v_{x_0}}{v_x}}$$

$$\tan(\phi) = \tan(\phi_0) - \frac{gt}{v_{x_0}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{v_{x_0}}{v_x} + \sqrt{\frac{v_{x_0}}{v_x}} + 1 \right) \right]$$

$$y = y_0 + x \tan(\phi_0) - \frac{1}{2} g t^2 \left[\frac{1}{3} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{v_x}{v_{x_0}}} \right) \right]$$

Carlucci and Jacobson (2008), S. 210, bemerken, dass diese Näherungen nützlich sind für Geschossgeschwindigkeiten etwa zwischen einem und zweieinhalb Mach.

3.3.2 Das Siacci-Verfahren

Das Siacci-Verfahren wurde von dem Italiener Francesco Siacci zwischen den Jahren 1880 und 1996 eingeführt und ist anwendbar für Flugbahnberechnung mit Abgangswinkeln von weniger als 15 Grad.

Es beruht auf folgenden drei Annahmen:

1. Der Höhenunterschied zwischen dem niedrigsten und dem höchsten Punkt der Flugbahn ist so gering, dass die Luftdichte als nahezu konstant angesehen werden kann.
2. Die Lufttemperatur entlang der Flugbahn ist nahezu konstant und unterscheidet sich unwesentlich von der Standardlufttemperatur.
3. Die Geschwindigkeit v kann gut angenähert werden durch die Horizontalgeschwindigkeit entlang der gesamten Flugbahn.

Der Ausgangspunkt für das Siacci-Verfahren sind folgende Grundgleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m}\rho S C_D v \cdot v_x \\ -g - \frac{1}{2m}\rho S C_D v \cdot v_y \end{pmatrix} \text{ mit } v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Substituiert man nun $v_x = v \cdot \cos(\phi_0)$, wobei ϕ_0 der Erhöhungswinkel ist, dann erhält man

$$\frac{dv}{dt}\cos(\phi_0) = -\frac{1}{2m}\rho S C_D \cdot \cos(\phi_0) v^2 \text{ oder } \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho S C_D \cdot v^2$$

Um das Verfahren von Siaci aufzusetzen, führen wir folgende Konstante ein

$$C_D^* = \frac{\rho \pi d^2 C_D}{8m} = \frac{\rho \pi C_D}{8C} \text{ mit } C = \frac{m}{d^2}$$

Wir setzen nun

$$G(v) = \frac{\rho \pi C_D v}{8}$$

dann ist

$$C_D^* = \frac{G(v)}{Cv}$$

Diese Gleichung können wir nun substituieren und invertieren und erhalten

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{C}{vG(v)}$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung für die Flugzeit erhalten. Ebenso können wir eine Gleichung für die Distanz erhalten:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = v_x \cdot \frac{dt}{dv} = v\cos(\phi_0)\left(\frac{-C}{vG(v)}\right)$$

oder

$$\frac{dx}{dv} = \frac{-C\cos(\phi_0)}{G(v)}$$

Entsprechend erhalten wir

$$\tan(\phi) = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{v}\sec(\phi_0)$$

und weiter

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dv}{dt}}{v}\sec(\phi_0) = -C_D^* v \sec(\phi_0)$$

$$v_y' = \frac{dv_y}{dx} = \frac{\frac{dv_y}{dt}}{v}\sec(\phi_0) = -(C_D^* v_y + \frac{g}{v})\sec(\phi_0)$$

$$\frac{d(\tan(\phi)}{dx} = \left[\frac{vv_y' - v_y v'}{v^2}\right]\sec(\phi_0)$$

Die vorletzten beiden Gleichungen können wir in die letzte Gleichung substituieren, wir erhalten nach Vereinfachungen:

$$\frac{d(\tan(\phi))}{dx} = -\frac{g}{v^2}\sec^2(\phi_0) \text{ oder } \frac{d(\tan(\phi))}{dv} = \frac{d(\tan(\phi))}{dx} \cdot \frac{dx}{dv}$$

Hieraus kann man ableiten:

$$\frac{d(\tan(\phi))}{dv} = \frac{gC\sec(\phi_0)}{v^2 G(v)}$$

Damit ergibt sich weiter

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = \frac{-C\cos(\phi_0)\tan(\phi)}{G(v)}$$

Man definiert nun die sogenannten vier primären **Siacci-Funktionen** (der Wert $v_{\max}$ ist hierbei größer als der größte zu erwartende Wert der Mündungsgeschwindigkeit):

$$
\begin{aligned}
T(v) &= \int_{v}^{v_{\max}} \frac{dv}{vG(v)} \\
S(v) &= \int_{v}^{v_{\max}} \frac{dv}{G(v)} \\
I(v) &= \int_{v}^{v_{\max}} \frac{2g\,dv}{v^2G(v)} \\
A(v) &= \int_{v}^{v_{\max}} \frac{I(v)dv}{G(v)}
\end{aligned}
$$

Diese Integrale sind tabelliert, somit können die obigen Gleichungen integriert werden. Wir erhalten

$$t = -C\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{vG(v)} = C[T(v) - T(v_0)]$$

Entsprechend kann man auch die Distanz ermitteln

$$x = -C\cos(\phi_0)\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{G(v)} = C\cos(\phi_0)[S(v) - S(v_0)]$$

wie auch den Winkel ϕ

$$\tan(\phi) = \tan(\phi_0) + C\sec(\phi_0)\int_{v_0}^{v} \frac{g\,dv}{v^2G(v)}$$

oder

$$\tan(\phi) = \tan(\phi_0) - \frac{1}{2}C\sec(\phi_0)[I(v) - I(v_0)]$$

Schließlich können wir noch die Flughöhe y ermitteln

$$y = x\left[\tan(\phi_0) + \frac{1}{2}CI(v_0)\sec(\phi_0)\right] - \frac{1}{2}C^2\left[A(v) - A(v_0)\right]$$

Tabellen für die vier Siacci-Funktionen in Abhängigkeit von den Luftwiderstandsgesetzen kann man im Buch von McCoy (1999) auf S. 114 ff. finden.

Ebenso sind dort Beispiele für die Anwendung angegeben.

3.4 Seitenwind

Um den Einfluss des Seitenwinds einzurechnen, setzen wir voraus, dass dieser durch einen konstanten Vektor von Windgeschwindigkeiten dargestellt werden kann, d. h.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Da hier eine zweidimensionale Betrachtungsweise keinen Sinn macht, betrachten wir nur das dreidimensionale Differentialgleichungssystem.

Hierbei ersetzen wir den Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

durch den Differenzvektor $\mathbf{x}' - \mathbf{w}$, somit mit $\mathbf{X}' := \mathbf{x}' - \mathbf{w}$:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' - w_x \\ y' - w_y \\ z' - w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix}$$

Wir erhalten dann für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x'-w_x)^2 + (y'-w_y)^2 + (z'-w_z)^2}(x'-w_x) \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x'-w_x)^2 + (y'-w_y)^2 + (z'-w_z)^2}(y'-w_y) \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x'-w_x)^2 + (y'-w_y)^2 + (z'-w_z)^2}(z'-w_z) \end{pmatrix}$$

Wir erhalten damit ein Differentialgleichungssystem für den Differenzvektor $\mathbf{x}' - \mathbf{w}$.

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung kann man analog umschreiben wie vorher auf ein System erster Ordnung. Damit kann das Problem ebenfalls mit numerischen Verfahren behandelt werden.

Weitere Informationen finden sich im Buch von Carlucci and Jacobson (2008).

Wir schreiben nun das obige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x'-w_x)^2+(y'-w_y)^2+(z'-w_z)^2}(x'-w_x) \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x'-w_x)^2+(y'-w_y)^2+(z'-w_z)^2}(y'-w_y) \\ -\frac{1}{2m}\rho S C_D \sqrt{(x'-w_x)^2+(y'-w_y)^2+(z'-w_z)^2}(z'-w_z) \end{pmatrix}$$

weiter um und setzen

$$\hat{C}_D^* = \frac{\rho S C_D}{2m}, \quad \tilde{v} = \sqrt{(x'-w_x)^2+(y'-w_y)^2+(z'-w_z)^2}$$

Damit können wir das Differentialgleichungssystem übersichtlich schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_x &= -\hat{C}_D^*\tilde{v}(v_x-w_x) \\ \frac{d}{dt}v_y &= -\hat{C}_D^*\tilde{v}(v_y-w_y)-g \\ \frac{d}{dt}v_z &= -\hat{C}_D^*\tilde{v}(v_z-w_z) \end{aligned}$$

Auch hier kann man Flachbahntrajektorien betrachten (siehe McCoy (1999), S. 158 ff. und Carlucci and Jacobson (2008), S. 213 ff.) wie auch den Effekt eines reinen Seitenwindes (dann ist $w_x = w_y = 0$, ebenso zu finden an den angegebenen Referenzen).

3.5 Der Coriolis-Effekt

Wir wollen den Effekt der Erdrotation mit in Betracht ziehen.

Die Coriolis-Beschleunigung ist definiert durch

$$2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v})_{xyz}$$

Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit die der Erde und die Geschwindigkeit des Projektils diejenige relativ zu unserer Feuerposition (und deshalb zu der Erde), welche sich mit dem $x-y-z$ Koordinatensystem bewegt.

Damit die obige Gleichung für uns nützlich ist, haben wir diese auf die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ der Erde umzuschreiben in Abhängigkeit von unserem $x-y-z$ Koordinatensystem.

In unserem sich bewegenden Koordinatensystem ist aber $\boldsymbol{\Omega}$ gleich

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\cos(L)\sin(AZ)\mathbf{i} + \Omega\sin(L)\mathbf{j} - \Omega\cos(L)\sin(AZ)\mathbf{k}$$

wenn L die geographische Breite (positiv auf der nördlichen, negativ auf der südlichen Hemisphäre), und AZ die geographische Länge (gemessen im Uhrzeigersinn von Norden) sind und Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Polachsen ($= 0{,}00007292$ rad/s).

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ergibt sich in dem Basissystem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ zu

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{y} + v_z\mathbf{k}$$

so dass

$$2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v})_{xyz} = 2\Omega \begin{pmatrix} v_z \sin(L) + v_y \cos(L)\sin(AZ) \\ -v_z \cos(L)\cos(AZ) - v_x \cos(L)\sin(AZ) \\ v_y \cos(L)\cos(AZ) - v_x \sin(L) \end{pmatrix}$$

Als Zusatzterm erhalten wir somit für unsere Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{\Lambda} = -2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v})_{xyz} = 2\Omega \begin{pmatrix} -v_z \sin(L) - v_y \cos(L)\sin(AZ) \\ v_z \cos(L)\cos(AZ) + v_x \cos(L)\sin(AZ) \\ -v_y \cos(L)\cos(AZ) + v_x \sin(L) \end{pmatrix}$$

Im Fall des Vakuummodells müssten die Differentialgleichungen wie folgt modifiziert werden:

$$\frac{d}{dt}v_x = 2\Omega(-v_y \cos(L)\sin(AZ) - v_z \sin(L))$$

$$\frac{d}{dt}v_y = 2\Omega(v_x \cos(L)\sin(AZ) + v_z \cos(L)\cos(AZ)) - g$$

$$\frac{d}{dt}v_z = 2\Omega(v_x \sin(L) - v_y \cos(L)\cos(AZ))$$

Betrachten wir einen Spezialfall, nämlich den, wo wir vertikal feuern (d. h. $v_x = v_z = 0$) und auf einer geographischen Länge von $90°$, d. h. $AZ = 90°$.

Damit lautet unser Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}v_x = -2\Omega v_y \cos(L)$$

$$\frac{d}{dt}v_y = -g$$

$$\frac{d}{dt}v_z = 0$$

Dieses Differentialgleichungssystem können wir natürlich integrieren, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -2\Omega\frac{dy}{dt}\cos(L)\\ v_x &= -2\Omega y\cos(L)+C\end{aligned}$$

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, beachten wir, dass für $y = y_0$ gilt, dass $v_x = 0$, so dass

$$v_x = -2\Omega y\cos(L) + 2\Omega y_0\cos(L) = -2\Omega\cos(L)(y-y_0)$$

Aufgrund unseres Koordinatensystems wird somit ein Geschoss, welches senkrecht hochgeschossen wird, in westlicher Richtung abdriften und, wenn es senkrecht nach unten abgeschossen wird, in östlicher Richtung wegdriften.

Wir integrieren nun die Gleichung

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

dies ergibt

$$v_y = -gt + C$$

oder mit der Anfangsbedingung $v_y = v_{y_0}$ zur Zeit $t = 0$:

$$v_y = v_{y_0} - gt$$

Eine nochmalige Integration mit der Anfangsbedingung $y = y_0$ zur Zeit $t = 0$ ergibt dann

$$y = v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

oder

$$y - y_0 = v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = -2\Omega\cos(L)\left(v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

und hieraus durch weitere Integration mit $x = 0$ zur Zeit $t = 0$:

$$x = -\Omega\cos(L)\left(v_{y_0}t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right)$$

Wir können nun noch den Fall betrachten, dass

$$v_y \ll v_x \qquad \text{und } v_z \ll v_x$$

und dass wir die Flachbahn-Trajektorien untersuchen wollen.

Aus den allgemeinen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}v_x = 2\Omega(-v_y \cos(L)\sin(AZ) - v_z \sin(L))$$

$$\frac{d}{dt}v_y = 2\Omega(v_x \cos(L)\sin(AZ) + v_z \cos(L)\cos(AZ)) - g$$

$$\frac{d}{dt}v_z = 2\Omega(v_x \sin(L) - v_y \cos(L)\cos(AZ))$$

erhalten wir dann

$$\frac{dv_x}{dt} \approx 0$$

$$\frac{dv_y}{dt} \approx 2\Omega v_x \cos(L)\sin(AZ) - g$$

$$\frac{dv_z}{dt} \approx 2\Omega v_x \sin(L)$$

Die erste Gleichung ergibt mit der Anfangsbedingung $v_x = v_{x_0}$ zur Zeit $t = 0$:

$$v_x \approx v_{x_0}$$

Mit der Anfangsbedingung $v_y = v_{y_0}$ zur Zeit $t = 0$ ergibt sich weiter

$$v_y \approx v_{y_0} - gt\left[1 - \left(\frac{2\Omega v_{x_0}}{g}\right)\cos(L)\sin(AZ)\right]$$

und mit der Anfangsbedingung $v_z = 0$ zur Zeit $t = 0$:

$$v_z \approx 2\Omega v_{x_0} t \sin(L)$$

Eine nochmalige Integration dieser Gleichungen ergibt schließlich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x = 0$, $y = y_0$ und $z = 0$ zur Zeit $t = 0$:

$$x \approx v_{x_0} t$$

$$y \approx y_0 + v_{y_0} t - \frac{gt^2}{2} \left[1 - \left(\frac{2\Omega v_{x_0}}{g} \right) \cos(L) \sin(AZ) \right]$$

$$z \approx \Omega v_{x_0} t^2 \sin(L)$$

Wir können nun noch die Zeit eliminieren

$$t \approx \frac{x}{v_{x_0}}$$

und erhalten

$$y \approx y_0 + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} x - \frac{gx^2}{2v_{x_0}^2} \left[1 - \left(\frac{2\Omega v_{x_0}}{g} \right) \cos(L) \sin(AZ) \right]$$

$$z \approx \frac{\Omega x^2}{v_{x_0}} \sin(L)$$

Beachtet man nun noch, dass $\tan(\phi_0) = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}}$, dann ist ein Vergleich mit und ohne Coriolis-Kraft sicherlich von Interesse:

$$y \approx y_0 + x \tan(\phi_0) - \frac{gx^2}{2v_0^2} \qquad \text{ohne Coriolis-Kraft}$$

$$y \approx y_0 + x \tan(\phi_0) - \frac{gx^2}{2v_{x_0}^2} \left[1 - \left(\frac{2\Omega v_{x_0}}{g} \right) \cos(L) \sin(AZ) \right] \qquad \text{mit Coriolis-Kraft}$$

Aufgrund dieses Vergleichs liegt es nahe, einen Korrekturfaktor, den sogenannten **Coriolis-Faktor**

$$f_C := \left[1 - \left(\frac{2\Omega v_{x_0}}{g} \right) \cos(L) \sin(AZ) \right]$$

einzuführen. Damit können wir unsere letzte Gleichung bequem schreiben:

$$y \approx y_0 + x \tan(\phi_0) - f_C \frac{gx^2}{2v_{x_0}^2}$$

Man sieht an dem Faktor f_C folgendes:

Da $\cos(L)$ immer zwischen 0 und 1 liegt für alle möglichen Längen, hat es keinen Effekt, wenn wir nach Norden oder Süden feuern.

Feuern wir dagegen nach Osten ($AZ = 90°$), dann schwächt der Coriolis-Effekt die Graviation ab, wir treffen zu hoch. In westlicher Richtung ist es umgekehrt.

Da $\sin(L)$ immer zwischen $+1$ und -1 liegt, wird ein Abweichen nach rechts oder links erfolgen, was von der Hemisphäre abhängt, auf der das Abfeuern erfolgt.

Kapitel 4

Modelle mit Translation und zusätzlicher Rotation

4.1 Das 6 Freiheitsgrade-Modell

Bei diesem modellmäßigen Ansatz kommt zusätzlich zu der Translation (gedanklich ist das gesamte Geschoss in einem mathematischen Punkt vereinigt) die Rotation des Geschosses hinzu.

Der Grund liegt darin, dass häufig das Geschoss durch einen Drall stabilisiert wird, um ein Überschlagen während des Fluges zu verhindern.

Dadurch wird die Bewegung des Geschosses durch zwei miteinander gekoppelte Differentialgleichungssysteme beschrieben, eines für die Translation und eines, welches sich auf die Rotation und die hierdurch vorhandenen Kräfte bezieht.

Dies ist dann das sogenannte 6 Freiheitsgrade-Modell.

4.1.1 Das Differentialgleichungssystem

Beim 6-Freiheitsgrade-Modell kommt zusätzlich hinzu, dass auch ein möglicher Drall des Geschosses in Betracht gezogen wird.

Hatten wir bisher als Differentialgleichungssystem ganz allgemein

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

und

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_i + m\,\mathbf{g} + m\,\boldsymbol{\Lambda}$$

wobei

m	Masse des Geschosses
$\mathbf{v}$	Vektor der Geschwindigkeit
$\mathbf{a}$	Vektor der Beschleunigung
$\sum \mathbf{F}_i$	vektorielle Summe der aerodynamischen Kräfte
$\mathbf{g}$	Vektor der Erdbeschleunigung
$\mathbf{\Lambda}$	Vektor der Coriolisbeschleunigung aufgrund der Erdrotation

dann kommt nun noch eine Gleichung für die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathbf{H}$ des Geschosses hinzu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H} = \sum \mathbf{M}_i$$

Hierbei ist $\sum \mathbf{M}_i$ die Summe über alle aerodynamischen Momente.

Hierbei werden Kräfte und Drehmomente infolge von Raketentriebwerken außer Betracht gelassen (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 231 ff.).

Das Geschoss wird als symmetrisch vorausgesetzt, damit ist jede Achse transversal zur Längsachse durch den Schwerpunkt eine **Hauptträgheitsachse** (siehe z. B. Reineker et al. (2006), S. 331 ff.).

Natürlich ist die Längsachse selbst ebenfalls eine Hauptträgheitsachse. Hier nun die Definition des **Trägheitstensors**

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

wobei die Komponenten des Trägheitstensors definiert sind ($\rho(x_1, x_2, x_3)$ sei die Massendichte) durch

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3)(\delta_{ij}[x_k x_k - x_i x_j] d(x_1, x_2, x_3)$$

(siehe z. B. Reineker et al. (2006), S. 331).

Bekannt ist, dass auf diesen Trägheitstensor eine Hauptachsentransformation angewendet werden kann, so dass der Trägheitstensor (als symmetrische Matrix) auf Diagonalgestalt transformiert wird. D. h. wir können eine neue Basis (bestehend aus Eigenvektoren) und damit ein neues Koordinatensystem finden, bzgl. dessen der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat. Die neue Basis besteht dann aus den Eigenvektoren des Trägheitstensors. Nachlesen kann man dies in jedem Buch über lineare Algebra, siehe zum Beispiel Fischer (2002) oder Koecher (2003).

In dem neuen Koordinatensystem ist der Trägheitstensor von der Gestalt

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

In diesem neuen Koordinatensystem definieren wir Einheitsvektoren **i**, **j** und **k**, die alle entlang der Hauptachsen des Geschosses liegen.

Das gesamte Drehmoment des Geschosses können wir nun als Summe von zwei Vektoren ausdrücken, nämlich das Drehmoment um **i** und das Drehmoment um irgendeine Achse senkrecht zu **i** durch den Schwerpunkt.

Da normalerweise die **i**-Achse die polare Achse genannt wird, bezeichnet man das polare Trägheitsmoment mit I_P.

Aufgrund der Symmetrie des Geschosses werden die anderen Trägheitsmomente des Geschosses senkrecht zu **i** als transversale Trägheitsmoments $I_y = I_z = I_T$ bezeichnet.

Damit können wir den Trägheitstensor umschreiben zu

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & I_T \end{pmatrix}$$

Ist nun die Umdrehungsgeschwindigkeit des Geschosses p, dann ist das Drehmoment um die polare Achse gleich

$$\mathbf{H}_P = I_P \cdot p \cdot \mathbf{i}$$

Das transversale Drehmoment um eine der transversalen Achsen ist gleich

$$\mathbf{H}_T = I_T \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{d}{dt}\mathbf{i} \right)$$

Damit ergibt sich das gesamte Drehmoment als Summe der beiden Drehmomente

$$\mathbf{H} = I_P \cdot p \cdot \mathbf{i} + I_T \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{d}{dt}\mathbf{i} \right)$$

Durch Übergang zu $\mathbf{h} = \dfrac{\mathbf{H}}{I_T}$ erhalten wir

$$\mathbf{h} = \frac{I_P \cdot p}{I_T} \cdot \mathbf{i} + \left(\mathbf{i} \times \frac{d}{dt}\mathbf{i} \right)$$

Wir differenzieren nun diese Gleichung bzgl t und erhalten

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} = \frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{I_P p}{I_T}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right) + \left(\mathbf{i} \times \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} \right)$$

Das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst ist gleich Null, somit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} = \frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{I_P p}{I_T}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i} \times \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right)$$

Wir nützen nun folgende Relationen der Einheitsvektoren **i**, **j** und **k** aus

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= 1 \\
\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{0} \\
\mathbf{i}\times\mathbf{i} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{i}\times\mathbf{j} &= \mathbf{k} \\
\mathbf{k}\times\mathbf{i} &= \mathbf{j} \\
\mathbf{j}\times\mathbf{k} &= \mathbf{i} \\
(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{i} &= \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich weiter

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{i} = \left[\frac{I_P p}{I_T}\mathbf{i} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)\right]\cdot\mathbf{i} = \frac{I_P p}{I_T}$$

und

$$\mathbf{h}\times\mathbf{i} = \left[\frac{I_P p}{I_T}\mathbf{i} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)\right]\times\mathbf{i} = \frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

Wir wollen nun alle Kräfte und Momente, die auf das Geschoss einwirken, auflisten und in die Grundgleichungen

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_i + m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{\Lambda}$$

und

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H} = \sum \mathbf{M}_i$$

einfügen. Beginnen wir mit den äußeren Kräften.

Da ist zuerst die Luftwiderstandskraft

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2}\rho\, S C_D\, v\mathbf{v}$$

mit $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$, welche wir schon früher angesprochen hatten.

Die Liftkraft (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 173 ff.)

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{2}\rho\, S C_{L_\alpha}\left[\mathbf{v}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{v})\right]$$

Diese kann mit Hilfe der Vektoridentität

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

auch, da $\mathbf{v} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{v}) = v^2\mathbf{i} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{v}$, als

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{2}\rho\, S C_{L_\alpha}[v^2\mathbf{i} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{v}]$$

geschrieben werden.

Dann haben wir die Magnus-Kraft (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 175) mit den entsprechenden Koeffizienten $C_{N_{p\alpha}}$

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{2}\rho S v \left(\frac{pd}{v}\right) C_{N_{p\alpha}}(\mathbf{v} \times \mathbf{i})$$

Nun ist $p = \dfrac{I_T}{I_P}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{i})$ und, da $\mathbf{v} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{v}$, erhalten wir für die Magnus-Kraft

$$\mathbf{F}_M = -\frac{1}{2}\rho S d \left(\frac{I_T}{I_P}\right) C_{N_{p\alpha}}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{v})$$

Die letzte äußere Kraft ist die Pitch-Dämpfungskraft (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 176 ff.)

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{2}\rho v S d \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right) C_{N_q} + \frac{1}{2}\rho v S d C_{N_\alpha}\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)$$

wobei $\mathbf{v}'$ der Einheitsvektor entlang des Geschwindigkeitsvektors sein soll.

Falls wir voraussetzen, dass $\dfrac{d\mathbf{v}'}{dt} \ll \dfrac{d\mathbf{i}}{dt}$ (dies bedeutet, dass die Rate, mit der der Geschwindigkeitsvektor rotiert, sehr viel kleiner ist als die Rate, mit der die Achse des Geschosses sich bewegt), dann erhalten wir

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{2}\rho v S d C_{N_q}\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right) + \frac{1}{2}\rho v S d C_{N_\alpha}\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)$$

Mit der Gleichung

$$\mathbf{h} \times \mathbf{i} = \left[\frac{I_P p}{I_T}\mathbf{i} + \left(\mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)\right] \times \mathbf{i} = \frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

können wir diese Beziehung umschreiben zu:

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{2}\rho v S d (C_{N_q} + C_{N_\alpha})(\mathbf{h} \times \mathbf{i})$$

Damit ergibt sich für das vektoriell geschriebene Differentialgleichungssystem

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_i + m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{\Lambda}$$

insgesamt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_D + \frac{1}{m}\mathbf{F}_L + \frac{1}{m}\mathbf{F}_M + \frac{1}{m}\mathbf{F}_P + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

Kommen wir nun zu den Kräften, die die Rotation des Geschosses betreffen.

Da ist das Spin-Dämpfungsmoment (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 173)

$$\mathbf{M}_S = \frac{1}{2}\rho v^2 Sd\left(\frac{pd}{v}\right)C_{l_p}\mathbf{i}$$

welches wir umschreiben können zu

$$\mathbf{M}_S = \frac{1}{2}\rho v S d^2\left(\frac{I_T}{I_P}\right)C_{l_p}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}$$

Ferner gibt es das Roll-Moment (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 173)

$$\mathbf{M}_R = \frac{1}{2}\rho v^2 Sd\delta_F C_{l_\delta}\mathbf{i}$$

wie auch das Overturning-Moment (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 174 ff.)

$$\mathbf{M}_\alpha = \frac{1}{2}\rho S d v C_{M_\alpha}(\mathbf{v}\times\mathbf{i})$$

Dann gibt es das Magnus-Moment (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 175)

$$\mathbf{M}_{M_{p\alpha}} = \frac{1}{2}\rho v S d\left(\frac{pd}{v}\right)C_{M_{p\alpha}}[\mathbf{h}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{h}] = \frac{1}{2}\rho S d^2 C_{M_{p\alpha}}\frac{I_T}{I_P}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Zuletzt haben wir das Pitchdämpfungsmoment (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 177 ff.)

$$\mathbf{M}_q = \frac{1}{2}\rho v S d^2(C_{M_q} + C_{M_{\dot\alpha}})[\mathbf{h}-(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Dividieren wir nun die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_\alpha + \mathbf{M}_{p\alpha} + \mathbf{M}_q$$

durch I_T, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} = \frac{\mathbf{M}_S}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_R}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_\alpha}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_{p\alpha}}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_q}{I_T}$$

$$= \frac{\rho v S d^2 C_{lp}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}\mathbf{i} + \frac{\rho v S d C_{M_\alpha}}{2I_T}(\mathbf{v}\times\mathbf{i})$$

$$+ \frac{\rho v S d^2 C_{M_{p\alpha}}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \frac{\rho v S d^2 (C_{M_q} + C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Damit haben wir zwei (hochgradig) gekoppelte Differentialgleichungssysteme

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_D + \frac{1}{m}\mathbf{F}_L + \frac{1}{m}\mathbf{F}_M + \frac{1}{m}\mathbf{F}_P + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda} =: \mathbf{F}$$

und

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} = \frac{\mathbf{M}_S}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_R}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_\alpha}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_{p\alpha}}{I_T} + \frac{\mathbf{M}_q}{I_T} =: \mathbf{M}$$

mit 6 Freiheitsgraden, was den Namen erklärt.

Wir definieren nun

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x' \\ y' \\ z' \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \\ h_1' \\ h_2' \\ h_3' \end{pmatrix}, \qquad \text{wenn } \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Definieren wir nun noch

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

dann können wir die beiden Differentialgleichungssysteme als ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung schreiben:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Dieses (gekoppelte) Differentialgleichungssystem können wir wieder mit einem numerischen Verfahren wie das Verfahren von Runge-Kutta etc. behandeln.

Die ersten drei Komponenten von $\mathbf{x}$ ergeben dann die Flugweite, die Flughöhe und die Seitenabweichung, die nächsten drei Komponenten die jeweiligen Fluggeschwindigkeiten und die letzten drei Komponenten die zugehörigen Drehmomente, jeweils in Abhängigkeit von der Zeit.

Wir schreiben nun das Differentialgleichungssystem weiter um. Wir erinnern daran, dass $\mathbf{i}$ der Einheitsvektor ist, der zur Symmetrieachse des Geschosses zugehörig ist.

Bezeichnen wir mit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die zu x, y und z zugehörigen Einheitsvektoren (welche natürlich dadurch zum Inertialsystem zugehörig sind), dann können wir folgende Beziehungen festhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} &= h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{i} &= i_1\mathbf{e}_1 + i_2\mathbf{e}_2 + i_3\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{v} &= v_x\mathbf{e}_1 + v_y\mathbf{e}_2 + y_z\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{w} &= w_x\mathbf{e}_1 + w_y\mathbf{e}_2 + w_z\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x)\mathbf{e}_1 + (v_y - w_y)\mathbf{e}_2 + (v_z - w_z)\mathbf{e}_3$$

so dass

$$V_x = (v_x - w_x), \quad V_y = (v_y - w_y), \quad V_z = (v_z - w_z)$$

mit

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Wir ersetzen nun in der Gleichung für das Magnus-Moment

$$\mathbf{M}_{M_{p\alpha}} = \frac{1}{2}\rho S d^2 C_{M_{p\alpha}} \frac{I_T}{I_P}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

$\mathbf{v}$ durch $\mathbf{V}$ wie auch in der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} == \frac{\rho v S d^2 C_{l_P}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + \frac{\rho v^2 S d\,\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}\mathbf{i} + \frac{\rho v S d C_{M_\alpha}}{2I_T}(\mathbf{v}\times\mathbf{i})$$

$$+\frac{\rho v S d^2 C_{M_{p\alpha}}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]+\frac{\rho v S d^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}[\mathbf{h}-(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Damit erhalten wir folgendes gekoppelte ausgeschriebene Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\rho VSC_D}{2m}\mathbf{V}+\frac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m}[V^2\mathbf{i}-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{V}]-\frac{\rho SdC_{N_{p\alpha}}}{2m}\left(\frac{I_T}{I_P}\right)(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V})$$

$$+\frac{\rho VSd(C_{N_q}+C_{N_\alpha})}{2m}(\mathbf{h}\times\mathbf{i})+\mathbf{g}+\mathbf{\Lambda}$$

und

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt}=\frac{\rho VSd^2C_{l_p}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+\frac{\rho V^2Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}\mathbf{i}+\frac{\rho VSdC_{M_\alpha}}{2I_T}(\mathbf{V}\times\mathbf{i})$$

$$+\frac{\rho VSd^2C_{M_{p\alpha}}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V}-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]+\frac{\rho VSd^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}[\mathbf{h}-(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Wir brechen nun die Gleichungen auf Komponenten herunter. Hierzu benötigen wir einige Vektorrelationen.

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{V}=(V_x^2i_1+V_xV_yi_2+V_xV_zi_3)\mathbf{e}_1+(V_xV_yi_1+V_y^2i_2+V_yV_zi_3)\mathbf{e}_2+(V_xV_zi_1+V_yV_zi_2+V_z^3i_3)\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})=V_xi_1+V_yi_2+V_zi_3$$

$$\cos(\alpha_t)=\frac{(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})}{V}=\frac{V_xi_1+V_yi_2+V_zi_3}{V}$$

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})=h_1i_1+h_2i_2+h_3i_3$$

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{V})=(i_2V_z-i_3V_y)\mathbf{e}_1+(i_3v_x-i_1V_z)\mathbf{e}_2+(i_1V_y-i_2V_x)\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V})=(h_1i_1+h_2i_2+h_3i_3)[(i_2V_z-i_3V_y)\mathbf{e}_1+(i_3V_x-i_1V_z)\mathbf{e}_2+(i_1V_y-i_2V_x)\mathbf{e}_3]$$

Hieraus ergibt sich mit $(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})=\frac{I_Pp}{I_T}$:

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V})=\frac{I_Pp}{I_T}(i_2V_z-i_3V_y)\mathbf{e}_1+\frac{I_Pp}{I_T}(i_3V_x-i_1V_z)\mathbf{e}_2+\frac{I_Pp}{I_T}(i_1V_y-i_2V_x)\mathbf{e}_3]$$

Entsprechend haben wir

$$(\mathbf{h}\times\mathbf{i}) = (h_2i_3 - h_3i_2)\mathbf{e}_1 + (h_3i_1 - h_1i_3)\mathbf{e}_2 + (h_1i_2 - h_2i_1)\mathbf{e}_3$$

Mit Hilfe von

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{i} = \left[\frac{I_P p}{I_T}\mathbf{i} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)\right]\cdot\mathbf{i} = \frac{I_P p}{I_T}$$

erhalten wir

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = \frac{I_P p}{I_T}i_1\mathbf{e}_1 + \frac{I_P p}{I_T}i_2\mathbf{e}_2 + \frac{I_P p}{I_T}i_3\mathbf{e}_3$$

Und schließlich benötigen wir noch

$$(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) = (i_3V_y - i_2V_z)\mathbf{e}_1 + (i_1V_z - i_3V_x)\mathbf{e}_2 + (i_2V_x - i_1V_y)\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = (V_xi_1 + V_yi_2 + V_Zi_3)(i_1\mathbf{e}_1 + i_2\mathbf{e}_2 + i_3\mathbf{e}_3)$$

oder

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = (V_xi_1^2 + V_yi_1i_2 + V_zi_1i_2)\mathbf{e}_1 + (V_xi_1i_2 + V_yi_2^2 + V_zi_2i_3)\mathbf{e}_2 + (V_xi_1i_3 + V_yi_2i_3 + V_zi_3^2)\mathbf{e}_3$$

Wir können nun das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\rho VSC_D}{2m}\mathbf{V} + \frac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m}[V^2\mathbf{i} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{V}] - \frac{\rho SdC_{N_{p\alpha}}}{2m}\left(\frac{I_T}{I_P}\right)(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V})$$

$$+\frac{\rho VSd(C_{N_q} + C_{N_\alpha})}{2m}(\mathbf{h}\times\mathbf{i}) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

betrachten und erhalten ausgeschrieben

$$\frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{e}_3 =$$

$$= -\frac{\rho VSC_D}{2m}(V_x\mathbf{e}_1 + V_y\mathbf{e}_2 + V_z\mathbf{e}_3)$$

$$+\frac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m}[V^2i_1\mathbf{e}_1 + V^2i_2\mathbf{e}_2 + V^2i_3\mathbf{e}_3 - V\cos(\alpha_t)(V_x\mathbf{e}_1 + V_y\mathbf{e}_2 + V_z\mathbf{e}_3)]$$

$$-\frac{\rho SdC_{N_{p\alpha}}}{2m}\left(\frac{I_T}{I_P}\right)\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)[(V_z i_2 - V_y i_3)\mathbf{e}_1 + (V_x i_3 - V_z i_1)\mathbf{e}_2 + (V_y i_1 - V_x i_2)\mathbf{e}_3]$$

$$+\frac{\rho VSd(C_{N_q} + C_{N_\alpha})}{2m}[(h_2 i_3 - h_3 i_2)\mathbf{e}_1 + (h_3 i_1 - h_1 i_3)\mathbf{e}_2 + (h_1 i_2 - h_2 i_1)\mathbf{e}_3]$$

$$+g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2 + g_3\mathbf{e}_3 + \Lambda_1\mathbf{e}_1 + \Lambda_2\mathbf{e}_2 + \Lambda_3\mathbf{e}_3$$

Analog erhalten wir

$$\frac{dh_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dh_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dh_3}{dt}\mathbf{e}_3 =$$

$$= \frac{\rho VSd^2 C_{lp}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)(i_1\mathbf{e}_1 + i_2\mathbf{e}_2 + i_3\mathbf{e}_3)$$

$$+\frac{\rho V^2 Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}(i_1\mathbf{e}_1 + i_2\mathbf{e}_2 + i_3\mathbf{e}_3)$$

$$+\frac{\rho VSdC_{M_\alpha}}{2I_T}[(V_y i_3 - V_z i_2)\mathbf{e}_1 + (V_z i_1 - V_x i_3)\mathbf{e}_2 + (V_x i_2 - V_y i_1)\mathbf{e}_3]$$

$$+\frac{\rho Sd^2 C_{M_{p\alpha}}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)[(V_x\mathbf{e}_1 + V_y\mathbf{e}_2 + V_z\mathbf{e}_3) - V\cos(\alpha_t)(i_1\mathbf{e}_1 + i_2\mathbf{e}_2 + i_3\mathbf{e}_3)]$$

$$+\frac{\rho VSd^2(C_{M_q} + C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}\left[(h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3) - \left(\frac{I_P p}{I_T}\right)(i_1\mathbf{e}_1 + i_2\mathbf{e}_2 + i_3\mathbf{e}_3)\right]$$

Für die Komponenten erhalten wir damit

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho VSC_D}{2m}V_x + \frac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m}[V^2 i_1 - V\cos(\alpha_t V_x] - \frac{\rho SdC_{N_{p\alpha}} p}{2m}[(V_z i_2 - V_y i_3)$$

$$+\frac{\rho VSd(C_{N_q} + C_{N_\alpha})}{2m}(h_2 i_3 - h_3 i_2) + g_1 + \Lambda_1$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\rho VSC_D}{2m}V_y + \frac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m}[V^2 i_2 - V\cos(\alpha_t)V_y] - \frac{\rho SdC_{N_{p\alpha}} p}{2m}(V_x i_3 - V_z i_1)$$

$$+\frac{\rho VSd(C_{N_q} + C_{N_\alpha})}{2m}(h_3 i_1 - h_1 i_3) + g_2 + \Lambda_2$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\rho VSC_D}{2m}V_z + \frac{\rho SC_{L\alpha}}{2m}[V^2 i_3 - V\cos(\alpha_t)V_z] - \frac{\rho SdC_{Np\alpha}p}{2m}(V_y i_1 - V_x i_2)$$

$$+\frac{\rho VSd(C_{N_q}+C_{N_\alpha})}{2m}(h_1 i_2 - h_2 i_1) + g_3 + \Lambda_3$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\rho VSd^2 C_{lp}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)i_1 + \frac{\rho V^2 Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}i_1 + \frac{\rho VSdC_{M\alpha}}{2I_T}(V_y i_3 - V_z i_2)$$

$$+\frac{\rho Sd^2 C_{Mp\alpha}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)[V_x - V\cos(\alpha_t)i_1] + \frac{\rho VSd^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}\left[(h_1 - \left(\frac{I_p p}{I_T}\right)i_1\right]$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho VSd^2 C_{lp}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)i_2 + \frac{\rho V^2 Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}i_2 + \frac{\rho VSdC_{M\alpha}}{2I_T}(V_z i_1 - V_x i_3)$$

$$+\frac{\rho Sd^2 C_{Mp\alpha}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)[V_y - V\cos(\alpha_t)i_2] + \frac{\rho VSd^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}\left[h_2 - \left(\frac{I_p p}{I_T}\right)i_2\right]$$

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{\rho VSd^2 C_{lp}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)i_3 + \frac{\rho V^2 Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}i_3 + \frac{\rho VSdC_{M\alpha}}{2I_T}(V_x i_2 - V_y i_1)$$

$$+\frac{\rho Sd^2 C_{Mp\alpha}}{2I_P}\left(\frac{I_P p}{I_T}\right)[V_z - V\cos(\alpha_t)i_3] + \frac{\rho VSd^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}\left[h_3 - \left(\frac{I_p p}{I_T}\right)i_3\right]$$

Wir führen nun zur Übersichtlichkeit einige Abküzungen für die auftretenden Konstanten ein:

$$\begin{array}{rclrcl}
\tilde{C}_D & = & \dfrac{\rho VSC_D}{2m} & \tilde{C}_{l_P} & = & \dfrac{\rho VSd^2 C_{l_P}p}{2I_T} \\
\tilde{C}_{L_\alpha} & = & \dfrac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m} & \tilde{C}_{l_\delta} & = & \dfrac{\rho V^2 Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T} \\
\tilde{C}_{N_{p\alpha}} & = & \dfrac{\rho SdC_{N_{p\alpha}}}{2m} & \tilde{C}_{M_\alpha} & = & \dfrac{\rho VSdC_{M_\alpha}}{2I_T} \\
\tilde{C}_{N_q} & = & \dfrac{\rho VSd(C_{N_q}+C_{N_\alpha})}{2m} & \tilde{C}_{M_{p\alpha}} & = & \dfrac{\rho VSd^2 C_{M_{p\alpha}}p}{2I_T} \\
\tilde{C}_{M_q} & = & \dfrac{\rho VSd^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2m} & & &
\end{array}$$

Damit können wir die obigen sechs Differentialgleichungen wie folgt schreiben

$$\frac{dv_x}{dt} = -\tilde{C}_D V_x + \tilde{C}_{L\alpha}(V^2 i_1 - VV_x\cos(\alpha_t)) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(V_z i_2 - V_y i_3)$$

$$+\tilde{C}_{N_q}(h_2 i_3 - h_3 i_2) + g_1 + \Lambda_1$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\tilde{C}_D V_y + \tilde{C}_{L\alpha}(V^2 i_2 - VV_y\cos(\alpha_t)) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(V_x i_3 - V_z i_1)$$

$$+\tilde{C}_{N_q}(h_3 i_1 - h_1 i_3) + g_2 + \Lambda_2$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\tilde{C}_D V_z + \tilde{C}_{L\alpha}(V^2 i_3 - VV_z\cos(\alpha_t)) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(V_y i_1 - V_x i_2)$$

$$+\tilde{C}_{N_q}(h_1 i_2 - h_2 i_1) + g_3 + \Lambda_3$$

$$\frac{dh_1}{dt} = (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_\delta)i_1 + \tilde{C}_{M_\alpha}(V_y i_3 - V_z i_2) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V_x - V\cos(\alpha_t)i_1] + \tilde{C}_{M_q}\left[h_1 - \left(\frac{I_p p}{I_T}\right)i_1\right]$$

$$\frac{dh_2}{dt} = (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_\delta)i_2 + \tilde{C}_{M_\alpha}(V_z i_1 - V_x i_3) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V_y - V\cos(\alpha_t)i_2] + \tilde{C}_{M_q}\left[h_2 - \left(\frac{I_p p}{I_T}\right)i_2\right]$$

$$\frac{dh_3}{dt} = (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_\delta)i_3 + \tilde{C}_{M_\alpha}(V_x i_2 - V_y i_1) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V_z - V\cos(\alpha_t)i_3] + \tilde{C}_{M_q}\left[h_3 - \left(\frac{I_p p}{I_T}\right)i_3\right]$$

Bei konstanter Windgeschwindigkeit lauten dann die ersten drei Komponenten der Abbildung **f**:

$$\begin{aligned} f_1 &= v_x \\ f_2 &= v_y \\ f_3 &= v_z \end{aligned}$$

Die nächsten drei Komponenten sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} f_4 &= -\tilde{C}_D V_x + \tilde{C}_{L\alpha}(V^2 i_1 - VV_x\cos(\alpha_t)) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(V_z i_2 - V_y i_3) + \tilde{C}_{N_q}(h_2 i_3 - h_3 i_2) + g_1 + \Lambda_1 \\ f_5 &= -\tilde{C}_D V_y + \tilde{C}_{L\alpha}(V^2 i_2 - VV_y\cos(\alpha_t)) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(V_x i_3 - V_z i_1) + \tilde{C}_{N_q}(h_3 i_1 - h_1 i_3) + g_2 + \Lambda_2 \\ f_6 &= -\tilde{C}_D V_z + \tilde{C}_{L\alpha}(V^2 i_3 - VV_z\cos(\alpha_t)) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(V_y i_1 - V_x i_2) + \tilde{C}_{N_q}(h_1 i_2 - h_2 i_1) + g_3 + \Lambda_3 \end{aligned}$$

wobei Λ_1, Λ_2 und Λ_3 noch nicht spezifiziert sind, und die letzten drei Komponenten durch

$$\begin{aligned} f_7 &= (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_\delta)i_1 + \tilde{C}_{M_\alpha}(V_y i_3 - V_z i_2) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V_x - V\cos(\alpha_t)i_1] + \tilde{C}_{M_q}\left[h_1 - \left(\tfrac{I_p p}{I_T}\right)i_1\right] \\ f_8 &= (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_\delta)i_2 + \tilde{C}_{M_\alpha}(V_z i_1 - V_x i_3) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V_y - V\cos(\alpha_t)i_2] + \tilde{C}_{M_q}\left[h_2 - \left(\tfrac{I_p p}{I_T}\right)i_2\right] \\ f_9 &= (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_\delta)i_3 + \tilde{C}_{M_\alpha}(V_x i_2 - V_y i_1) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V_z - V\cos(\alpha_t)i_3] + \tilde{C}_{M_q}\left[h_3 - \left(\tfrac{I_p p}{I_T}\right)i_3\right] \end{aligned}$$

Um die Bewegungsgleichungen zu vervollständigen, müssen wir noch den Coriolis-Effekt einfügen und die Anfangsbedingungen.

Den Coriolis-Effekt haben wir bereits in einem früheren Abschnitt diskutiert. Wir definieren deshalb Λ_1, Λ_2 und Λ_3 durch

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= 2\Omega(-V_y\cos(L)\sin(AZ) - V_z\sin(L)) \\
\Lambda_2 &= 2\Omega(V_x\cos(L)\sin(AZ) + V_z\cos(L)\cos(AZ)) \\
\Lambda_3 &= 2\Omega(V_x\sin(L) - V_y\cos(L)\cos(AZ))
\end{aligned}$$

Es sind nun noch die Anfangsbedingungen zu definieren. Seien ϕ_0 der Erhöhungswinkel und θ_0 der Seitenwinkel des Rohres, dann ist der Mündungsgeschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_{20} \\ v_{30} \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos[\phi_0)\cos(\theta_0) \\ \sin(\phi_0)\cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } v_0 = \sqrt{v_{10}^2 + v_{20}^2 + v_{30}^2}$$

Für den Seitenwind ergibt sich

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} V_{10} \\ V_{20} \\ V_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{10} - w_{10} \\ v_{20} - w_{20} \\ v_{30} - w_{30} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsorientierungen der körperorientierten Einheitsvektoren bzgl. des erdefixierten Systems sind

$$\mathbf{i}_0 = i_{10}\mathbf{e}_1 + i_{20}\mathbf{e}_2 + i_{30}\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_0+\alpha_0)\cos(\theta_0+\beta_0) \\ \sin(\phi_0+\alpha_0)\cos(\theta_0+\beta_0) \\ \sin(\theta_0+\beta_0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j}_0 = j_{10}\mathbf{e}_1 + j_{20}\mathbf{e}_2 + j_{30}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta_0+\beta_0)\sin(\phi_0+\alpha_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) \\ \cos^2(\theta_0+\beta_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) + \sin^2(\theta_0+\beta_0) \\ -\sin(\theta_0+\beta_0)\cos(\theta_0+\beta_0)\sin(\phi_0+\alpha_0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_0 = k_{10}\mathbf{e}_1 + k_{20}\mathbf{e}_2 + k_{30}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0+\beta_0) \\ 0 \\ \cos(\theta_0+\beta_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) \end{pmatrix}$$

wobei α_0 Anstellwinkel des Geschosses und β_0 der Seitenwinkel des Geschosses darstellt und

$$Q = \sin^2(\theta_0+\beta_0) + \cos^2(\theta_0+\beta_0)\cos^2(\phi_0+\alpha_0)$$

(siehe McCoy (1999)).

Wir betrachten nun die Rotation $(\boldsymbol{\omega})_{ijk}$ des Projektils um seine Symmetrieachse und definieren eine beliebige Anfangsrotation des Projektils als

$$(\boldsymbol{\omega}_0)_{ijk} = \omega_{10}\mathbf{i}_0 + \omega_{20}\mathbf{j}_0 + \omega_{30}\mathbf{k}_0$$

Hier ist die anfängliche Winkelgeschwindigkeit von der anfänglichen Orientierung des Einheitsvektors $\mathbf{i}_0$ abhängig. Dann kann die Anfangsgeschwindigkeit des Einheitsvektors wie folgt geschrieben werden

$$\frac{d\mathbf{i}_0}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_0)_{ijk} \times \mathbf{i}_0 = [\omega_{k_0}\mathbf{j}_0 - \omega_{j_0}\mathbf{k}_0] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}i_{10} \\ \frac{d}{dt}i_{20} \\ \frac{d}{dt}i_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{k_0} j_{10} - \omega_{j_0} k_{10} \\ \omega_{k_0} j_{20} - \omega_{j_0} k_{20} \\ \omega_{k_0} j_{30} - \omega_{j_0} k_{30} \end{pmatrix}$$

(siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 242 ff.).

Aus den Gleichungen

$$\mathbf{j}_0 = j_{10}\mathbf{e}_1 + j_{20}\mathbf{e}_2 + j_{30}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta_0+\beta_0)\sin(\phi_0+\alpha_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) \\ \cos^2(\theta_0+\beta_0)\cos(\phi_0+\alpha_0)+\sin^2(\theta_0+\beta_0) \\ -\sin(\theta_0+\beta_0)\cos(\theta_0+\beta_0)\sin(\phi_0+\alpha_0) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{k}_0 = k_{10}\mathbf{e}_1 + k_{20}\mathbf{e}_2 + k_{30}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0+\beta_0) \\ 0 \\ \cos(\theta_0+\beta_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) \end{pmatrix}$$

kann man weiter folgern, dass

$$\frac{d}{dt}i_{10} = \frac{1}{\sqrt{Q}}[\omega_{j_0}\sin(\theta_0+\beta_0) - \omega_{k_0}\cos^2(\theta_0+\beta_0)\sin(\phi_0+\alpha_0)\cos(\phi_0+\alpha_0)]$$

$$\frac{d}{dt}i_{20} = \frac{1}{\sqrt{Q}}[\omega_{k_0}\cos^2(\theta_0+\beta_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) + \omega_{k_0}\sin^2(\theta_0+\beta_0)]$$

$$\frac{d}{dt}i_{30} = \frac{1}{\sqrt{Q}}[-\omega_{j_0}\cos(\theta_0+\beta_0)\cos(\phi_0+\alpha_0) - \omega_{k_0}\sin(\theta_0+\beta_0)\cos(\theta_0+\beta_0)\sin(\phi_0+\alpha_0)]$$

Ein positiver Anstellwinkel rotiert die Nase des Geschosses aufwärts und ein positiver Seitenwinkel die Nase des Geschosses nach links, von rückwärts gesehen.

Der Anfangswert des modifizierten Drehmomentvektors ist gegeben durch

$$\mathbf{h}_0 = \frac{I_P p_0}{I_T}\mathbf{i}_0 + \left(\mathbf{i}_0 \times \frac{d\mathbf{i}_0}{dt}\right)$$

Wir schreiben nun $\frac{d\mathbf{i}_0}{dt}$ um:

$$\frac{d\mathbf{i}_0}{dt} = \frac{di_{10}}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{di_{20}}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{di_{30}}{dt}\mathbf{e}_3$$

und erhalten damit

$$\mathbf{i}_0 \times \frac{d\mathbf{i}_0}{dt} = (i_{20}\frac{d}{dt}i_{30} - i_{30}\frac{d}{dt}i_{20})\mathbf{e}_1 + (i_{30}\frac{d}{dt}i_{10} - i_{10}\frac{d}{dt}i_{30})\mathbf{e}_2 + (i_{10}\frac{d}{dt}i_{20} - i_{20}\frac{d}{dt}i_{10})\mathbf{e}_3$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\mathbf{h}_0 = \begin{pmatrix} \frac{I_P p_0}{I_T} i_{10} + i_{20}\frac{d}{dt}i_{30} - i_{30}\frac{d}{dt}i_{20} \\ \frac{I_P p_0}{I_T} i_{20} + i_{30}\frac{d}{dt}i_{10} - i_{10}\frac{d}{dt}i_{30} \\ \frac{I_P p_0}{I_T} i_{30} + i_{10}\frac{d}{dt}i_{20} - i_{20}\frac{d}{dt}i_{10} \end{pmatrix}$$

Hierbei wird die Anfangsumdrehungsrate p_0 bestimmt durch

$$p_0 = \frac{2\pi v_0}{nd}$$

wobei die Dralllänge in Kalibern pro Umdrehung angegeben wird.

4.2 Das modifizierte Punkt-Masse-Modell

Das 6 Freiheitsgrade-Modell beschreibt die Flugbahn eines Geschosses in voller Allgemeinheit und ist damit natürlich auch entsprechend komplex.

Es erhebt sich die Frage, ob nicht gewisse Vereinfachungen möglich sind, so dass auch die zugehörigen Rechnungen übersichtlicher werden. Dies soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

Ausgangspunkt hierfür ist das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\rho V S C_D}{2m}\mathbf{V} + \frac{\rho S C_{L_\alpha}}{2m}[V^2\mathbf{i} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{V}] - \frac{\rho S d C_{N_{p\alpha}}}{2m}\left(\frac{I_T}{I_P}\right)(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V})$$

$$+\frac{\rho V S d (C_{N_q} + C_{N_\alpha})}{2m}(\mathbf{h}\times\mathbf{i}) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

und

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\rho V S d^2 C_{l_p}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + \frac{\rho V^2 S d \delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}\mathbf{i} + \frac{\rho V S d C_{M_\alpha}}{2I_T}(\mathbf{V}\times\mathbf{i})$$

$$+\frac{\rho V S d^2 C_{M_{p\alpha}}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \frac{\rho V S d^2 (C_{M_q} + C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

mit den Definitionen

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x)\mathbf{e}_1 + (v_y - w_y)\mathbf{e}_2 + (v_z - w_z)\mathbf{e}_3$$

so dass

$$V_x = (v_x - w_x), \quad V_y = (v_y - w_y), \quad V_z = (v_z - w_z)$$

und

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

w ist hierbei der Seitenwind, **v** die Geschwindigkeit ohne Seitenwindeinfluss, **V** die um den Seitenwind korrigierte Geschwindigkeit.

Wir vernachlässigen als erstes die Pitch-Dämpfungskraft $\mathbf{F}_P$ (der vierte Vektorterm in der ersten Differentialgleichung) und erhalten für die erste Vektorgleichung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\rho V S C_D}{2m}\mathbf{V} + \frac{\rho S C_{L_\alpha}}{2m}[V^2\mathbf{i} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{V}] - \frac{\rho S d C_{N_{p\alpha}}}{2m}\left(\frac{I_T}{I_P}\right)(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V}) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

zusammen mit

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\rho V S d^2 C_{lp}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + \frac{\rho V^2 S d \delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}\mathbf{i} + \frac{\rho V S d C_{M_\alpha}}{2I_T}(\mathbf{V}\times\mathbf{i})$$

$$+\frac{\rho V S d^2 C_{M_{p\alpha}}}{2I_T}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \frac{\rho V S d^2 (C_{M_q} + C_{M_{\dot\alpha}})}{2I_T}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Wir erinnern an die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h} = \frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{I_P p}{I_T}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right)$$

Wir hatten bereits folgende Abkürzungen eingeführt

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_D &= \frac{\rho VSC_D}{2m} & \tilde{C}_{l_P} &= \frac{\rho VSd^2C_{l_P}p}{2I_T} \\
\tilde{C}_{L\alpha} &= \frac{\rho SC_{L_\alpha}}{2m} & \tilde{C}_{l_\delta} &= \frac{\rho V^2Sd\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T} \\
\tilde{C}_{N_{p\alpha}} &= \frac{\rho SdC_{N_{p\alpha}}}{2m} & \tilde{C}_{M_\alpha} &= \frac{\rho VSdC_{M_\alpha}}{2I_T} \\
\tilde{C}_{N_q} &= \frac{\rho VSd(C_{N_q}+C_{N_\alpha})}{2m} & \tilde{C}_{M_{p\alpha}} &= \frac{\rho VSd^2C_{M_{p\alpha}}p}{2I_T} \\
\tilde{C}_{M_q} &= \frac{\rho VSd^2(C_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})}{2m}
\end{aligned}$$

Damit werden die obigen Gleichungen zu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L\alpha}[V^2\mathbf{i} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{V}] - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}\left(\frac{I_T}{I_P}\right)(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{i}\times\mathbf{V}) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = (\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \tilde{C}_{M_q}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

oder alternativ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L\alpha}[\mathbf{V}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{V})] - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = (\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \tilde{C}_{M_q}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Wir hatten bereits gezeigt, dass der Einheitsvektor **i** immer senkrecht zu seiner Ableitung $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ ist. Aus diesem Grund ist das Skalarprodukt aus **i** und $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ identisch Null.

Wir setzen nun die Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{I_P p}{I_T}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right)$$

und

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = (\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \tilde{C}_{M_q}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

gleich und erhalten

$$\frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{I_P p}{I_T}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right) = (\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \tilde{C}_{M_q}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Diese Gleichung multiplizieren wir skalar mit **i** und erhalten

$$\frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt} = \tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta} \text{ oder } \frac{dp}{dt} = \frac{I_T}{I_P}(\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})$$

Dabei haben wir verwendet, dass das Kreuzprodukt einen Vektor darstellt, der senkrecht zu den Ausgangsvektoren ist.

Außerdem ist das Skalarprodukt zu orthogonalen Vektoren identisch gleich Null. Zusammengefasst:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{i}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}) = \mathbf{0} & \mathbf{i}\cdot\left(\mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{i}\cdot[\mathbf{i}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{i})] = \mathbf{0} & \mathbf{i}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{V}) = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) = \mathbf{0} \end{array}$$

Nun substituieren wir die Gleichung

$$\frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt} = \tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta} \text{ oder } \frac{dp}{dt} = \frac{I_T}{I_P}(\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})$$

in die Gleichung

$$\frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{I_P p}{I_T}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right) = (\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})[\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}] + \tilde{C}_{M_q}[\mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}]$$

Dies ergibt

$$(\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right) = (\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})\mathbf{i} + \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[\mathbf{i}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{i})] + \tilde{C}_{M_q}\left[\mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right]$$

oder

$$\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i}\times\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right) = \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[\mathbf{i}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{i})] + \tilde{C}_{M_q}\left[\mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right]$$

Wir haben damit folgenden Satz von Gleichungen gewonnen:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L_\alpha}[\mathbf{V}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{V})] - -\tilde{C}_{N_{p\alpha}}(\mathbf{V}\times\mathbf{i}) + \mathbf{g} + \boldsymbol{\Lambda}$$

$$\frac{I_P}{I_T}\frac{dp}{dt} = \tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta} \text{ oder } \frac{dp}{dt} = \frac{I_T}{I_P}(\tilde{C}_{lp} + \tilde{C}_{l_\delta})$$

$$\frac{I_P}{I_T} p \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i} \times \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} \right) = \tilde{C}_{M_\alpha} (\mathbf{V} \times \mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}} [\mathbf{i} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{i})] + \tilde{C}_{M_q} \left[\mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right]$$

Damit haben wir das 6 Freiheitsgrade-Modell bisher nur umformuliert.

Wir wollen nun weitere Vereinfachungen vornehmen. Dazu nehmen wir an, dass die Seiten- und Erhöhungsbewegungen des Geschosses (pitching und yawing) vernachlässigt werden können, da sich diese entlang der Trajektorie des Geschosses typischerweise herausdämpfen.

Um die obigen Gleichungen weiter behandeln zu können, führen wir weitere drei Einheitsvektoren wie unsere Einheitsvektoren **i**, **j** und **k** ein, welche wir mit **l**, **m** und **n** bezeichnen.

Der Vektor **l** sei dabei definiert durch

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$$

Weiter definieren wir den Seitenabweichungsvektor (“vector yaw of repose“) durch

$$\boldsymbol{\alpha}_R := \mathbf{l} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{l})$$

Dabei nehmen wir an, dass $\frac{d\boldsymbol{\alpha}_R}{dt}$ im Vergleich zu $\boldsymbol{\alpha}_R$ vernachlässigbar ist (siehe McCoy (1999), S. 213).

Ebenfalls sei in der Größe $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ der Seitenwind $\mathbf{w}$ größenordnungsmäßig vernachlässigbar (siehe McCoy (1999), S. 213).

Wir können nun einen Winkel α_t festlegen durch die Gleichung

$$\mathbf{l} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{l}) = (1)^2 \mathbf{i} - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{l} = \mathbf{i} - (1)(1) \cos(\alpha_t) \mathbf{l}$$

aufgrund der entsprechenden Vektoridentitäten.

Damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \mathbf{l} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{l}) = \mathbf{i} - (\cos(\alpha_t)) \mathbf{l}$$

oder aufgelöst nach **i**:

$$\mathbf{i} = \boldsymbol{\alpha}_R + (\cos(\alpha_t)) \mathbf{l}$$

Wählen wir eine Ebene, in der **l** wie auch **j** gemeinsam liegen, dann können wir diese Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \mathbf{i} - \cos(\alpha_t)(\cos(\alpha_t)\mathbf{i} + \sin(\alpha_t)\mathbf{j}) = (1 - \cos^2(\alpha_t))\mathbf{i} - \sin(\alpha_t)\cos(\alpha_t)\mathbf{j}$$

mit

$$\alpha_R = \sqrt{(1-\cos(\alpha_t))^2 + \cos^2(\alpha_t)\sin^2(\alpha_t)} = \sqrt{\sin^4\alpha_t) + \cos^2(\alpha_t)\sin^2(\alpha_t)}$$

oder

$$\alpha_R = \sin(\alpha_t)\sqrt{\sin^2(\alpha_t) + +\cos^2(\alpha_t)} = \sin(\alpha_t)$$

Wir differenzieren nun die Gleichung

$$\boldsymbol{\alpha}_R = \mathbf{l} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{l}) = \mathbf{i} - (\cos(\alpha_t))\mathbf{l}$$

nach der Zeit und erhalten

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_R}{dt} = \frac{d\mathbf{i}}{dt} - (\cos(\alpha_t))\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \sin(\alpha_t)\mathbf{l}$$

Aufgrund unserer obigen Annahme ist die zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\alpha}_R$ näherungsweise gleich Null, d. h.

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_R}{dt} \approx \mathbf{0}$$

Für kleine Winkel α_R haben wir weiterhin, dass

$$\sin(\alpha_R) \approx 0 \ll \cos(\alpha_R)$$

Also folgt aus der vorhergehenden Gleichung, dass

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = (\cos(\alpha_t))\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

Nochmalige Differentiation liefert

$$\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} = (\cos(\alpha_t))\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} - (\sin(\alpha_t))\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

woraus aufgrund des kleinen Winkels wiederum folgt

$$\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} = (\cos(\alpha_t))\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}$$

V und **l** sind parallel, somit ist ihr Kreuzprodukt gleich Null, also haben wir

$$\mathbf{i} \times \mathbf{V} = [\boldsymbol{\alpha}_R + (\cos(\alpha_t)\mathbf{l}] \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{V} + (\cos(\alpha_t))\mathbf{l} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{V}$$

wie auch

$$\mathbf{V} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{V}) = V^2\boldsymbol{\alpha}_R - (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\alpha}_R)\mathbf{V} = V^2\boldsymbol{\alpha}_R$$

Ähnlich erhalten wir

$$\mathbf{V} \times \mathbf{i} = \mathbf{V} \times [\boldsymbol{\alpha}_R + (\cos(\alpha_t))\mathbf{l}] = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\alpha}_R + \mathbf{V} \times (\cos(\alpha_t))\mathbf{l} = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\alpha}_R$$

wie auch

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{i}) = V\cos(\alpha_t)\boldsymbol{\alpha}_R + V(\sin^2(\alpha_t))\mathbf{l}$$

Die gefundenen Gleichungen für **i**, $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ und $\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}$ können wir nun verwenden, um **i** aus den Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L\alpha}[\mathbf{V} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{V})] - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}(\mathbf{V} \times \mathbf{i}) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

$$\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \left(\mathbf{i} \times \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right) = \tilde{C}_{M_\alpha}(\mathbf{V} \times \mathbf{i}) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[\mathbf{i} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{i})] + \tilde{C}_{M_q}\left[\mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt}\right]$$

zu eliminieren.

Wir beginnen mit der ersten Gleichung. Hierzu notieren wir, dass

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\alpha}_R = (V\mathbf{l}) \times \boldsymbol{\alpha}_R = V(\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}_R)$$

somit erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L\alpha}V^2\boldsymbol{\alpha}_R - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}V(\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}_R) + \mathbf{g} + \mathbf{\Lambda}$$

Kommen wir nun zu der zweiten Gleichung. Wir definieren zuerst

$$\gamma := (\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}) = \cos(\alpha_t)$$

Damit erhalten wir mit $\mathbf{i} = \boldsymbol{\alpha}_R + (\cos(\alpha_t))\mathbf{l}$

$$\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{i}}{dt} \approx \frac{I_P}{I_T}p\cos(\alpha_t)\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \gamma\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

$$\left(\mathbf{i} \times \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}\right) = \gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R \times \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) + \gamma^2\left(\mathbf{l} \times \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)$$

$$\left[\mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt}\right] = \gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) + \gamma^2\left(\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)$$

Damit folgt

$$\gamma\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R \times \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) + \gamma^2\left(\mathbf{l} \times \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) =$$

$$\tilde{C}_{M_\alpha}V(\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}_R) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}[V\gamma\boldsymbol{\alpha}_R + V\sin^2(\alpha_t)\mathbf{l}] + \tilde{C}_{M_q}\left[\gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) + \gamma^2\left(\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)\right]$$

Wir vernachlässigen nun die Coriolis-Kraft gegenüber der Gravitation wie auch den Term $\sin^2(\alpha_t)$ gegenüber γ.

Da

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}V\mathbf{l} = \frac{dV}{dt}\mathbf{l} + V\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

erhalten wir einerseits

$$\frac{dV}{dt}\mathbf{l} + V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L_\alpha}V^2\boldsymbol{\alpha}_R - \tilde{C}_{N_{p\alpha}}V(\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}_R) + \mathbf{g}$$

und andererseits

$$\gamma\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R \times \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) + \gamma^2\left(\mathbf{l} \times \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) = \tilde{C}_{M_\alpha}V(\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}_R) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}V\gamma\boldsymbol{\alpha}_R + \tilde{C}_{M_q}\left[\gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) + \gamma^2\left(\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)\right]$$

Wir bilden nun das Kreuzprodukt mit $\mathbf{l}$ bei beiden Gleichungen.

Bei der ersten Gleichung erhalten wir für die linke Seite:

$$\mathbf{l} \times \left(\frac{dV}{dt}\mathbf{l} + V\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = \mathbf{l} \times \frac{dV}{dt}\mathbf{l} + \mathbf{l} \times V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{0} + V\left(\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)$$

Für die rechte Seite der Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{l} \times (-\tilde{C}_D\mathbf{V}) = \mathbf{l} \times (-\tilde{C}_D V\mathbf{l}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{l} \times (\tilde{C}_{L_\alpha}V^2\boldsymbol{\alpha}_R) = \tilde{C}_{L_\alpha}V^2(\mathbf{l} \times \boldsymbol{\alpha}_R)$$

$$\mathbf{l}\times(-\tilde{C}_{N_{p\alpha}}V)(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R) = -\tilde{C}_{N_{p\alpha}}V[\mathbf{l}\times(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R)] = \tilde{C}_{N_{p\alpha}}V[\mathbf{l}\times(\boldsymbol{\alpha}_R\times\mathbf{l})] = \tilde{C}_{N_{p\alpha}}V[\boldsymbol{\alpha}_R-(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\mathbf{l}]$$

Entsprechend können wir die zweite Gleichung bearbeiten und erhalten für die linke Seite

$$\mathbf{l}\times\gamma\frac{I_P}{I_T}p\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \gamma\frac{I_P}{I_T}p\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)$$

$$\mathbf{l}\times\gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R\times\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) = \gamma\mathbf{l}\times\left(\boldsymbol{\alpha}_R\times\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) = \gamma\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\boldsymbol{\alpha}_R-(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right]$$

$$\mathbf{l}\times\gamma^2\left(\mathbf{l}\times\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) = \gamma^2\left[\mathbf{l}\times\left(\mathbf{l}\times\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\right] = \gamma^2\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\mathbf{l}-\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right]$$

Für die rechte Seite der zweiten Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{l}\times\tilde{C}_{M_\alpha}V(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R) = \tilde{C}_{M_\alpha}V[\mathbf{l}\times(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R)] = -\tilde{C}_{M_\alpha}V[\boldsymbol{\alpha}_R-(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\mathbf{l}]$$

$$\mathbf{l}\times\tilde{C}_{M_{p\alpha}}V\gamma\boldsymbol{\alpha}_R = \tilde{C}_{M_{p\alpha}}V\gamma(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R)$$

$$\mathbf{l}\times\tilde{C}_{M_q}\left[\gamma\left(\boldsymbol{\alpha}_R\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)+\gamma^2\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)\right] = \tilde{C}_{M_q}\gamma\mathbf{l}\times\left(\boldsymbol{\alpha}_R\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)+\tilde{C}_{M_q}\gamma^2\mathbf{l}\times\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)$$

Der erste Summand auf der rechte Seite ist gleich

$$\tilde{C}_{M_q}\gamma\mathbf{l}\times\left(\boldsymbol{\alpha}_R\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = \tilde{C}_{M_q}\gamma\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)\boldsymbol{\alpha}_R-(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right] = -\tilde{C}_{M_q}\gamma(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

Der zweite Summand ergibt

$$\tilde{C}_{M_q}\gamma^2\mathbf{l}\times\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = \tilde{C}_{M_q}\gamma^2\left[\mathbf{0}-(\mathbf{l}\cdot\mathbf{l})\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right] = -\tilde{C}_{M_q}\gamma^2\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

Die gefundenen Ergebnisse können nun eingesetzt werden. Wir erhalten

$$V\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = \tilde{C}_{L_\alpha}V^2(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R)+\tilde{C}_{N_{p\alpha}}V[\boldsymbol{\alpha}_R-(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\mathbf{l}]+(\mathbf{l}\times\mathbf{g})$$

und

$$\gamma\frac{I_P}{I_T}p\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)+\gamma\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\boldsymbol{\alpha}_R-(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right]+\gamma^2\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\mathbf{l}-\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right]$$

$$= -\tilde{C}_{M_\alpha} V[\boldsymbol{\alpha}_R - (\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\mathbf{l}] + \tilde{C}_{M_{p\alpha}} V\gamma(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R) - \tilde{C}_{M_q}\left[\gamma(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R)\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \gamma^2\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right]$$

Damit haben wir zwei Gleichungen mit zwei Vektorvariablen $\boldsymbol{\alpha}_R$ und $\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R$.

Das zugehörige lineare System kann gelöst werden und ergibt als Lösung für $\boldsymbol{\alpha}_R$:

$$\boldsymbol{\alpha}_R =$$

$$\frac{-\tilde{C}_{M_{p\alpha}} V\gamma v\left[\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) - (\mathbf{l}\times\mathbf{g})\right] + \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\gamma^2\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\mathbf{l} - \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right] + \tilde{C}_{L_\alpha} v^2\gamma\frac{I_P}{I_T}p\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) + \tilde{C}_{L_\alpha}\tilde{C}_{M_q} V^2\gamma^2\frac{d\mathbf{l}}{dt}}{\tilde{C}_{N_{p\alpha}}\tilde{C}_{M_{p\alpha}} V^2\gamma - \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\gamma\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) + \tilde{C}_{L_\alpha}\tilde{C}_{M_\alpha} V^3}$$

Wir wollen diesen Ausdruck weiter vereinfachen. Hierzu betrachten wir nochmals die Gleichung

$$\frac{dV}{dt}\mathbf{l} + V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\boldsymbol{\alpha}_R - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} V(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R) + \mathbf{g}$$

und multiplizieren diese skalar mit $\mathbf{l}$. Da $\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\alpha}_R = 0$, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}V = -\tilde{C}_D V + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g}) = -\frac{\rho S C_D V^2}{2m} + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})$$

Wir können dies nun zurücksubstituieren und erhalten

$$-\tilde{C}_D\mathbf{V} + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{l} + V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = -\tilde{C}_D\mathbf{V} + \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\boldsymbol{\alpha}_R - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} V(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\alpha}_R) + \mathbf{g} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{l}$$

Wir vernachlässigen nun die Magnus-Kraft und beachten, dass $\mathbf{l}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{l}) = \mathbf{g} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{l}$, so dass

$$V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\boldsymbol{\alpha}_R + [\mathbf{l}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{l})]$$

Um nun die Größe $\mathbf{l}$ aus unseren Gleichungen zu entfernen, differenzieren wir die obige Gleichung nach der Zeit und erhalten

$$\frac{dV}{dt}\frac{d\mathbf{l}}{dt} + V\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} \approx \mathbf{0} + \frac{d}{dt}[\mathbf{l}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{l})]$$

Die Ableitung von V nach der Zeit ist bekannt:

$$\frac{d}{dt}V = -\tilde{C}_D V + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g}) = -\frac{\rho S C_D V^2}{2m} + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})$$

wir erhalten damit durch Substitution

$$-C_D V \frac{d\mathbf{l}}{dt} + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\frac{d\mathbf{l}}{dt} + V\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{g}}{dt} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\frac{d\mathbf{l}}{dt} - \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt}\cdot\mathbf{g}\right)\mathbf{l} - \left(\mathbf{l}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}\right)\mathbf{l}$$

Nun ist $\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{0}$, somit folgt weiter

$$V\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = -2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\frac{d\mathbf{l}}{dt} - \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt}\cdot\mathbf{g}\right) + \tilde{C}_D V\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

Mit der Gleichung

$$V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \tilde{C}_{L_\alpha} V^2 \boldsymbol{\alpha}_R + [\mathbf{l}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{l})]$$

erhalten wir weiter

$$-2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\frac{d\mathbf{l}}{dt} = -\frac{2}{v}\left[(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\tilde{C}_{L_\alpha} V^2 \boldsymbol{\alpha}_R + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{g} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{l}\right]$$

somit

$$\left(\frac{d\mathbf{l}}{dt}\cdot\mathbf{g}\right)\mathbf{l} = \frac{1}{v}\left[\tilde{C}_{L_\alpha} V^2(\boldsymbol{\alpha}_R\cdot\mathbf{g}) + g^2 - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2\right]\mathbf{l}$$

und

$$\tilde{C}_D V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\tilde{C}_D V}{v}[\tilde{C}_{L_\alpha} V^2 \boldsymbol{\alpha}_R + \mathbf{g} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{l}]$$

Damit erhalten wir aus Gleichung

$$V\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = -2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\frac{d\mathbf{l}}{dt} - \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt}\cdot\mathbf{g}\right) + \tilde{C}_D V\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

durch Einsetzen die erheblich kompliziertere Gleichung

$$V\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = -\frac{2}{v}[\tilde{C}_{L_\alpha} V^2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\boldsymbol{\alpha}_R + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{g} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{l}] - \frac{1}{v}[\tilde{C}_{L_\alpha} V^2(\boldsymbol{\alpha}_R\cdot\mathbf{g})\mathbf{l} + g^2\mathbf{l} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{l}] + \tilde{C}_D V\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

Nehmen wir nun an, dass die Terme, die $\tilde{C}_{L_\alpha}$ und $\tilde{C}_D$ enthalten, entweder klein sind im Vergleich zu anderen Termen oder sich gegeneinander auslöschen, dann verschwindet der dritte Term in der obigen Gleichung und der Rest vereinfacht sich zu

$$V^2\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} \approx [3(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2 - g^2]\mathbf{l} - 2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{g}$$

$\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$ sind nun Einheitsvektoren, wobei $\mathbf{l}$ die gleiche Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{V}$ hat. Also können wir die Gleichung

$$V\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \tilde{C}_{L_\alpha} V^2 \boldsymbol{\alpha}_R + [\mathbf{l} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{l})]$$

transformieren in

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{1}{V}\left\{\tilde{C}_{L_\alpha} V^2 \boldsymbol{\alpha}_R + \frac{1}{V^2}[\mathbf{V} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{V})]\right\}$$

Wir beachten nun (siehe McCoy (1999), S. 213), dass die Windgeschwindigkeit W sehr klein gegenüber der Geschossgeschwindigkeit v ist, somit $v \approx V$ gilt.

Entsprechend erhalten wir aus Gleichung

$$V\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} = -\frac{2}{v}[\tilde{C}_{L_\alpha} V^2 (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\boldsymbol{\alpha}_R + (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\mathbf{g} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{l}] - \frac{1}{v}[\tilde{C}_{L_\alpha} V^2 (\boldsymbol{\alpha}_R\cdot\mathbf{g})\mathbf{l} + g^2\mathbf{l} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{l}] + \tilde{C}_D V\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

durch Division von V:

$$\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2} \approx -\frac{2}{v^2}\left[\tilde{C}_{L_\alpha} V (\mathbf{l}\cdot\mathbf{g})\boldsymbol{\alpha}_R + \frac{1}{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{g})\mathbf{g} - \frac{1}{V^3}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{V}\right]$$

$$-\frac{1}{v^2}\left[\tilde{C}_{L_\alpha} V (\boldsymbol{\alpha}_R\cdot\mathbf{g})\mathbf{V} + \frac{g^2}{V}\mathbf{V} - \frac{1}{V^3}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{g})^2\mathbf{V}\right] + \frac{\tilde{C}_D V}{v}\frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

Wir sind nun in der Lage, in der Gleichung

$$\boldsymbol{\alpha}_R =$$

$$\frac{-\tilde{C}_{M_{p\alpha}} V\gamma v\left[\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) - (\mathbf{l}\times\mathbf{g})\right] + \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\gamma^2\left[\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right)\mathbf{l} - \frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right] + \tilde{C}_{L_\alpha} v^2\gamma\frac{I_P}{I_T}p\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) + \tilde{C}_{L_\alpha}\tilde{C}_{M_q} V^2\gamma^2\frac{d\mathbf{l}}{dt}}{\tilde{C}_{N_{p\alpha}}\tilde{C}_{M_{p\alpha}} V^2\gamma - \tilde{C}_{L_\alpha} V^2\gamma\left(\mathbf{l}\cdot\frac{d^2\mathbf{l}}{dt^2}\right) + \tilde{C}_{L_\alpha}\tilde{C}_{M_\alpha} V^3}$$

die entsprechenden Substitutionen durchzuführen.

Vernachlässigen wir im Zähler den zweiten und den vierten Term und im Nenner den mittleren Term, so erhalten wir

$$\boldsymbol{\alpha}_R =$$

$$\frac{-\tilde{C}_{M_{p\alpha}} V\gamma v\left[\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)-(\mathbf{l}\times\mathbf{g})\right]+\tilde{C}_{L_\alpha}v^2\gamma\frac{I_P}{I_T}p\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)}{\tilde{C}_{N_{p\alpha}}\tilde{C}_{M_{p\alpha}}V^2\gamma+\tilde{C}_{L_\alpha}\tilde{C}_{M_\alpha}V^3}$$

vergleiche McCoy (1999), S. 214, Formel 9.56)

Wir erhalten hieraus durch Vernachlässigung der Magnus-Kraft und des Magnus-Moments für drallstabilisierte Geschosse (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 255, oder McCoy (1999), S. 214)

$$\boldsymbol{\alpha}_R=\frac{-2I_P p\left(\mathbf{V}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)}{\rho S d V^4 C_{M_\alpha}}$$

Für nicht-drallstabilisierte Geschosse erhalten wir dagegen (siehe Carlucci and Jacobson (2008), S. 255, oder McCoy (1999), S. 214)

$$\boldsymbol{\alpha}_R=\frac{\tilde{C}_{M_q}\gamma^2[\mathbf{V}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{g})]}{\tilde{C}_{M_\alpha}vV^3}$$

Wir erhalten damit folgende Gleichungen, die simultan numerisch ausintegriert werden können:

Einerseits die beiden Gleichungen für $\boldsymbol{\alpha}_R$ und andererseits die Gleichung für $\mathbf{v}$ mit $v\approx V$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\tilde{C}_D\mathbf{V}+\tilde{C}_{L_\alpha}V^2\boldsymbol{\alpha}_R-\tilde{C}_{N_{p\alpha}}(\mathbf{V}\times\boldsymbol{\alpha}_R)+\mathbf{g}+\boldsymbol{\Lambda}$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{I_T}{I_P}(\tilde{C}_{lp}+\tilde{C}_{l_\delta})$$

mit

$$\tilde{C}_{l_P}=\frac{\rho V S d^2 C_{l_P} p}{2I_T}\qquad \tilde{C}_{l_\delta}=\frac{\rho V^2 S d\,\delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}$$

Das Trägheitsmoment I_T kürzt sich somit heraus. Es muss somit nur noch das Trägheitsmoment I_P entlang der Rotationsachse des Geschosses bestimmt werden

Mit der üblichen Transformation kann dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung umgeschrieben werden.

Kapitel 5

Präzession und Nutation

5.1 Einführung

Wir wollen uns nun noch für die Präzession und die Nutation des Geschosses interessieren, d. h. die Kreisbewegung der Geschossspitze um die Flugbahn und die Kreisbewegung der Geschossspitze selbst.

Derartige Betrachtungen wurden wohl zuerst in dem Artikel von Murphy (1963) angestellt. Wir folgen hier der Darstellung von McCoy (1999), siehe auch Carlucci and Jacobson (2008), S. 257 ff..

Nachzulesen ist dies in der englischsprachigen Literatur unter dem Oberbegriff "Linearized Aeroballistics".

5.2 Aufstellung der Differentialgleichungen

Präzession bedeutet eine Kreisbewegung der Geschossspitze um die Flugbahn herum, Nutation eine Rotationsbewegung der Geschossspitze auf dieser Kreisbahn.

Um diese Effekte zu untersuchen, stellen wir zuerst entsprechende Differentialgleichungen auf. Hierzu entkoppelt man die Rotationsbewegung des Geschosses von der Translationsbewegung des Geschosses.

Eine wesentliche Annahme hierbei ist, dass keinerlei Winddrift vorhanden ist - wir können somit auf entsprechende Unterscheidungen bei den Vektoren verzichten.

Ebenfalls setzen wir ein nichtflexibles, d. h. starres Geschoss voraus, dessen Rotationsachse mit einer Trägheitsachse zusammenfällt.

Weiterhin legen wir ein Koordinatensystem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ in den Schwerpunkt des Geschosses. Hierbei soll der Einheitsvektor $\mathbf{i}$ tangential zur Trajektorie liegen. Dabei soll dieses Koordinatensystem **nicht** mitrotieren, und wir fordern, dass die drei Vektoren orthogonal sein sollen.

Zusätzlich zu unserem Inertialsystem mit den Koordinaten x, y und z benötigen wir noch ein

Koordinatensystem **I**, **J** und **K**, welches sich mit dem Geschoss mitbewegt.

Der Zusammmenhang mit dem Koordinatensystem **i**, **j** und **k** ist durch die sogenannten Eulerschen Winkel gegeben (siehe z. B. Kuypers (2010), S. 203 ff.)

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos(\phi)\cos(\theta)\mathbf{I}+\sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{J}+\sin(\theta)\mathbf{K}\\
\mathbf{j} &= -\sin(\phi)\mathbf{I}+\cos(\phi)\mathbf{J}\\
\mathbf{k} &= -\cos(\phi)\sin(\theta)\mathbf{I}-\sin(\phi)\sin(\theta)\mathbf{J}+\cos(\theta)\mathbf{K}
\end{aligned}$$

mit der inversen Transformation

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \cos(\phi)\cos(\theta)\mathbf{i}-\sin(\phi)\mathbf{j}-\cos(\phi)\sin(\theta)\mathbf{k}\\
\mathbf{J} &= \sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{i}+\cos(\phi)\mathbf{j}-\sin(\phi)\sin(\theta)\mathbf{k}\\
\mathbf{K} &= \sin(\theta)\mathbf{i}+\cos(\theta)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

An Kräften setzen wir die Kräfte

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2}\rho S C_D v\mathbf{v}$$

und

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{2}\rho S C_{L\alpha}[\mathbf{v}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{v})]$$

voraus, die Coriolis-Kraft wird vernachlässigt.

Diese Kräfte müssen wir nun im nicht-rotierenden, körperfesten **i**, **j**, **k** Koordinatensystem ausdrücken.

Für den Vektor **g** erhalten wir:

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{J} = -g(\sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{i}+\cos(\phi)\mathbf{j}-\sin(\phi)\sin(\theta)\mathbf{k})$$

Im Fall von Flachbahn-Trajektorien sind die entsprechenden Winkel klein, damit erhalten wir

$$\mathbf{g} = -g\cos(\phi)\mathbf{j}$$

Da $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, erhalten wir

$$\frac{\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{i}+v\frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\frac{1}{2m}\rho S C_D v^2\mathbf{i}+\frac{1}{2m}\rho S C_{L\alpha} v^2[\mathbf{i}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{i})]-g\cos(\phi)\mathbf{j}$$

wenn **x** ein Einheitsvektor entlang der Rotationsachse des Projektils ist.

Hieraus können wir durch Skalarmultiplikation mit **i** die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-\rho S C_D}{2m} v^2$$

ableiten. Diese Gleichung können wir zurücksubstituieren und erhalten

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{\rho S C_{L_\alpha}}{2m} v[\mathbf{i} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{i})] - \frac{g\cos(\phi)}{v}\mathbf{j}$$

wenn noch durch v dividiert wird.

Wir definieren nun

$$C_D^* := \frac{\rho S d}{2m} C_D \quad \text{und} \quad C_{L_\alpha}^* := \frac{\rho S d}{2m} C_{L_\alpha}$$

dann gehen die beiden obigen Gleichungen über in

$$\frac{dv}{dt} = -C_D^* \left(\frac{v}{d}\right) v$$

und

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = C_{L_\alpha}^* \left(\frac{v}{d}\right) [\mathbf{x} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{x})\mathbf{i}] - \frac{g\cos(\phi)}{v}\mathbf{j}$$

Es empfiehlt sich an dieser Stelle, von der Zeit t als unabhängiger Variablen überzugehen zur dimensionslosen Bogenlänge als Variablen.

Dadurch (siehe McCoy (1999), S. 224) werden die rotatorischen Seiten- und Höhenbewegungen unabhängig von der Größe des Projektils: ein großes Artilleriegeschoss wird dann gemessen am Kaliber dieselben Perioden aufweisen wie ein kleineres Kaliber.

Deshalb ändern wir die unabhängige Zeitvariable zur Bogenlänge:

$$s = \frac{1}{d} \int_0^t v dt$$

und damit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right) \cdot v' \quad \text{mit} \quad v' = \frac{dv}{ds}$$

Damit wird aus der Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = -C_D^* \left(\frac{v}{d}\right) v$$

die Gleichung

$$v' = -C_D^* v$$

Wir setzen nun

$$G := \frac{gd\cos(\phi)}{v^2}$$

dann wird aus der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = C_{L\alpha}^* \left(\frac{v}{d}\right) [\mathbf{x} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{x})\mathbf{i}] - \frac{g\cos(\phi)}{v}\mathbf{j}$$

die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right) \left\{C_{L\alpha}^* [\mathbf{x} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{x})\mathbf{i}] - G\mathbf{j}\right\}$$

Wählen wir nun den Einheitsvektor $\mathbf{k}$ derart, dass $\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{i}$. Dann erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ in unserem Koordinatensystem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\times\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right) \left[C_{L\alpha}^* (\mathbf{i}\times\mathbf{x}) - G\mathbf{k}\right]$$

Aus der theoretischen Physik ist nun bekannt, dass, wenn das Koordinatensystem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ rotiert bzgl. eines Inertialsystems, bzgl. eines Intertialsystem die Differentiation eines Vektors $\mathbf{q}$ nach der Zeit sich wie folgt ergibt:

$$\left[\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right]_{[IS]} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}$$

wenn $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems bzgl. des Intertialsystems ist.

Damit ergeben sich erst einmal die beiden Gleichungen

$$\left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right]_{[IS]} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}$$

und

$$\left[\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right]_{[IS]} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{H}$$

Hieraus ergibt sich mit der Gleichung

$$\mathbf{H} = I_P \cdot p \cdot \mathbf{i} + I_T \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)$$

mit $\mathbf{i} = \mathbf{x}$ die Gleichung

$$\mathbf{H} = I_P \cdot p \cdot \mathbf{x} + I_T \cdot \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) + I_T \left[\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}\right]$$

Wir differenzieren nun diese Gleichung und beachten den Zusatzterm durch das Kreuzprodukt. Damit erhalten wir

$$\left[\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right]_{[IS]} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$$

$$= I_P \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \mathbf{x} + I_P p \frac{d\mathbf{x}}{dt} + I_T \left(\mathbf{x} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right) + I_T \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - I_T \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{x}\right)\mathbf{x} - 2I_T(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\frac{d\mathbf{x}}{dt} + I_P p(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - I_T(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

Diese Vektordifferentialgleichung beschreibt das Drehmoment des Geschosses, wir setzen sie nun gleich der Summe aller Drehmomente, die am Geschoss angreifen und erhalten:

$$I_P \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \mathbf{x} + I_P p \frac{d\mathbf{x}}{dt} + I_T \left(\mathbf{x} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right) + I_T \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - I_T \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \mathbf{x}\right)\mathbf{x} - 2I_T(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\frac{d\mathbf{x}}{dt} + I_P p(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - I_T(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

$$= \frac{1}{2}\rho S d v^2 \left(\frac{pd}{v}\right) C_{l_p}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\rho S d v^2 \delta_F C_{l_\delta}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\rho S d C_{M_\alpha} v^2 (\mathbf{i} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2}\rho S d v^2 \left(\frac{pd}{v}\right) C_{M_{p\alpha}}[\mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}]$$

$$+ \frac{1}{2}\rho S d^2 v C_{M_q} \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) + \frac{1}{2}\rho S d^2 v C_{M_{\dot\alpha}} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)$$

Wir bilden nun das Kreuzprodukt auf beiden Seiten mit $\mathbf{x}$ und erhalten:

$$\frac{dp}{dt} = k_x^{-2}\left(\frac{v}{d}\right)^2 \left[\left(\frac{pd}{v}\right) C^*_{l_p} + \delta_F C^*_{l_\delta}\right]$$

mit

$$k_x^{-2} = \frac{md^2}{I_P}, \quad C^*_{l_p} = \frac{\rho S d}{2m} C_{l_p} \quad \text{und} \quad C^*_{l_\delta} = \frac{\rho S d}{2m} C_{l_\delta}$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung für die Rollbewegung hergeleitet.

Wir können nun diese Gleichung für $\frac{dp}{dt}$ zurücksubstituieren und erhalten mit den Abkürzungen

$$C^*_{M_\alpha} = \frac{\rho S d}{2m} C_{M_\alpha}, \quad C^*_{M_{p\alpha}} = \frac{\rho S d}{2m} C_{M_{p\alpha}}, \quad C^*_{M_q} = \frac{\rho S d}{2m} C_{m_q}$$

$$C^*_{M_{\dot\alpha}} = \frac{\rho S d}{2m} C_{M_{\dot\alpha}}, \quad k_y^{-2} = \frac{md^2}{I_T}, \quad P = \left(\frac{I_P}{I_T}\right)\left(\frac{pd}{v}\right)$$

die Gleichung

$$\left(\mathbf{x} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right) + \left[\frac{I_P p}{I_T} - 2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})\right]\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left[\frac{I_P p}{I_T} - 2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})\right](\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\cdot\mathbf{x}\right)\mathbf{x}$$

$$= \left(\frac{v}{d}\right)^2 k_y^{-2} C^*_{M_\alpha}(\mathbf{i}\times\mathbf{x}) + \left(\frac{v}{d}\right)^2 k_x^{-2} P C^*_{M_{p\alpha}}[\mathbf{i} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{x})\mathbf{x}] + \left(\frac{v}{d}\right)^2 k_y^{-2} C^*_{M_q}\left(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)$$

$$+ \left(\frac{v}{d}\right) k_y^{-2} C_{M_{\dot\alpha}}\left[\mathbf{x}\times\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)\right]$$

Wir stellen nun den Vektor $\mathbf{x}$ in unserem rotierenden Koordinatensystem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ dar und erhalten erst einmal:

$$\mathbf{x} = \cos(\alpha)\cos(\beta)\mathbf{i} + \sin(\alpha)\cos(\beta)\mathbf{j} + \sin(\beta)\mathbf{k}$$

Da wir kleine Winkel voraussetzen, erhalten wir

$$\mathbf{x} = \gamma\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$$

wobei

$$\gamma = \cos(\alpha)\cos(\beta) \approx 1, \quad \alpha \approx \sin(\alpha)\cos(\beta) \approx \sin(\alpha), \quad \beta \approx \sin(\beta)$$

Für die weiteren Ausführungen benötigen wir nun die folgenden Definitionen und Approximationen:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\beta}{dt}\mathbf{k}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2\beta}{dt^2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\gamma\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\gamma}{dt}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{x} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left(\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2} - \beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\mathbf{i} + \left(\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\mathbf{j} + \left(\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{x} = -\beta\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{v}{d}\right)\left[-C^*_{L_\alpha}\beta\mathbf{j} + (C^*_{L_\alpha}\alpha - G)\mathbf{k}\right]$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} = -\left(\frac{v}{d}\right)G\beta$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \left(\frac{v}{d}\right)\left(-\left[C^*_{L_\alpha}\beta^2 + C^*_{L_\alpha}\alpha^2 - G\alpha\right]\mathbf{i} + \gamma\left[C^*_{L_\alpha}\alpha - G\right]\mathbf{j} + \gamma C^*_{L_\alpha}\beta\mathbf{k}\right)$$

Vernachässigen wir nun in der letzten Gleichung die Terme zweiter Ordnung, dann erhalten wir

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \left(\frac{v}{d}\right)\left[G\alpha\mathbf{i} + \gamma\left[C^*_{L_\alpha}\alpha - G\right]\mathbf{j} + \gamma C^*_{L_\alpha}\beta\mathbf{k}\right]$$

Wir bilden nun die zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\omega}$ und vernachlässigen dabei $\frac{dG}{dt}$, dies ergibt

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right)C^*_{L_\alpha}[-\frac{d\beta}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{k}]$$

Bevor wir endgültig drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für α, β und γ erhalten, müssen wir noch, wie bereits weiter oben angesprochen, noch auf auf die Bogenlänge s transformieren.

Dazu beachten wir als Transformationegleichungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right)\frac{d\alpha}{ds}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right)\frac{d\beta}{ds}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right)\frac{d\gamma}{ds}$$

und

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\frac{v}{d}\right)^2[\alpha'' - C^*_D\alpha'], \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = \left(\frac{v}{d}\right)^2[\beta'' - C^*_D\beta'], \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left(\frac{v}{d}\right)^2[\gamma'' - C^*_D\gamma']$$

Wir substituieren nun die obigen Gleichungen, insbesondere die Darstellung für

$$\mathbf{x} = \gamma\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$$

in die folgende Gleichung

$$\left(\mathbf{x}\times\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)+\left[\frac{I_P p}{I_T}-2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})\right]\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\left[\frac{I_P p}{I_T}-2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})\right](\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x})+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}-\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\cdot\mathbf{x}\right)\mathbf{x}$$

$$=\left(\frac{v}{d}\right)^2 k_y^{-2}C^*_{M_\alpha}(\mathbf{i}\times\mathbf{x})+\left(\frac{v}{d}\right)^2 k_x^{-2}PC^*_{M_{p\alpha}}[\mathbf{i}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{x})\mathbf{x}]+\left(\frac{v}{d}\right)^2 k_y^{-2}C^*_{M_q}\left(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)$$

$$+\left(\frac{v}{d}\right)k_y^{-2}C_{M_{\dot\alpha}}\left[\mathbf{x}\times\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}-\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right)\right]$$

und erhalten für die **i**-Komponente:

$$(\beta''-C^*_D\beta')\alpha-(\alpha''-C^*_D\alpha')\beta+(P+2G\beta)\gamma'+(P+G\beta)G\alpha=$$

$$k_x^{-2}PC^*_{M_{p\alpha}}(1-\gamma^2)+k_y^{-2}C^*_{M_q}(\alpha\beta'-\beta\alpha')+k_y^{-2}C_{M_\alpha}(\alpha\beta'-\beta\alpha'+G\alpha)$$

entsprechend für die **j**-Komponente

$$(\gamma''-C^*_D\gamma')\beta-(\beta''-C^*_D\beta')\gamma+(P+2G\beta)\alpha'+\gamma(P+G\beta)(C^*_{L_\alpha}\alpha-G)-C^*_{L_\alpha}\beta'=$$

$$-k_y^{-2}C^*_{M_\alpha}\beta-k_y^{-2}PC^*_{M_{p\alpha}}\gamma\alpha+k_y^{-2}C^*_{M_q}(\beta\gamma'-\gamma\beta')+k_y^{-2}C^*_{M_\alpha}[\beta\gamma'-\gamma\beta'+\gamma(C_{L_\alpha}\beta-G)]$$

und für die **k**-Komponente

$$(\alpha''-C^*_D\alpha')\gamma-(\gamma''-C^*_D\gamma')\alpha+(P+2G\beta)\beta'+\gamma(P+G\beta)C^*_{L_\alpha}\beta+C^*_{L_\alpha}\alpha'=$$

$$k_y^{-2}C^*_{M_\alpha}\alpha-k_x^{-2}PC^*_{M_{p\alpha}}\gamma\beta+k_y^{-2}C^*_{M_q}(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')+k_y^{-2}C_{M_\alpha}(\gamma\alpha'-\alpha\gamma'-\gamma C^*_{L_\alpha}\alpha)$$

Diese drei Differentialgleichungen können weiter erheblich vereinfacht werden, indem man die Größenordnung der jeweiligen Terme abschätzt. Die Details sind etwas länglich und können im Buch von McCoy (1999) auf S. 227 nachgelesen werden.

Diese Vereinfachungen führen dazu, dass die letzten beiden Differentialgleichungen ersetzt werden können durch die beiden Differentialgleichungen:

$$-\beta''-C^*_D\beta'+P\alpha'-PG+PC^*_{L_\alpha}\alpha-C^*_{L_\alpha}\beta'=-k_y^{-2}C^*_{M_\alpha}\beta-k_x^{-2}PC^*_{M_{p\alpha}}\alpha-k_y^{-2}(C^*_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})\beta'$$

und

$$\alpha''-C^*_D\alpha'+P\beta'+PC^*_{L_\alpha}\beta+C^*_{L_\alpha}\alpha'=k_y^{-2}C^*_{M_\alpha}\alpha-k_y^{-2}PC^*_{M_{p\alpha}}\beta+k_y^{-2}(C^*_{M_q}+C_{M_{\dot\alpha}})\alpha'$$

Um diese beiden Differentialgleichungen zu lösen, führen wir komplexe Variablen ein.
Wir multiplizieren die erste Differentialgleichung mit $-i0-\sqrt{-1}$ und erhalten

$$i\beta'' + iC_D^*\beta' - iP\alpha' + iPG - iPC_{L_\alpha}^*\alpha + iC_{L_\alpha}^*\beta' = +ik_y^{-2}C_{M_\alpha}^*\beta + ik_x^{-2}PC_{M_{p\alpha}}^*\alpha + ik_y^{-2}(C_{M_q}^* + C_{M_{\dot\alpha}})\beta'$$

Wir können nun diese Gleichung und Gleichung

$$\alpha'' - C_D^*\alpha' + P\beta' + PC_{L_\alpha}^*\beta + C_{L_\alpha}^*\alpha' = k_y^{-2}C_{M_\alpha}^*\alpha - k_y^{-2}PC_{M_{p\alpha}}^*\beta + k_y^{-2}(C_{M_q}^* + C_{M_{\dot\alpha}})\alpha'$$

addieren. Dies führt zu der Gleichung

$$(\alpha'' + i\beta'') - C_D^*(\alpha' + i\beta') + P(\beta' - i\alpha') + PC_{L_\alpha}^*(\beta - i\alpha) + C_{L_\alpha}^*(\alpha' + i\beta') + iPG =$$

$$k_y^{-2}C_{M_\alpha}^*(\alpha + i\beta) - k_x^{-2}PC_{M_{p\alpha}}^*(\beta - i\alpha) + k_y^{-2}(C_{M_q}^* + C_{M_{\dot\alpha}})(\alpha' + i\beta')$$

Wir führen nun die Variable $\xi = \alpha + i\beta$ ein, dann ist $\xi' = \alpha' + i\beta'$ und $\xi'' = \alpha'' + i\beta''$.
Mit $-i\xi = \beta - i\alpha$ und $-i\xi' = \beta' - i\alpha'$ geht unsere Differentialgleichung über in

$$\xi'' - C_D^*\xi' - iP\xi' - iPC_{L_\alpha}^*\xi + C_{L_\alpha}^*\xi' + iPG = k_y^{-2}C_{M_\alpha}^*\xi + ik_x^{-2}PC_{M_{p\alpha}}^*\xi + k_y^{-2}(C_{M_q}^* + C_{M_{\dot\alpha}})\xi'$$

Indem wir nun die Koeffizienten von ξ und seinen Ableitungen zusammenfassen, erhalten wir

$$\xi'' + (H - iP)\xi' - (M + iPT)\xi = -iPG$$

wobei

$$H = C_{L_\alpha}^* - C_D^* - k_y^{-2}(C_{M_q}^* + C_{M_{\dot\alpha}}^*)$$

$$P = \left(\frac{I_P}{I_T}\right)\left(\frac{pd}{v}\right)$$

$$M = k_y^{-2}C_{M_\alpha}^*$$

$$T = C_{L_\alpha} + k_x^{-2}C_{M_{p\alpha}}^*$$

$$G = \frac{gd\cos(\phi)}{v^2}$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung, die wir im Folgenden untersuchen wollen.

5.3 Die Lösungen der Differentialgleichungen

Die eine der beiden Differentialgleichungen ist gegeben durch

$$v' = -C_D^* v$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = vV_0$, der Anfangsgeschwindigkeit.

Als Lösung erhalten wir sofort

$$v = v(s) = v_0 \exp(-C_D^* s)$$

Wir wollen nun die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} = k_x^{-2} \left(\frac{v}{d}\right)^2 \left[\left(\frac{pd}{v}\right) C_{l_p}^* + \delta_F C_{l_\delta}^*\right]$$

mit

$$k_x^{-2} = \frac{md^2}{I_P}, \quad C_{l_p}^* = \frac{\rho S d}{2m} C_{l_p} \quad \text{und} \quad C_{l_\delta}^* = \frac{\rho S d}{2m} C_{l_\delta}$$

angehen. Hierzu definieren wir zuerst einen Rollwinkel ϕ (es besteht dabei keine Gefahr, diesen Winkel mit dem Winkel ϕ aus den vorhergehenden Abschnitten durcheinanderzubringen), wobei die Rate des Winkels ϕ gerade die Ableitung von p sein soll.

Damit haben wir

$$p = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Weiterhin ist zu beachten, dass

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{v}{d}\right)\phi' \quad \text{und} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \left(\frac{v}{d}\right)\left[\left(\frac{v}{d}\right)\phi'' + \left(\frac{v'}{d}\right)\phi'\right]$$

Wir setzen nun $v' = -C_D^* v$ und die obigen beiden Gleichungen in die letzte Differentialgleichung ein und erhalten nach Division durch $\left(\frac{v}{d}\right)^2$

$$\phi'' + K_p \phi' - K_\delta = 0$$

mit

$$\begin{aligned} K_p &= -\left[k_x^{-2} C^*_{l_p} + C^*_D\right] \\ K_\delta &= k_x^{-2} \delta_F C^*_{l_\delta} \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich hierfür

$$\phi = \phi_0 + \phi'_{(s/s)} s + A(\exp(-K_p s) - 1)$$

mit

$$\phi'_{(s/s)} = \frac{K_\delta}{K_p} \quad \text{und} \quad A = \frac{K_\delta - \phi'_0 K_p}{K_p^2}$$

Sollte $K_\delta = 0$ sein (dies kann durchaus der Fall sein, siehe McCoy (1999), S. 228), dann reduziert sich die Lösung auf

$$\phi = \phi_0 - \frac{\phi'_0}{K_p}(\exp(-K_p s) - 1)$$

Wir wollen nun die Differentialgleichung

$$\xi'' + (H - iP)\xi' - (M + iPT)\xi = -iPG$$

angehen.

Hierzu vernachlässigen wir in einem ersten Schritt alle aerodynamischen Momente bis auf das größte Moment. Damit reduziert sich die obige Differentialgleichung auf

$$\xi'' - iP\xi' - M\xi = -iPG$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung im Komplexen ist gegeben durch (siehe Königsberger (2004), S. 173 ff.)

$$\xi = K_F \exp(i\phi_F) + K_S \exp(i\phi_S) + i\beta_R$$

wobei

$$
\begin{array}{lcl}
\xi & = & \alpha + i\beta \\
K_F & = & \text{Amplitude der schnellen epizyklischen Seitenbewegung} \\
K_S & = & \text{Amplitude der langsamen epizyklischen Seitenbewegung} \\
\phi_F & = & \phi_{F_0} + \phi_F' s \\
\phi_S & = & \phi_{S_0} + \phi_S' s \\
\phi_{F_0} & = & \text{Anfangsphasenwinkel der schnellen epiz. Seitenbewegung} \\
\phi_{S_0} & = & \text{Anfangsphasenwinkel der langsamen epiz. Seitenbewegung} \\
\phi_F' & = & \frac{1}{2}\left[P + \sqrt{P^2 - 4M}\right] \\
\phi_S' & = & \frac{1}{2}\left[P - \sqrt{P^2 - 4M}\right] \\
\beta_R & = & \frac{PG}{M} \quad \text{die Partikularlösung}
\end{array}
$$

Anschaulich bedeutet dies, dass ein symmetrisches Geschoss sich auf zwei Kreisbewegungen um die translatorische Flugbahn (zusätzlich) bewegt:

1.) eine langsame Kreisbewegung rund um die Flugbahn, der sogenannten Präzession und

2.) einer der langsamen Kreisbewegung überlagerten zweiten schnelleren Kreisbewegung um die langsamere Kreisbewegung herum, der sogenannten Nutation.

Man kann nun an dieser Stelle Betrachtungen bzgl. der Stabilität des Geschosses anstellen. Ausschlaggeben ist hierbei die Größe

$$P^2 - 4M$$

Unterstellen wir, dass $P^2 - 4M > 0$ gilt, dann sind die Exponenten $i\phi_F$ und $i\phi_S$ beide rein imaginär.

Bedenkt man, dass

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

dann beschreiben die beiden Exponentialfunktionen in dem Ausdruck

$$\xi = K_F \exp(i\phi_F) + K_S \exp(i\phi_S) + i\beta_R$$

reine Kreisbewegungen in der komplexen Ebene mit Winkelgeschwindigkeiten ϕ_F' und ϕ_S'.

Die Radien der Kreise K_f und K_S bleiben dabei konstant. Weder dämpfen sie sich heraus noch wachsen sie über alle Grenzen.

Man kann dieses Zusammenspiel von zwei Kreisen dann so interpretieren, dass der eine Kreis in der komplexen Ebene um den Mittelpunkt $(0; i\beta_R)$ mit dem Radius K_S rotiert bei einer Winkelgeschwindigkeit ϕ_S', wobei dieser Kreis selbst von Epizyklen (also Kreisen selbst) überlagert wird mit Radius K_F und einer Winkelgeschwindigkeit ϕ_F'.

Ist dagegen $P^2 - 4M < 0$, dann führt dies dazu, dass wir komplexe Werte für ϕ_F und ϕ_S erhalten. In dem Ausdruck

$$\xi = K_F \exp(i\phi_F) + K_S \exp(i\phi_S) + i\beta_R$$

werden dann Realteile auftreten mit exponentiellem Wachstum. Dies wiederum führt zu dem Begriff der instabilen Bewegung und umgekehrt zu der Bedingung der **gyroskopirschen Stabilität**

$$P^2 - 4M > 0$$

Im Zusammenhang damit führt man dann den sogenannten gyroskopischen Stabilitätsfaktor S_g ein

$$S_g := \frac{P^2}{4M} = \frac{I_P p^2}{2\rho I_T S d v^2 C_{M_\alpha}} = \frac{(\phi_F' + \phi_S')^2}{4\phi_F' \phi_S'}$$

Eliminiert man P^2 aus der Gleichung $p^2 - 4M$, dann erhält man

$$4M(S_g - 1) > 0$$

Für ein drallstabilisiertes (d. h. $M > 0$) instabiles Geschoss bedeutet dies, dass

$$S_g > 1$$

Dies ist das klassische gyroskopische Stabilitätskriterium.

Wir betrachten nun die vollständige Differentialgleichung

$$\xi'' + (H - iP)\xi' - (M + iPT)\xi = -iPG$$

wobei

$$H = C^*_{L_\alpha} - C^*_D - k_y^{-2}(C^*_{M_q} + C^*_{M_{\dot\alpha}})$$

$$P = \left(\frac{I_P}{I_T}\right)\left(\frac{pd}{v}\right)$$

$$M = k_y^{-2} C^*_{M_\alpha}$$

$$T = C_{L_\alpha} + k_x^{-2} C^*_{M_{p\alpha}}$$

$$G = \frac{gd\cos(\phi)}{v^2}$$

Die Differentialgleichung kann in analoger Weise gelöst werden wie im vorhergehenden Fall und ist gegeben durch

$$\xi = K_{F_0} \exp(\lambda_F s) \exp(i\phi_F) + K_{S_=} \exp(\lambda_S s) \exp(i\phi_S) + i\beta_R$$

mit

$$\begin{array}{lcll} K_F & = & K_{F_0} \exp(\lambda_F s) & \text{der Amplitude der schnellen epiz. Seitenbewegung} \\ K_S & = & K_{S_=} \exp(\lambda_S s) & \text{der Amplitude der langsamen epiz. Seitenbewegung} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \phi_F & = & \phi_{F_0} + \phi_F' s \\ \phi_S & = & \phi_{S_0} + \phi_S' s \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{lcl} \phi_{F_0} & = & \text{Anfangsphasenwinkel der schnellen epiz. Seitenbewegung} \\ \phi_{S_0} & = & \text{Anfangsphasenwinkel der langsamen epiz. Seitenbewegung} \end{array}$$

$$\beta_R = \frac{PG}{M + iPT}$$

$$\begin{aligned} \lambda_F + i\phi_F' &= \frac{1}{2}\left[-H + iP + \sqrt{4M + H^2 - P^2 + 2iP(2T - H)}\right] \\ \lambda_S + i\phi_S' &= \frac{1}{2}\left[-H + iP - \sqrt{4M + H^2 - P^2 + 2iP(2T - H)}\right] \end{aligned}$$

siehe McCoy (1999), S. 232, oder Carlucci and Jacobson (2008), 267 ff.

Hierbei ist zu beachten. dass die beiden letzten Gleichungen als komplexes Paar aufzufassen sind. D. h. nach Umwandlung der Wurzel in die sogenannte Nebenform erhält man für λ_F bzw. λ_S einen entsprechenden Ausdruck (analog für ϕ_F' und ϕ_S').

Aus diesem Grund erhält man im Unterschied zu der vorher betrachteten vereinfachteten Differentialgleichung hier zusätzlich noch Exponentialterme hinzu.

Sind nun λ_F und λ_S beide negativ, dann haben wir eine gedämpfte epizyklische Bewegung, in allen anderen Fällen eine ungedämpfte Bewegung.

Man kann nun die obigen Gleichungen nach P, M, H und PT auflösen. Man erhält nach einiger Rechnung (siehe McCoy (1999), S. 232, oder Carlucci and Jacobson (2008), S. 271):

$$\begin{aligned} P &= \phi_F' + \phi_S' \\ M &= \phi_F' \phi_S' - \lambda_F \lambda_S \\ H &= -[\lambda_F + \lambda_S] \\ PT &= -[\phi_F' \lambda_S + \phi_S' \lambda_F] \end{aligned}$$

Vernachlässigt man die Produkte und invertiert man dies jetzt, dann erhält man:

$$\begin{aligned}
\phi'_F &= \frac{1}{2}[P + \sqrt{P^2 - 4M}] \\
\phi'_S &= \frac{1}{2}[P - \sqrt{P^2 - 4M}] \\
\lambda_F &= -\frac{1}{2}\left[H - \frac{P(2T - H)}{\sqrt{P^2 - 4M}}\right] \\
\lambda_S &= -\frac{1}{2}\left[H - \frac{P(2T - H)}{\sqrt{P^2 - 4M}}\right]
\end{aligned}$$

Damit können nun Stabilitätsbetrachtungen angestellt werden.

5.4 Stabilität

Die erhaltenen Gleichungen für ϕ'_F und ϕ'_S sind erst einmal identisch mit denen, die wir im Fall der vereinfachten Differentialgleichung erhalten hatten.

Deshalb ist auch das Kriterium für die gyroskopische Stabilität das gleiche wie im vollständigen Modell.

Wie bereits festgestellt, erfordert dynamische Stabilität, dass sowohl λ_F wie auch λ_S negativ sind. Sollte einer dieser Koeffizienten positiv werden (und bleiben), dann beginnen die Seitenbewegungen des Geschosses zu wachsen (wir haben damit Instabilität).

Für nicht-drehende Geschosse bedeutet dies, dass $M < 0$ und P entweder Null oder zumindest vernachlässigbar. In dieser Situation ist die einzige Bedingung für dynamische Stabilität $H > 0$.

Für drallstabilisierte Geschosse bedeutet die Forderung nach Negativität, dass

$$H \pm \frac{P(2T - H)}{\sqrt{P^2 - 4M}} > 0$$

gelten muss.

Definiert man nun den sogenannten **dynamischen Stabilitätsfaktor** S_d durch

$$S_d = \frac{2T}{H} = \frac{2(C_{L_\alpha} + k_x^{-2} C_{M_{p\alpha}})}{C_{L_\alpha} - C_D - k_y^{-2}(C_{M_q} + C_{\dot{\alpha}})}$$

(siehe McCoy (1999), S. 233), dann kann man folgende zwei Ungleichungen aufstellen, welche beide für dynamische Stabilität erfüllt sein müssen:

$$H > 0 \quad \text{und} \quad \frac{P^2(S_d - 1)}{P^2 - 4M} < 1$$

Löst man die letzte Ungleichung nach $\frac{4M}{P^2}$ auf:

$$\frac{4M}{p^2} < S_d(2 - S_d)$$

dann erhält man mit $S_g = \frac{p^2}{4M}$:

$$\frac{1}{S_g} < S_d(2 - S_d)$$

Die Ungleichungen

$$H > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{S_g} < S_d(2 - S_d)$$

werden als verallgemeinerte dynamische Stabilitätskriterien bezeichnet.

Damit fallen nahezu alle Geschosse in zwei Kategorien (siehe McCoy (1999), S. 233):

Statistisch stabile Geschosse ($M < 0$**)**

(1) Ein statisch stabiles Geschoss ist immer gyroskopisch stabil sein, unabhängig von Spin

(2) Falls der dynamische Stabilitätsfaktor S_d innerhalb des Intervalls $0 < S_d < 2$ liegt, dann ist ein statisch stabiles Geschoss auch dynamisch stabil.

3) Falls der dynamische Stabilitätsfaktor S_d außerhalb des Intervalls $0 < S_d < 2$ liegt, dann wird ein statisch stabiles Geschoss dynamisch instabil.

Statisch instabile Geschosse $M > 0$**)**

(1) Für ein statisch instabiles Geschoss ist gyroskopische Stabilität eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für dynamische Stabilität.

(2) Falls der dynamische Stabilitätsfaktor S_d innerhalb des Intervalls $0 < S_d < 2$ liegt, dann kann ein statisch instabiles Geschoss drall-stabilisiert sein.

(3) Falls der dynamische Stabilitätsfaktor S_d außerhalb des Intervalls $0 < S_d < 2$ liegt, dann kann ein statisch instabiles Geschoss niemals dynamisch stabilisiert werden.

Literaturverzeichnis

D. Carlucci and S. Jacobson. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press, 2008.

G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg, 2002.

E. Hairer, S. P Nørsett, and G Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations, Band I*. Springer Verlag, 1993.

M Hermann. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Oldenbourg Verlag, 2004.

E. Kamke. *Differentialgleichungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1969.

M. Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer Verlag, 2003.

K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer, 2004.

F. Kuypers. *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH, 2010.

R. L. McCoy. *Modern Exterior Ballistics*. Schiffer Publishing Ltd., 1999.

C. H. Murphy. Free flight motion of symmetric missiles. *Ballistics Research Laboratory No. 1216*, 1963.

P. Reineker, M. Schulz, and B. Schulz. *Theoretische Physik I*. Wiley-VCH, 2006.

A. Sommerfeld. *Mechanik, Bd. I*. Verlag Harri Deutsch, 1994.

Index