Mathematik II

=

Höhere Mathematik II

Vorlesender: Prof. Thomas Apel

Studienjahr 2010/11

Das Skript wurde im Wesentlichen im Studienjahr 2004/05 erstellt. Für ihre Mithilfe sei an dieser Stelle Birgit Kremnitz, Cornelia Pester, Manuela Schuster und Gunter Winkler gedankt. Anregungen wurden neben der zitierten Literatur aus dem Skript meines Vorgängers, Prof. Klaus Wichmann, genommen. Ergänzt wird das Skript durch vielfältige Angebote im Internet. Ihr Startpunkt sollte dazu die Seite http://www.unibw.de/bauv1/lehre/Mathematik sein.

Wichtige Webseiten:

- http://www.unibw.de/bauv1/lehre/Mathematik
  Webseite zur Vorlesung
- http://www.unibw.de/rz/dokumente/fakultaeten?id=301960&tid=fakultaeten
  Dokumente (Skripte, Arbeitsblätter, Übungsblätter, Hausaufgaben, ...)
  zur Veranstaltungsreihe Mathematik I – III
- http://www.unibw.de/bauv1/personen/apel
  Homepage von Prof. Thomas Apel, Ihrem Vorlesenden

Inhaltsverzeichnis

6 Reihen **93**
6.1 Zahlenfolgen (Auffrischung) 93
6.2 Zahlenreihen 95
6.3 Potenzreihen 101
6.4 Taylorpolynome 105
6.5 Taylorreihen 110
6.6 Komplexe Funktionen 115
6.7 Fourierreihen 117
6.8 Gleichmäßige Konvergenz 125

7 Funktionen mehrerer Veränderlicher **127**
7.1 Skalare Funktionen 127
7.2 Vektorfunktionen 133

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen **135**
8.1 Grundlagen 135
8.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung 140
8.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung 146
8.4 Lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung . . . 161
8.5 Integraltransformationen 173

Literatur **186**

6 Reihen

6.1 Zahlenfolgen (Auffrischung)

Def 6.1 *Unter einer Zahlenfolge versteht man eine geordnete abzählbar unendliche Menge (reeller) Zahlen. Symbolisch schreibt man*

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Die Zahlen a_1, a_2,... heißen Glieder der Folge. Die Zahl a_n ist das n-te Glied der Folge.

Def 6.2 *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt*

monoton wachsend, wenn $a_i \leq a_j$ für $i < j$,

monoton fallend, wenn $a_i \geq a_j$ für $i < j$,

streng monoton wachsend, wenn $a_i < a_j$ für $i < j$,

streng monoton fallend, wenn $a_i > a_j$ für $i < j$.

nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl M gibt, so dass $a_n \leq M$ für alle n,

nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl m gibt, so dass $a_n \geq m$ für alle n.

Def 6.3 *Eine Zahl g heißt Grenzwert oder Limes der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$, symbolisch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - g| < \varepsilon$ gilt. Symbolisch:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - g| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0.$$

Eine Folge mit Grenzwert Null heißt Nullfolge.

Def 6.4 *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt konvergent, wenn sie einen endlichen Grenzwert besitzt. Andernfalls heißt sie divergent.*

Bsp 6.5 Die Folgen $\langle a_n \rangle = 1, 4, 9, \ldots$ und $\langle a_n \rangle = 1, -1, 1, -1, \ldots$ sind divergente Folgen.

Die Folge $\langle a_n \rangle = (1+1)^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, \ldots$ ist konvergent; es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Die Folge $\langle a_n \rangle = 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ ist konvergent; es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Prägen Sie sich diese Grenzwerte ein.

Bem 6.6 Als Grenzwerte spielen auch $+\infty$ und $-\infty$ eine Rolle:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall E > 0\ \exists n_0 = n_0(E) : a_n > E\ \forall n \geq n_0, \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall E < 0\ \exists n_0 = n_0(E) : a_n < E\ \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Man spricht dann von *bestimmt divergenten Folgen*.

Satz 6.7 (Rechenregeln für konvergente Folgen) *Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen, dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n : b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n : \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *falls* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ *und* $b_n \neq 0 \quad \forall n$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right|$.

Bsp 6.8

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

Satz 6.9 (Dreifolgensatz) *Gilt für drei Folgen $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ und $\langle c_n \rangle$ die Beziehung*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0,$$

und sind die Grenzwerte von $\langle a_n \rangle$ und $\langle c_n \rangle$ gleich,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

dann konvergiert auch die Folge $\langle b_n \rangle$ gegen den Grenzwert g, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Bem 6.10 Umgangssprachlich wird der Dreifolgensatz auch als Polizistenmethode bezeichnet.

Bsp 6.11 [MV1, Bsp. 1 in Abschnitt 2.5.2] Es gilt für $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0.$$

Bsp 6.12 [MV1, Bsp. 3 in Abschnitt 2.5.2] Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Dazu betrachten wir die Folge mit den Gliedern $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, die für $n \geq 2$ positiv sind. Es gilt unter Verwendung des Binomischen Satzes

$$n = (a_n + 1)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \ldots + a_n^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$$

also $n - 1 \geq \frac{1}{2} n(n-1)\, a_n^2$ bzw. $1 \geq \frac{n}{2}\, a_n^2$ und somit $0 \leq a_n^2 \leq \frac{2}{n}$. Mit dem Dreifolgensatz folgt $a_n^2 \to 0$ und darum $a_n \to 0$.

6.2 Zahlenreihen

Literatur: [Pap1, VI.1]

Bem 6.13 (Motivation) Die Darstellung von Funktionen in Form von Taylor- oder Fourierreihen spielt eine große Rolle in der Analysis und in Anwendungen. Bevor wir uns mit solchen Funktionenreihen beschäftigen, wollen wir den Begriff Reihe am Beispiel von Zahlenreihen klären und einige nützliche Eigenschaften kennenlernen.

Def 6.14 *Gegeben sei eine Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$. Die Größe*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

heißt Partialsumme (Teilsumme).

Die Zahlenfolge $\langle s_n \rangle$ heißt unendliche (Zahlen-)Reihe. Sie wird symbolisch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

geschrieben.

Eine Reihe heißt konvergent bzw. divergent, wenn die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen konvergiert bzw. divergiert. Konvergiert die Reihe, so heißt der Grenzwert s der Folge $\langle s_n \rangle$ der Grenzwert der Reihe,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Bem 6.15 Der Laufindex k im Summensymbol kann in den Beispielen auch bei Null oder einer anderen ganzen Zahl beginnen. Dadurch ändert sich die Konvergenzeigenschaft nicht, nur der Grenzwert s, falls er existiert. Interessiert nur prinzipiell, ob eine Reihe konvergiert oder nicht, wird deshalb auch manchmal nur $\sum\limits_k a_k$ oder $\sum a_k$ geschrieben.

Bsp 6.16 (Geometrische Reihe)

$$\begin{aligned}
a_k &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
s_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
s &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2
\end{aligned}$$

Die Zahl $\frac{1}{2}$ kann durch eine Zahl $q \in (-1, 1)$ ersetzt werden. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Ü 6.17 http://www.mathe-online.at/tests/grenz/seltsamesumme.html

Bsp 6.18 Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

divergiert, da die Folge der Partialsummen $\langle s_n \rangle = 1, 0, 1, 0, \ldots$ nicht konvergiert.

Ü 6.19 *Konvergieren die Reihen (a)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}$ *und (b)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$*?*

Bsp 6.20 (Harmonische Reihe) Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Die Partialsummen wachsen zwar sehr langsam, aber sie divergieren, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=2}^{2^j} \frac{1}{k} \geq \frac{j}{2}.$$

Aufg 6.21 *Warum kann man das Divergieren der harmonischen Reihe auf dem Computer nicht nachvollziehen?*

Satz 6.22 (Rechnen mit konvergenten Reihen) *Seien* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Zahlenreihen und* $c \in \mathbb{R}$ *eine reelle Zahl. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \end{aligned}$$

Ü 6.23 *Man berechne die Grenzwerte folgender Zahlenreihen:*
(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ *(b)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k\right]$ *(c)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]$

Satz 6.24 (Notwendiges Konvergenzkriterium) *Für die Konvergenz einer Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist die Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

notwendig, aber nicht hinreichend.

Beweis Sei $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Wegen $s_n = s_{n-1} + a_n$ gilt

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n-1} + a_n) = s + \lim_{n\to\infty} a_n,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. q.e.d.

Bsp 6.25 Sowohl die geometrische als auch die harmonische Reihe erfüllen das notwendige Konvergenzkriterium, aber nur die geometrische Reihe ist konvergent.

Ü 6.26 *Was können Sie schlussfolgern, wenn Sie das notwendige Konvergenzkriterium auf die Reihen (a)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{3k^2+1}$ *und (b)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{3k^3+1}$ *anwenden?*

Def 6.27 *Eine Reihe heißt alternierend, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.*

Satz 6.28 (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen) *Eine alternierende Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn die Beträge ihrer Glieder eine monotone Nullfolge bilden, d.h., wenn* $|a_k| \geq |a_{k+1}|$ *für* $k \geq k_0$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$.

Bsp 6.29 Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

ist konvergent.

Ü 6.30 *Man prüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:*
(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{2k+1}$ *(b)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

Bem 6.31 In dieser Bemerkung soll kurz auf einen weiteren Begriff aus dem Thema Zahlenfolgen eingegangen werden, den wir im Beweis des folgenden Satzes benötigen.

Eine Folge $\langle s_n \rangle$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$.

Wenn wir die reellen Zahlen zugrunde legen, kann man beweisen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, und umgekehrt jede Cauchy-Folge konvergiert.

Dennoch sind die Begriffe *konvergente Folge* und *Cauchy-Folge* nicht synonym. Zum Beispiel gibt es im Bereich der rationalen Zahlen Cauchy-Folgen, die keinen Grenzwert im Bereich der rationalen Zahlen haben, etwa die Folge $\langle s_n \rangle$ mit $s_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Satz 6.32 *Ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent, dann auch* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis Sei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Da diese Reihe konvergiert, konvergiert auch die Folge $\langle s_n \rangle$; sie ist also eine Cauchy-Folge:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0.$$

Andererseits gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|.$$

Folglich haben wir gezeigt, dass auch die Folge $\langle \sigma_n \rangle$ mit $\sigma_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchyfolge und damit konvergent ist. Also ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

q.e.d.

Def 6.33 *Gilt für eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *dass* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent ist, dann heißt die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent. Ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, aber* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *nicht, dann heißt die Reihe bedingt konvergent.*

Bem 6.34 Die Eigenschaft einer Reihe, absolut konvergent zu sein, ist Voraussetzung für die Umordenbarkeit von Gliedern einer Reihe. Zum Beispiel ist die alternierende harmonische Reihe $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$ nur bedingt konvergent. Ordnet man deren Glieder um, z.B.

$$\tilde{s} := (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} + \ldots,$$

wobei weder ein Glied weggelassen wurde, noch eines hineingeschmuggelt wurde, dann erhält man nach dem Berechnen der Klammerausdrücke und Ausklammern des Faktors $\frac{1}{2}$

$$\tilde{s} := \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} \pm \ldots = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \pm \ldots) = \tfrac{1}{2} s$$

einen anderen Grenzwert der Reihe.

B. Riemann hat 1854 sogar gezeigt, dass man durch Umordnung einer bedingt konvergente Reihe jeden beliebigen Grenzwert erreichen kann.

Satz 6.35 (Quotientenkriterium) *Wenn für die Glieder einer Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *der Grenzwert*

$$q := \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

existiert, dann ist die Reihe für $q < 1$ *absolut konvergent und für* $q > 1$ *divergent. Für* $q = 1$ *ist keine Entscheidung möglich.*

Bem 6.36 Für Fälle, in denen der Grenzwert $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ nicht existiert, gibt es ein schärferes Quotientenkriterium, auf das wir aber nicht eingehen wollen.

Bsp 6.37

1. Für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist $a_k = \frac{1}{k!}$ und es gilt

$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

   Die Reihe ist (absolut) konvergent.

2. Für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ gilt

$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1.$$

   Das Quotientenkriterium liefert keine Entscheidung.

Ü 6.38 *Überlegen Sie sich, dass Reihen, für die $q > 1$ gilt, auch das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllen.*

Satz 6.39 (Wurzelkriterium) *Wenn für die Glieder einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ der Grenzwert*

$$q := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

existiert, dann ist die Reihe für $q < 1$ absolut konvergent und für $q > 1$ divergent. Für $q = 1$ ist keine Entscheidung möglich.

Bem 6.40 Für Fälle, in denen der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ nicht existiert, gibt es ein schärferes Wurzelkriterium, auf das wir aber nicht eingehen wollen.

Bsp 6.41

1. Für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ ist $a_k = \frac{1}{2^k}$ und es gilt

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   Die Reihe ist (absolut) konvergent.

2. Für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ gilt

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} = 1.$$

   Das Wurzelkriterium liefert keine Entscheidung.

Ü 6.42 *Überlegen Sie sich, dass Reihen, für die $q > 1$ gilt, auch das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllen.*

Satz 6.43 (Majoranten- und Minorantenkriterium)

1. *Ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern* $b_k > 0$, *und ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit*

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{für } k \geq k_0,$$

dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

2. *Ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine divergente Reihe mit positiven Gliedern* $b_k > 0$, *und ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit*

$$a_k \geq b_k \quad \text{für } k \geq k_0,$$

dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beweis Der Beweis wird analog zum Beweis von Satz 6.32 geführt. q.e.d.

Bsp 6.44 Für die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ versagen Quotienten- und Wurzelkriterium. Es gilt jedoch

$$a_k = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} =: b_k,$$

und wir wissen, dass die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ konvergiert, denn

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = 1.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Ü 6.45 *Man untersuche die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{3k^3-1}$ *auf Konvergenz.*

6.3 Potenzreihen

Literatur: [Pap1, VI.2]

Def 6.46 *Funktionenreihen* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *sind Reihen, deren Glieder Funktionen sind.*

Bem 6.47 Für festes x ergibt sich eine Zahlenreihe. Ob diese konvergiert oder nicht, hängt im Allgemeinen von der Wahl von x ab.

Def 6.48 *Die Menge aller Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ einen Grenzwert $f(x)$ besitzt, heißt Konvergenzgebiet oder Konvergenzbereich der Reihe. Der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist gleich dem Konvergenzbereich der Reihe.*

Def 6.49 *Potenzreihen sind Funktionenreihen, für die $f_k(x) = a_k(x-x_0)^k$ gilt, d.h. Potenzreihen haben die Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k.$$

Die Stelle x_0 heißt Entwicklungspunkt.

Bem 6.50 In Abschnitt 6.5 werden wir die umgekehrte Aufgabenstellung behandeln, zu einer gegebenen (Grenz-)Funktion $s(x)$ die Koeffizienten der zugehörigen Potenzreihe zu berechnen. Diese sogenannte *Potenzreihenentwicklung* einer Funktion erweist sich als brauchbares mathematisches Hilfsmittel bei der Lösung folgender Problemstellungen:

- Annäherung einer gegebenen (komplizierten) Funktion durch eine Polynomfunktion,
- näherungsweise Berechnung von Funktionswerten komplizierter Funktionen,
- Herleitung von Näherungsformeln,
- Untersuchung der Genauigkeit von Näherungsformeln,
- Integration einer Funktion durch Potenzreihenentwicklung des Integranden und anschließender gliedweiser Integration.

Bem 6.51 Ein weiterer wichtiger Typ von Funktionenreihen sind *Fourierreihen*. Man kann eine gegebene periodische Funktion $f(x)$ mit der Periode T als Reihe trigonometrischer Funktionen darstellen. Sei $\omega = 2\pi/T$ die zugehörige Kreisfrequenz, dann gilt (für stetige Funktionen):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x),$$

wobei $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos k\omega x \,\mathrm{d}x$, $k = 0, 1, \ldots$, und $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x \,\mathrm{d}x$, $k = 1, 2, \ldots$ Darauf werden wir jedoch erst in Abschnitt 6.7 genauer eingehen.

Satz 6.52 *Zu jeder Potenzreihe gibt es eine Zahl r, so dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < r$ konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > r$ divergiert.*

Def 6.53 *Die Zahl r aus dem vorangegangenen Satz heißt Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.*

Bem 6.54 Zur Bestimmung des Konvergenzgebiets muss man den Konvergenzradius bestimmen und die Punkte $x = x_0 \pm r$ extra untersuchen. Der Konvergenzradius kann mit dem Quotienten- und dem Wurzelkriterium bestimmt werden.

Aufg 6.55 *Man untersuche eine Potenzreihe mit dem Quotientenkriterium für Zahlenreihen.*

Wir betrachten die Potenzreihe als Zahlenreihe mit dem Parameter x und definieren die Zahl

$$q = q(x) := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Potenzreihe für solche x, für die $q < 1$ und divergiert für $q > 1$. Man überlegt sich leicht, dass

$$r := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

der Konvergenzradius ist, denn dann gilt

$$\begin{aligned} q &= |x-x_0| \cdot \frac{1}{r} < 1 \quad \text{für } |x-x_0| < r, \\ q &= |x-x_0| \cdot \frac{1}{r} > 1 \quad \text{für } |x-x_0| > r. \end{aligned}$$

Bem 6.56 Man beachte, dass die Zahlen a_k bei Zahlenreihen die Glieder der Reihe sind, hier bei Potenzreihen lediglich Koeffizienten in den Gliedern.

Aufg 6.57 *Man untersuche eine Potenzreihe mit dem Wurzelkriterium für Zahlenreihen.*

Wir betrachten wieder die Potenzreihe als Zahlenreihe mit dem Parameter x und definieren die Zahl

$$q = q(x) := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x-x_0|^k} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Potenzreihe für solche x, für die $q < 1$ und divergiert für $q > 1$. Man überlegt sich leicht, dass

$$r := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

der Konvergenzradius ist, denn dann gilt

$$\begin{aligned} q &= |x-x_0| \cdot \frac{1}{r} < 1 \quad \text{für } |x-x_0| < r, \\ q &= |x-x_0| \cdot \frac{1}{r} > 1 \quad \text{für } |x-x_0| > r. \end{aligned}$$

Satz 6.58 *Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist gleich*

$$r := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

(Quotientenkriterium) bzw.

$$r := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

(Wurzelkriterium), falls der jeweilige Grenzwert existiert.

Ü 6.59 *Man bestimme das Konvergenzgebiet der Potenzreihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots,$$

also der Potenzreihe mit $x_0 = 0$, $a_0 = 0$, $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$

Ü 6.60 *Man bestimme das Konvergenzgebiet der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$.*

Ü 6.61 *Man bestimme das Konvergenzgebiet der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k$.*

Satz 6.62 *Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich (dem Durchschnitt der Konvergenzbereiche) gliedweise addiert und subtrahiert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der beiden Ausgangsreihen.*

Eine Potenzreihe darf innerhalb des Konvergenzbereichs (im offenen Intervall) gliedweise differenziert und integriert werden: Ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x-x_0)^{k-1}. \\ \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}. \end{aligned}$$

Die neuen Potenzreihen besitzen denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Bem 6.63 Die in Satz 6.62 formulierte Eigenschaft beruht darauf, dass Potenzreihen in ihrem Konvergenzgebiet *gleichmäßig* konvergieren. Wir kommen darauf in Abschnitt 6.8 zurück.

Bsp 6.64 Bekanntlich gilt $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Desweiteren erhält man als Anwendung der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$$

Folglich gilt

$$\arctan x = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}.$$

Auf diese Weise haben wir die Funktion $\arctan x$ in eine Potenzreihe entwickelt. Wenn Sie auf Ihrem Taschenrechner den Arkustangens einer kleinen Zahl ausrechnen, werden die ersten Glieder dieser Reihe benutzt.

Speziell kann man in diese Reihe auch $x = 1$ einsetzen und erhält die Summe einer Zahlenreihe,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Satz 6.65 (Operationen für Potenzreihen) *Zwei Potenzreihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$$

dürfen im gemeinsamen Konvergenzgebiet addiert und multipliziert weden. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \qquad c_k = a_k + b_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j.$$

Das Produkt wird nach Cauchy benannt.

6.4 Taylorpolynome

Literatur: [Pap1, Kap. VI.3], [Wes1, Kap. VII.3]

Def 6.66 *Sind f und g zwei jeweils n-mal in einem Intervall I differenzierbare Funktionen und gilt in einem Punkt $x_0 \in I$*

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) \\ f'(x_0) &= g'(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

so sagt man, dass f und g im Punkt x_0 bis zur n-ten Ordnung übereinstimmen.

Illustration: `http://math.furman.edu/~dcs/java/taylor.html`

Bsp 6.67 Die Funktionen $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = 1 - \mathrm{e}^{1-x}$ und $f_3(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{2}$ stimmen im Punkt $x_0 = 1$ bis zur zweiten Ordnung überein.

i	$f_i(x)$	$f_i(1)$	$f_i'(x)$	$f_i'(1)$	$f_i''(x)$	$f_i''(1)$
1	$\ln x$	0	$\frac{1}{x}$	1	$-\frac{1}{x^2}$	-1
2	$1 - \mathrm{e}^{1-x}$	0	e^{1-x}	1	$-\mathrm{e}^{1-x}$	-1
3	$\frac{x^2}{6} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{2}$	0	$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x^2}$	1	$\frac{1}{3} - \frac{4}{3x^3}$	-1

Aufg 6.68 *Man bestimme zu einer gegebenen, n-mal differenzierbaren Funktion f dasjenige Polynom*

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

das mit f in x_0 bis zur n-ten Ordnung übereinstimmt.

Dazu bilden wir zunächst die Ableitungen von $p_n(x)$:

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ p_n''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ p_n'''(x) &= 6a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}, \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x) &= n!\, a_n. \end{aligned}$$

Aus der Definition kann man nun die die $n + 1$ unbekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ der Reihe nach bestimmem:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p_n(x_0) &&= a_0 &&\Longrightarrow a_0 &&= f(x_0), \\ f'(x_0) &= p_n'(x_0) &&= a_1 &&\Longrightarrow a_1 &&= f'(x_0), \\ f''(x_0) &= p_n''(x_0) &&= 2a_2 &&\Longrightarrow a_2 &&= \tfrac{1}{2} f''(x_0), \\ f'''(x_0) &= p_n'''(x_0) &&= 6a_3 &&\Longrightarrow a_3 &&= \tfrac{1}{3!} f'''(x_0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= p_n^{(n)}(x_0) &&= n!\, a_n &&\Longrightarrow a_n &&= \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Folglich gilt die allgemeine Formel

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Def 6.69 *Sei f an der Stelle x_0 wenigstens n-mal differenzierbar. Das Polynom*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \end{aligned}$$

heißt das (zur Entwicklungsstelle x_0 gehörende) Taylorpolynom n-ten Grades von f.

Bem 6.70 (Geometrische Deutung)

$n = 1$: Das Polynom

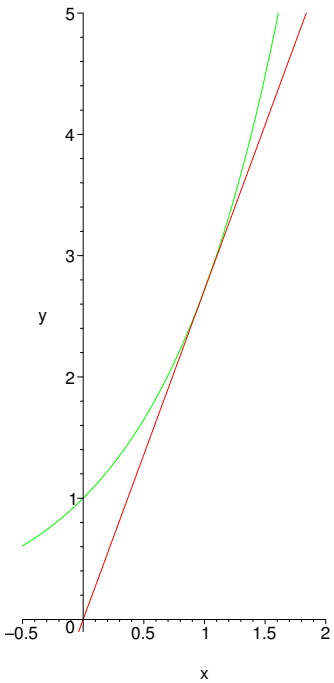
$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

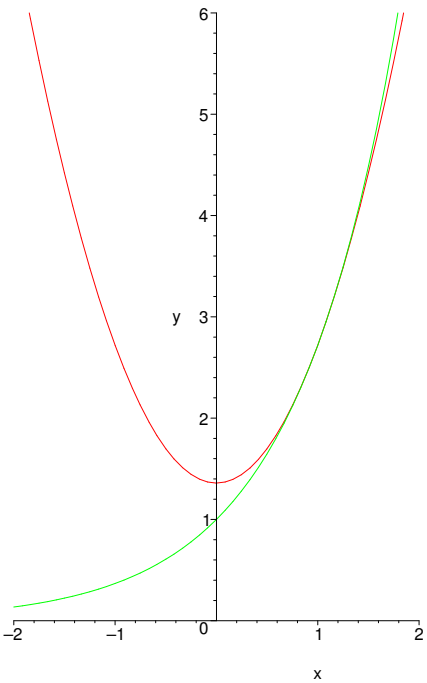
beschreibt eine Gerade, die in x_0 im Funktionswert und in der 1. Ableitung mit f übereinstimmt. Diese Gerade nennt man Tangente an $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Man bezeichnet das Ersetzen von $f(x)$ durch $p_1(x)$ als *Linearisierung von f*.

$n = 2$: Die Funktion f wird durch die Parabel

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

angenähert. Die Kurve von f und die Parabel besitzen in $x = x_0$ den gleichen Funktionswert, eine gemeinsame Tangente und die gleiche Krümmung.





Bem 6.71 Die Linearisierung der Funktion $f(x)$ kann zur iterativen Lösung von nichtlinearen Gleichungen benutzt werden. Ein solches Iterationsverfahren ist ein Bildungsgesetz für eine Zahlenfolge, die gegen die gesuchte Lösung, hier eine Nullstelle von $f(x)$, konvergiert.

Nehmen wir an, wir wollen eine Nullstelle einer Funktion f bestimmen und es liegt bereits eine Näherung x_k für diese Nullstelle vor, dann können wir die Funktion im Punkt x_k linearisieren, und von dieser linearisierten Funktion

$$g_k(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

die Nullstelle bestimmen. Wir bezeichnen diese als neue Näherung x_{k+1}. Die Bedingung $g(x_{k+1}) = 0$ ist äquivalent zu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Dieses Verfahren wird als *Newton-Verfahren* bezeichnet.

Eine Variante des Newton-Verfahrens ist die *Regula falsi*, bei der $f'(x_k)$ durch einen Differenzenquotient ersetzt wird. Das Bildungsgesetz für die neue Iterierte lautet

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k).$$

Bsp 6.72 Man startet mit einer (fast) beliebigen Zahl x_0 und berechnet rekursiv die Zahlen

$$x_{k+1} := \varphi(x_k) := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Sei zum Beispiel

$$f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36,$$

dann ist

$$\varphi(x) = x - \frac{2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36}{8x^3 - 30x^2 + 4x + 42}$$

und folglich

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0 & p(x_0) = -36 \\
x_1 = \varphi(x_0) = 0.85714285714286 & p(x_1) = -3.74843815077051 \\
x_2 = \varphi(x_1) = 0.98901098901099 & p(x_2) = -0.26566571434142 \\
x_3 = \varphi(x_2) = 0.99992087614004 & p(x_3) = -0.00189907280751 \\
x_4 = \varphi(x_3) = 0.99999999582680 & p(x_4) = -1.001568108449646 \cdot 10^{-07} \\
x_5 = \varphi(x_4) = 1.00000000000000 & p(x_5) = -7.105427357601002 \cdot 10^{-15}
\end{array}$$

Wir haben eine Folge von Zahlen konstruiert, die gegen die tatsächliche Nullstelle $x = 1$ konvergiert.

Def 6.73 *Die Funktion*

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

wird Restglied der Taylorentwicklung um den Entwicklungspunkt x_0 genannt.

Satz 6.74 *Für das Restglied $R_n(x)$ gibt es verschiedene Darstellungen, z. B. die Lagrangesche Form*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

bei der $\xi = \xi(x)$ eine Zwischenstelle zwischen x und x_0 ist, d. h. $\xi \in (x, x_0)$ für $x < x_0$ und $\xi \in (x_0, x)$ für $x > x_0$.

Folgerung 6.75 *Gibt es im Intervall $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ eine Schranke M_{n+1}, so dass*

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1},$$

dann folgt für $x \in I$ die Abschätzung

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\varepsilon^{n+1}$$

für das Restglied. Diese Abschätzung beschränkt den Approximationsfehler, den man macht, wenn man f in I durch p_n approximiert.

Bsp 6.76 Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ gilt $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ und damit $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Folglich lautet das Taylorpolynom n-ten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Für das Restglied gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \mathrm{e}^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \mathrm{e}^{\max\{0,x\}}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Man kann daraus verschiedene Schlussfolgerungen ziehen:

1. Sind x und n gegeben, dann ist

   $$\mathrm{e}^{\max\{0,x\}}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

   eine Abschätzung für $|f(x) - p_n(x)|$.

   Weil die Faktoren im Nenner wachsen, während sie im Zähler konstant bleiben, gilt

   $$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h., $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$.

2. Sei der Einfachheit halber $x \leq 0$, so dass $\mathrm{e}^{\max\{0,x\}} = \mathrm{e}^0 = 1$ und damit $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}/(n+1)!$ gilt. Sind der Polynomgrad n und eine Toleranz $\tau > 0$ gegeben, dann gilt wegen

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} & \leq & \tau \\ \Leftrightarrow & |x|^{n+1} & \leq & \tau\,(n+1)! \\ \Leftrightarrow & |x| & \leq & \sqrt[n+1]{\tau\,(n+1)!} =: X_n \end{array}$$

im Intervall $[-X_n, 0]$ die Abschätzung $|R_n(x)| \leq \tau$.

$$\begin{array}{lll} \tau = 10^{-1}: & X_2 = 0{,}84, & X_5 = 2{,}04, \quad X_{10} = 10^6, \\ \tau = 10^{-3}: & X_2 = 0{,}18, & X_5 = 0{,}94, \quad X_{10} = 1{,}5 \cdot 10^4, \\ \tau = 10^{-5}: & X_2 = 0{,}04, & X_5 = 0{,}44, \quad X_{10} = 231. \end{array}$$

Analoge Betrachtungen kann man für $x > 0$ anstellen, leider wird die Rechnung etwas komplizierter.

3. Sind $x \leq 0$ und eine Toleranz $\tau > 0$ gegeben, kann man die Frage stellen, wie groß n gewählt werden muss, damit $|R_n(x)| \leq \tau$ erfüllt ist. Leider lässt sich die Gleichung

$$e_n(x) := \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \tau$$

nicht nach n umstellen. Man kann sich aber einen Eindruck verschaffen:

$$\begin{array}{lll} e_2(-1) = 0{,}17, & e_5(-1) = 1{,}4 \cdot 10^{-3}, & e_{10}(-1) = 2{,}5 \cdot 10^{-8}, \\ e_2(-2) = 1{,}33, & e_5(-2) = 8{,}9 \cdot 10^{-2}, & e_{10}(-2) = 5{,}1 \cdot 10^{-5}. \end{array}$$

6.5 Taylorreihen

Def 6.77 *Ist f in einer Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar, dann heißt die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylorreihe der Funktion f am Entwicklungspunkt x_0.

Satz 6.78 *Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ gilt, dann ist die Funktion f durch ihre Taylorreihe darstellbar,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Bem 6.79 Taylorentwicklungen/Taylorreihen dienen dazu, Funktionswerte komplizierter Funktionen wie e^x, $\sin x$, $\sqrt{x}$ oder $\ln x$, mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Das Restglied wird benutzt, um die Genauigkeit von Näherungsformeln zu untersuchen.

Taylorreihen (Potenzreihen) werden auch zum Lösen von Differentialgleichungen benutzt. Dazu wird die gesuchte (unbekannte) Funktion in eine Potenzreihe $\sum_k a_k(x-x_0)^k$ entwickelt. Die unbekannten Koeffizienten a_k werden durch Einsetzen der Potenzreihe in die Differentialgleichung und anschließenden Koeffizientenvergleich bestimmt.

Bem 6.80 Jede Taylorreihe besitzt ein Konvergenzgebiet, dessen Bestimmung wir bereits kennengelernt haben.

Die Taylorreihe muss dort aber nicht notwendigerweise gegen f konvergieren. Zur Untersuchung der Frage, ob die Taylorreihe gegen f konvergiert, muss das Restglied untersucht werden. Als Beispiel dient die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

Man kann nachrechnen, dass diese Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist und insbesondere $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist die Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt 0 die Nullreihe, die für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert Null annimmt und somit für $x > 0$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

Bem 6.81

1. Ist der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, so nennt man die Taylorreihe auch *MacLaurinsche Reihe*.

2. Ist f eine gerade Funktion, dann treten in der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ nur Terme mit geraden Potenzen auf. Ist f eine ungerade Funktion, dann treten nur Terme mit ungeraden Potenzen auf.

3. Zur Veranschaulichung der Konvergenz der Taylorpolynome $p_n(x)$ gegen die Funktion f findet man bei [Wes1, S. 416 und 424ff.] Quelltexte für Animationen mit MAPLE. Ein Java-Applet gibt es unter `http://math.furman.edu/~dcs/java/taylor.html`.

Bsp 6.82 Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ gilt $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ und damit $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Folglich lautet die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

Wie wir in Beispiel 6.76 festgestellt haben, gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h., diese Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Bem 6.83 Für dieses Beispiel gibt es interessante Folgerungen:

- Ersetzt man x durch $-x$ erhält man

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \pm \ldots$$

- Ersetzt man x durch $x \ln a$ (für $a > 0$), erhält man

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!}.$$

Bsp 6.84 Für $f(x) = \sin x$ gilt

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sin x \\ f'(x) & = & \cos x \\ f''(x) & = & -\sin x \\ f'''(x) & = & -\cos x \\ f^{(4)}(x) & = & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 1 \\ f''(0) & = & 0 \\ f'''(0) & = & -1 \\ f^{(4)}(0) & = & 0 \end{array}$$

d. h. $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Die Taylorreihe lautet

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots$$

Analog leitet man die Taylorreihe für $f(x) = \cos x$ her und erhält

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \ldots$$

Ü 6.85 *Man leite jeweils das Restglied her und zeige, dass die Taylorreihen für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\sin x$ bzw. $\cos x$ konvergieren.*

Bsp 6.86 Für $f(x) = \ln(1+x)$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2} \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \end{aligned}$$

also

$$f(0) = 0 \text{ und } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ für } k > 0.$$

Folglich lautet die Taylorreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$$

Diese Reihe konvergiert für $x \in (-1, 1]$ aber nicht für $x = -1$.

Bem 6.87 Auch aus dieser Reihe kann man durch einfache Manipulationen andere Reihen herleiten.

- Ersetzt man x durch $-x$, so ergibt sich die Reihe

  $$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

  die für $x \in [-1, 1)$ konvergiert.

- Subtrahiert man beide Reihen, erhält man für den gemeinsamen Konvergenzbereich $|x| < 1$

  $$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right].$$

Bem 6.88 (Numerische Betrachtung) Taylorreihen werden auf dem Computer zur Approximation komplizierter Funktionen benutzt. Dabei kommt es vor allem darauf an, die Reihe so auszuwählen, dass sie schon nach wenigen Gliedern nahe am Grenzwert ist, d.h., dass das Restglied klein ist.

Soll zum Beispiel $\ln 2$ berechnet werden, dann erhält man aus der Taylorreihe von $\ln(1+x)$ mit $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

und aus der Taylorreihe von $\ln \frac{1+x}{1-x}$ mit $x = \frac{1}{3}$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right].$$

Bei der ersten Reihe braucht man etwa 1000 Glieder, um den Fehler kleiner als 10^{-3} zu halten, bei der 2. Reihe reichen dazu bereits 3 Glieder.

Bsp 6.89 (Binomialreihe) Für $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) = \binom{\alpha}{k} k! \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe nach dem α-ten Glied ab, da $\binom{\alpha}{k}$ für $k > \alpha$ verschwindet.

Für $\alpha \notin \mathbb{N}$ bestimmen wir den Konvergenzradius dieser Reihe mit dem Quotientenkriterium. Es gilt

$$r := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{\alpha-k} \right| = 1.$$

Für $x = \pm 1$ ist das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt, d. h., die Reihe konvergiert für $x \in (-1, 1)$.

Bem 6.90 Die folgenden Spezialfälle der Binomialreihe sind von besonderer Bedeutung.

- Für $\alpha = -1$ erhält man

  $$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = (-1)^k$$

  und folglich

  $$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$$

  Ersetzt man hier x durch $-x$, erhält man die bekannte geometrische Reihe

  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

- Für $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ erhält man

  $$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \dots \end{aligned}$$

Ü 6.91 *Wie lautet die Linearisierung von* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ *an der Stelle* $x_0 = 0$*?*

Bsp 6.92 Nach Einstein beträgt die Gesamtenergie eines Teilchens

$$E = mc^2,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

die von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängige Masse ist. Mit m_0 und $E_0 = m_0c^2$ werden die Ruhemasse und die Ruheenergie des Teilchens bezeichnet. Damit ist die kinetische Energie des Teilchens durch

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$$

bestimmt.

Für ein nicht-relativistisches Teilchen ist $v \ll c$, und wir können

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

setzen. Für die kinetische Energie gilt damit

$$E_{\text{kin}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right) = \frac{m_0}{2}v^2.$$

Damit haben wir die Formel aus der klassischen Mechanik erhalten.

Bsp 6.93 (Anwendung der Taylorreihe zur Integralberechnung) Das Gaußsche Fehlerintegral

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ist nicht explizit berechenbar. Ausgehend von

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

erhalten wir

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$$

und durch gliedweise Integration

$$F(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\bigg|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Also ist z. B.

$$F(1) = 1 - \frac{1^3}{3\cdot 1!} + \frac{1^5}{5\cdot 2!} - \frac{1^7}{7\cdot 3!} + \frac{1^9}{9\cdot 4!} \mp \cdots \approx 0{,}7468.$$

6.6 Komplexe Funktionen

Komplexe Funktionen können als Erweiterung reeller Funktionen nach folgender Prozedur definiert werden:

1. Wir entwickeln die reelle Funktion in eine Potenzreihe.
2. Wir verwenden diese Reihe auch für komplexe Zahlen.

Bsp 6.94

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \\
\sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \\
\cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots
\end{aligned}$$

Satz 6.95 *Es gilt die Eulersche Formel*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{1}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= 1 + (\mathrm{i}\varphi) + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^5}{5!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \mp \dots\right) + \mathrm{i}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots\right) \\
&= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Def 6.96 *Ist $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dann heißt $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ Exponentialdarstellung von z.*

Folgerung 6.97

1. $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$.
2. *In der Herleitung von (1) wurde nicht benutzt, dass $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Es gilt allgemein*
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z.$$
3. *Folglich ist*
$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \\
\sin z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}).
\end{aligned}$$
Zusammen mit der Formel
$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$$
werden der Sinus und der Kosinus komplexer Zahlen ausrechenbar.

Ü 6.98 *Berechnen Sie* $\cos\mathrm{i}$ *und* $\sin\mathrm{i}$.

Bem 6.99 An dieser Stelle wird auch verständlich, warum es legitim ist, bei den Hyperbelfunktionen die Begriffe Sinus und Cosinus zu verwenden:

$$\begin{aligned} \cos z &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), & \cosh z &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}), \\ \sin z &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), & \sinh z &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}). \end{aligned}$$

Lem 6.100 *Sei $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ eine gegebene komplexe Zahl. Für die komplexen Zahlen*

$$z_k = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + k \cdot 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

gilt $\mathrm{e}^{z_k} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z$.

Beweis Wir erinnern uns, dass

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + k\cdot 2\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Daher gilt

$$\mathrm{e}^{z_k} = \mathrm{e}^{\ln r + \mathrm{i}(\varphi + k\cdot 2\pi)} = \mathrm{e}^{\ln r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + k\cdot 2\pi)} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

q.e.d.

Def 6.101 *Man definiert den Hauptwert des Logarithmus der Zahl $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mittels*

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}\varphi$$

mit dem Realteil $\ln r$ und dem Imaginärteil φ. Damit ist die Logarithmusfunktion für alle komplexen Zahlen $z \neq 0$ definiert.

Die Zahlen

$$\ln z = \mathrm{Ln}\, z + k \cdot 2\pi\,\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

heißen Nebenwerte des Logarithmus und ergeben sich durch Addition ganzzahliger Vielfacher von $2\pi\,\mathrm{i}$.

Bsp 6.102 Man berechne $\ln(-5)$.

$$\begin{aligned} z &= -5 = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \qquad r = 5, \quad \varphi = \pi, \\ \mathrm{Ln}\, z &= \ln 5 + \mathrm{i}\pi = 1.609 + \mathrm{i}\pi, \\ \ln z &= \ln 5 + \mathrm{i}\pi + k \cdot 2\pi\,\mathrm{i} = \ln 5 + (2k+1)\pi\,\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Def 6.103 *Die Potenz $z_1^{z_2}$ zweier komplexer Zahlen (bzw. deren Hauptwert) ist definiert als*

$$z_1^{z_2} = \mathrm{e}^{z_2 \mathrm{Ln} z_1}.$$

Ü 6.104 *Berechnen Sie $(-1)^{\mathrm{i}}$.*

6.7 Fourierreihen

Literatur [Pap2, Kap. II], [MV2, §§11.1–11.5]

Bem 6.105 In einfachen Fällen lässt sich ein zeitlich periodischer Vorgang (z. B. Schwingungen, Wechselspannung) durch ein Sinusgesetz

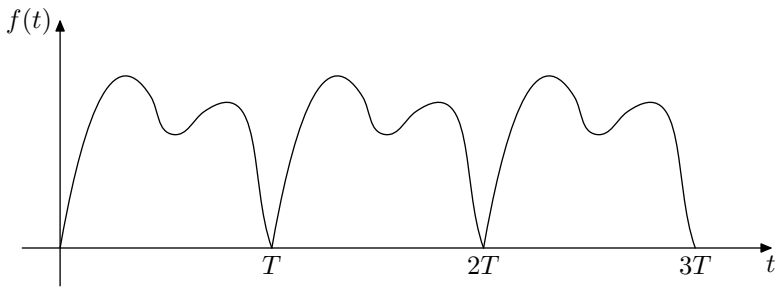
$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

beschreiben. Man spricht von einer *harmonischen Schwingung* mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

wobei T die Schwingungsdauer und ϕ die Phasenverschiebung bezeichnet.

Durch Überlagerung von solchen Sinusschwingungen lassen sich jedoch auch allgemeinere periodische Vorgänge beschreiben, die nicht sinusförmig verlaufen.



Def 6.106 *Die Funktionenreihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt Fourier-Reihe, die Entwicklungskoeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ heißen Fourier-Koeffizienten. Das Darstellen einer Funktion in Form einer Fourier-Reihe wird als harmonische oder Fourier-Analyse bezeichnet.

Die Teilschwingung $a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ heißt Grundschwingung, alle übrigen Teilschwingungen werden als Oberschwingungen bezeichnet.

Satz 6.107 (Dirichletsche Bedingungen) *Eine periodische Funktion $f(t)$ lässt sich unter den folgenden Voraussetzungen in Form einer Fourier-Reihe darstellen:*

1. *Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen die Funktion $f(t)$ stetig und monoton ist.*
2. *In den Unstetigkeitsstellen existiert sowohl der (endliche) linksseitige als auch der (endliche) rechtsseitige Grenzwert.*

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Fourier-Reihe für alle $t \in \mathbb{R}$. Dort, wo die Funktion f stetig ist, stimmt die Reihe mit f überein. In den Sprungstellen liefert die Reihe das arithmetische Mittel aus dem links- und dem rechtsseitigen Grenzwert der Funktion.

Bem 6.108 Für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} & c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} + c_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} \\ = \quad & c_k(\cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(k\omega t) - \mathrm{i}\sin(k\omega t)) \\ = \quad & (c_k + c_{-k})\cos(k\omega t) + (c_k - c_{-k})\,\mathrm{i}\sin(k\omega t) \\ = \quad & a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \end{aligned}$$

mit

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}). \tag{2}$$

Desweiteren gilt

$$c_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega t} = c_0 = \frac{a_0}{2},$$

so dass mit diesen Beziehungen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

gilt.

Def 6.109 *Die Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

heißt komplexe Form der Fourierreihe.

Ü 6.110 *Bestimen Sie c_k und c_{-k}, wenn a_k und b_k gegeben sind.*

Wenn Sie sich mit der komplexen Form anfreunden können, überspringen Sie Übung 6.111 und Aufgabe 6.112.

Ü 6.111 *Für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten werden die folgenden Integrale benötigt. Dabei sind $n, m \in \mathbb{N}_0$.*

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin(nt)}{n}\right|_0^{2\pi} = 0, & \text{für } n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -\left.\dfrac{\cos(nt)}{n}\right|_0^{2\pi} = 0, & \text{für } n \neq 0 \\ 0, & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n-m)t + \cos(n+m)t\right]\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(n-m)t + \sin(n+m)t\right]\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n-m)t - \cos(n+m)t\right]\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufg 6.112 *Gegeben sei eine 2π-periodische Funktion $f(t)$, die die Dirichletschen Bedingungen erfüllt, siehe Satz 6.107. Man bestimme die Fourierkoeffizienten.*

Wegen $T = 2\pi$ gilt $\omega = 1$. Nach Satz 6.107 gilt, zumindest in den Stetigkeitspunkten,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos kt + b_k \sin kt]. \tag{3}$$

Wir integrieren (3) gliedweise über ein Periodenintervall. Mit den Ergebnissen aus Übung 6.111 erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \int_0^{2\pi} \cos kt\,\mathrm{d}t + b_k \int_0^{2\pi} \sin kt\,\mathrm{d}t\right] \\ &= a_0\pi, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten a_n, $n \geq 1$, erhält man, indem man $f(t)\cos nt$ gliedweise über ein Periodenintervall integriert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos nt\,\mathrm{d}t + \\
&\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_0^{2\pi}\cos kt\cos nt\,\mathrm{d}t + b_k\int_0^{2\pi}\sin kt\cos nt\,\mathrm{d}t\right] \\
&= a_n\pi, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Schießlich erhält man die Fourierkoeffizienten b_n, $n \geq 1$, indem man $f(t)\sin nt$ gliedweise über ein Periodenintervall integriert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t + \\
&\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_0^{2\pi}\cos kt\sin nt\,\mathrm{d}t + b_k\int_0^{2\pi}\sin kt\sin nt\,\mathrm{d}t\right] \\
&= b_n\pi, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Jetzt wird auch deutlich, warum man im Allgemeinen $\frac{a_0}{2}$ und nicht a_0 für den konstanten Anteil schreibt.

Bem 6.113 Wir leiten nun alternativ die Fourierkoeffizienten über die komplexe Form der Fourierreihe her. Wenn Sie sich mit dieser Form nicht anfreunden können, setzen Sie bei Folgerung 6.117 fort.

Ü 6.114 *Für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten wird das folgende Integral benötigt. Dabei sind $k, n \in \mathbb{N}_0$.*

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq k, \\ 2\pi & \text{für } n = k. \end{cases}$$

Aufg 6.115 *Gegeben sei eine 2π-periodische Funktion $f(t)$, die die Dirichletschen Bedingungen erfüllt, siehe Satz 6.107. Man bestimme die Fourierkoeffizienten.*

Wegen $T = 2\pi$ gilt $\omega = 1$. Nach Satz 6.107 gilt, zumindest in den Stetigkeitspunkten,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}. \tag{4}$$

Wir multiplizieren (4) mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$ und integrieren gliedweise über ein Periodenintervall. Mit dem Ergebnis aus Übung 6.114 erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = 2\pi c_n, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen verkürzen die Rechnung.

Bem 6.116 Mit Formel (2) erhält man aus den Koeffizienten c_k der komplexen Form die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Form:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t, \\ b_k &= \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t, \\ a_0 &= 2c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}0t})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Folgerung 6.117 *Eine 2π-periodische Funktion f lässt sich unter den in Satz 6.107 genannten Bedingungen in eine Fourierreihe entwickeln,*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kt + b_k \sin kt].$$

Für die Koeffizienten gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\,\mathrm{d}t, \quad k \geq 1, \tag{6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t, \quad k \geq 1. \tag{7}$$

Bem 6.118 Die Fourierreihe einer geraden Funktion enthält nur die geraden Reihenglieder, es entsteht eine *Kosinusreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

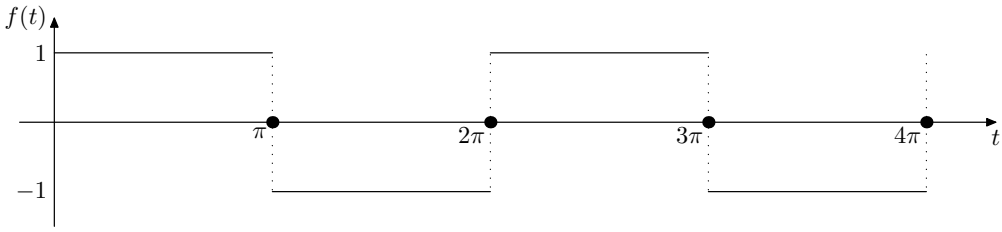
Die Fourierreihe einer ungeraden Funktion enthält dagegen nur die ungeraden Reihenglieder, es entsteht eine *Sinusreihe*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

Bsp 6.119 Wir entwickeln die 2π-periodische Funktion $f(t)$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

(Rechteckschwingung) in eine Fourierreihe.



Da die Funktion ungerade ist, entsteht eine Sinusreihe. Die Koeffizienten erhält man nach Formel (7):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}[-\cos n\pi + \cos 0 + \cos 2n\pi - \cos n\pi] \\
&= \frac{1}{n\pi}(2 - 2\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Fourierreihe besitzt somit die Gestalt

$$
f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\left[\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots\right].
$$

In den Punkten $t = 0, \pi, 2\pi, \dots$ wird die Fourier-Reihe Null.

Bem 6.120 Besitzt die periodische Funktion die Periode T, erhält man durch analoge Überlegungen

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t], \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.
$$

Für die Koeffizienten gilt

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t, \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Bem 6.121 In vielen Formelsammlungen sind Fourier-Reihen für einige einfache Funktionen zusammengestellt.

Bem 6.122 Es gilt

$$
a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = A_k \cos(k\omega t + \phi_k)
$$

mit

$$
A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right).
$$

Diese damit gebildete Form der Fourierreihe heißt *Phasenwinkelform*,

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k).
$$

Daraus kann man die Amplitude A_k einer jeden Kreisfrequenz $\omega_k = k\omega = 2k\pi/T$ ablesen. Die Folge $\langle A_k \rangle$ heißt *Amplitudenspektrum* und kann in einem Diagramm dargestellt werden:

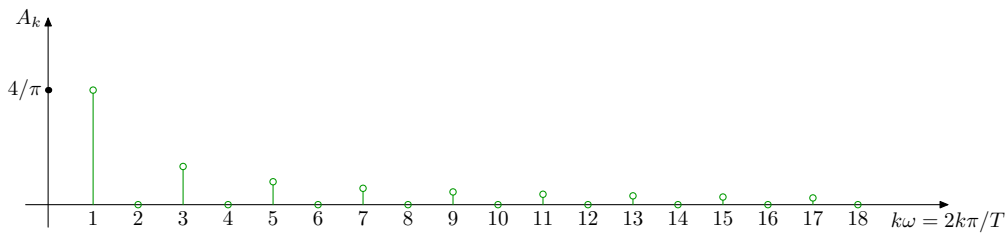
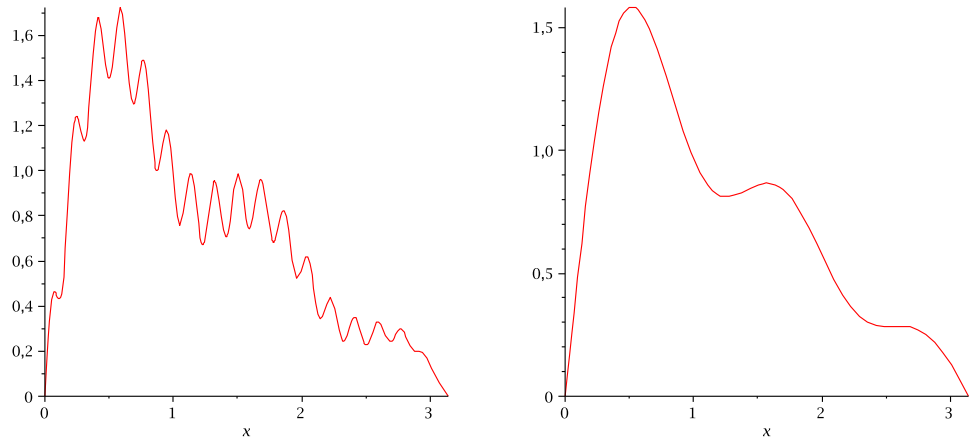


Abbildung 1: Amplitudenspektrum für die Rechteckschwingung

Man kann z. B. den Klang von Musikinstrumenten anhand des Amplitudenspektrums analysieren, aber auch schwingende Maschinen, Brücken oder Tragelemente.

Wir stellen fest: Je größer die Periode T ist, desto näher liegen die Linien im Diagramm. Der Grenzwert $T \to \infty$ entspricht einer nichtperiodischen Funktion. Diese besitzt ein kontinuierliches Amplitudenspektrum. Die Fourierreihe wird dann zum Fourierintegral. Auf Fourierintegrale kommen wir in einem späteren Kapitel zurück.

Bem 6.123 Man kann das Rauschen aus verrauschten Daten entfernen, indem man in der Fourierreihenentwicklung die hochfrequenten Anteile entfernt.



6.8 Gleichmäßige Konvergenz

Bem 6.124 Gemäß der Definition konvergiert die Partialsumme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

für alle x aus dem Konvergenzbereich gegen die Funktion $f(x)$. Das heißt, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

gilt. Dabei hängt die Zahl $n_0(\varepsilon)$ im Allgemeinen von x ab.

Lässt sich nun eine Zahl $n_0(\varepsilon)$ finden, die für alle x aus dem Konvergenzbereich der Reihe gemeinsam gilt, dann sagt man, dass die Reihe in diesem Bereich *gleichmäßig konvergiert*.

Satz 6.125 (Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen) *Sei*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

für alle $x \in [a, b]$.

1. *Sind die Funktionen $f_k(x)$ stetig in $[a, b]$ und konvergiert die Reihe gleichmäßig in $[a, b]$, dann ist die Grenzfunktion $f(x)$ ebenfalls stetig.*

   Konvergiert die Reihe nicht gleichmäßig, dann kann die Grenzfunktion Unstetigkeitsstellen aufweisen.

2. *Gleichmäßig konvergente Reihen dürfen gliedweise integriert werden und es gilt*

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

   d. h., wenn die Reihenglieder integrierbar sind, dann auch die Grenzfunktion.

3. *Wenn die Reihe*

   $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

   gleichmäßig konvergiert, dann gegen $f'(x)$.

Bsp 6.126 (gleichmäßige Konvergenz) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert in jedem Intervall $[-a, a]$ gleichmäßig gegen e^x, denn für das Restglied gilt laut Restgliedformel

$$|\mathrm{e}^x - s_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{\xi} \right| \leq \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{a} \right|.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird bei hinreichend groß gewähltem n, das von x unabhängig ist, kleiner als ε.

Für den gesamten Konvergenzbereich $\mathbb{R}$ liegt jedoch keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bsp 6.127 (keine gleichmäßige Konvergenz) Fourierreihen von unstetigen Funktionen konvergieren nicht gleichmäßig.

Bem 6.128 Man kann die Fourier-Reihe nach einigen Summanden abbrechen und die Partialsummen, die *trigonometrischen Polynome*

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kt + b_k \sin kt],$$

als Näherung für $f(t)$ verwenden. Bild 2 zeigt einige Näherungsfunktionen für die Rechteckschwingung aus Beispiel 6.119.

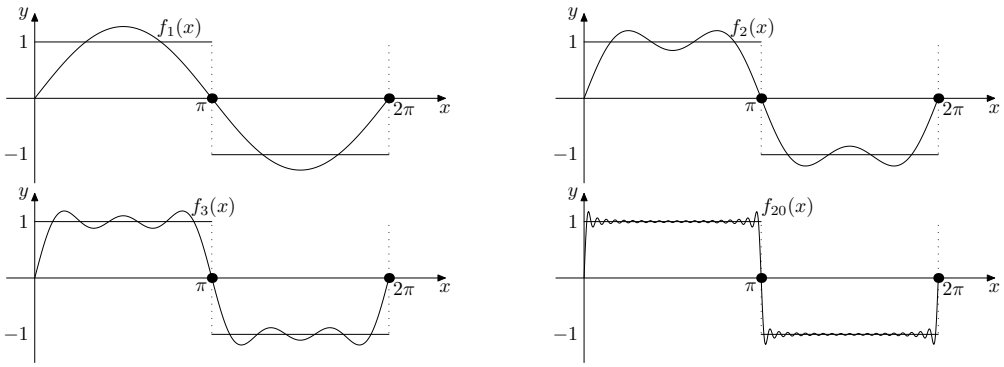


Abbildung 2: Fourier-Näherungen für die Rechteckschwingung

Im Bild für f_{20} erkennt man gut das *Gibbs-Phänomen*: Für hinreichend großes N überschwingen alle Partialsummen f_N den Sprung von $f(t)$ um rund 17,89%.

7 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher wird ausführlich im 3. Trimester behandelt. Dieses kurze Kapitel stellt nur einige grundlegende Begriffe bereit, die wir im Kapitel 8 benötigen.

7.1 Skalare Funktionen

Bsp 7.1 In der Realität findet man einige Beispiele für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

- Die Tragfähigkeit einer unbewehrten Betonstütze hängt vom Querschnitt und der Betongüte ab. Ist die Betonstütze bewehrt hängt sie zusätzlich vom Bewehrungsverhältnis und der Stahlgüte ab.
- Die Raumtemperatur $T(x, y, z, t)$ ist eine Funktion von Ort und Zeit.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks hängt von der Länge zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels ab.

Bem 7.2 Allen Beispielen ist gemeinsam, dass eine Größe, die *abhängige Variable*, abhängig von frei veränderlichen anderen Größen, den *unabhängigen Variablen*, ist. Zum Beispiel hängt der Flächeninhalt beim Dreieck

$$F = F(a, b, \gamma) = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

von den Seitenlängen a und b sowie dem eingeschlossenen Winkel γ ab.

Abstrakt wollen wir die unabhängigen Variablen mit $x_1, x_2, ..., x_n$ bezeichnen. Diese können zu einem Vektor

$$\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$$

zusammengefasst und mit einem Punkt im Raum $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden, dessen Ortsvektor gerade $\vec{x}$ ist.

Def 7.3 *Eine Abbildung f, die einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$ in die Menge der reellen Zahlen abbildet, heißt Funktion von n Veränderlichen*

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R}, \\ & \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Bem 7.4 (Darstellungsformen) Funktionen können auf verschiedene Weise dargestellt werden:

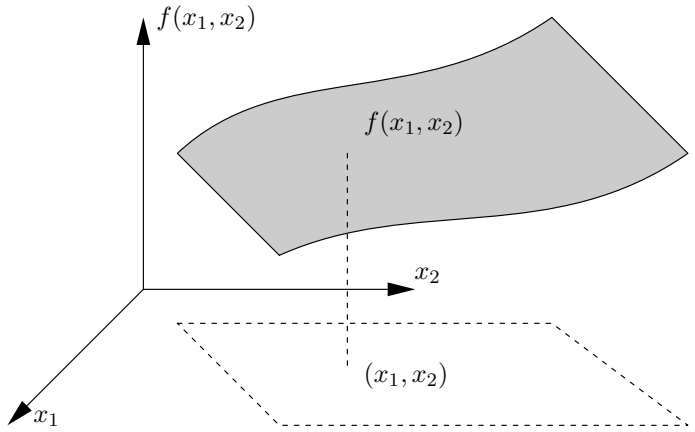
1. Analytische Darstellung in Form einer Funktionsgleichung

$$y = f(x) = f(x_1, \cdots, x_n),$$

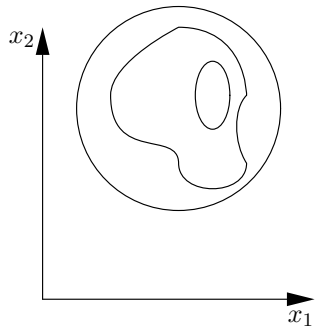
2. Tabelle (nur möglich für $n \leqq 2$),

	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$\vdots$			
x_1		$f(x_1, x_2)$	
$\vdots$			

3. graphische Darstellung als Fläche im Raum (für $n = 2$),



4. Isoliniendarstellung.



Die Höhenlinien auf einer Landkarte sind z. B. Isolinien (Isohypsen).

Mehr Informationen zu Darstellungsformen findet man in [Pap2, IV.1.2]

Def 7.5 (Konvergenz einer Folge von Punkten) *Der Euklidische Abstand zweier Punkte* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *entspricht dem Betrag (der Länge) des Differenzvektors,*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := |\vec{x} - \vec{y}| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Eine Folge von Punkten $\langle \vec{x}_k \rangle$ *konvergiert gegen den Grenzwert* $\vec{x}_0$,

$$\vec{x}_0 = \lim_{k \to \infty} \vec{x}_k$$

wenn die Abstände $d_k = d(\vec{x}_k, \vec{x}_0)$ *eine Nullfolge bilden,*

$$\lim_{k \to \infty} |\vec{x}_k - \vec{x}_0| = 0.$$

Def 7.6 (Grenzwert einer Funktion) *Sei* f *eine Funktion, die in einer Umgebung* $U(\vec{x}_0)$ *eines Punktes* $\vec{x}_0$ *definiert ist, aber nicht notwendigerweise in* $\vec{x}_0$ *selbst. Gilt für jede in* $U(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}$ *enthaltene und gegen* $\vec{x}_0$ *konvergierende Folge von Punkten* $\langle \vec{x}_k \rangle$

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{x}_k) = g,$$

dann heißt g *Grenzwert von* f *an der Stelle* $\vec{x}_0$. *Die symbolische Schreibweise lautet*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = g.$$

(Man vergleiche die Definition in Kapitel 3.2 für den Fall $n = 1$.*)*

Bem 7.7 Der Grenzübergang $\vec{x} \to \vec{x}_0$ bedeutet, dass $\vec{x}$ der Stelle $\vec{x}_0$ beliebig nahe kommt, ohne sie zu erreichen.

Wichtig an der Definition ist auch, dass für jede beliebige Folge der gleiche Grenzwert erreicht werden muss. Die Glieder $\vec{x}_k$ der Folge können irgendwo in der Umgebung von $\vec{x}_0$ liegen.

Bsp 7.8 Im Punkt

$$\vec{x}_0 = \vec{0} = [0, 0]^T$$

ist

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

nicht definiert. Existiert im Punkt $\vec{x}_0$ ein Grenzwert?

Um zu einer Vermutung zu gelangen, untersuchen wir zunächst zwei Wege der Annäherung an $\vec{x}_0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, 0) &= \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1 - 0}{x_1 + 0} = 1, \\ \lim_{x_2 \to 0} f(0, x_2) &= \lim_{x_2 \to 0} \frac{0 - x_2}{0 + x_2} = -1. \end{aligned}$$

Es haben sich unterschiedliche Grenzwerte ergeben. Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x})$ nicht.

Def 7.9 (Stetigkeit einer Funktion) *Gilt für eine in $\vec{x}_0$ und der Umgebung von $\vec{x}_0$ definierte Funktion f, dass bei Annäherung*

$$\vec{x} \to \vec{x}_0$$

der Grenzwert und der Funktionswert übereinstimmen,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0),$$

so heißt f in $\vec{x}_0$ stetig, andernfalls unstetig. Ist f in jedem Punkt eines Bereiches D stetig, heißt f stetig im Bereich D.

Existiert der Grenzwert $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ und stimmt aber nicht mit $f(\vec{x}_0)$ überein, dann ist die Funktion f in $\vec{x}_0$ hebbar unstetig.

Bsp 7.10 Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

aus Beispiel 7.8 ist im Punkt $\vec{x}_0 = \vec{0}$ nicht definiert und es existiert auch kein ein Grenzwert. Damit ist diese Funktion im Punkt $\vec{0}$ nicht nur unstetig, die Unstetigkeit ist auch nicht hebbar.

Ü 7.11 *Im nächsten Beispiel benötigen wir die Ungleichung*

$$|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass diese für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt.

Bsp 7.12 Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

ist im Punkt $\vec{x}_0 = \vec{0} = [0, 0]^T$ ebenfalls nicht definiert. Wir können aber zeigen, dass sie dort hebbar unstetig ist: Wegen

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq |x_1^2| + |x_2^2| = x_1^2 + x_2^2$$

und (8) gilt

$$|f(x_1, x_2)| \leq |x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} d(\vec{x}, \vec{0})^2,$$

d. h., aus $d(\vec{x}, \vec{0}) \to 0$ folgt $|f(x_1, x_2)| \to 0$. Damit ist die Funktion f in $\vec{0}$ hebbar unstetig.

Bem 7.13 (Wiederholung) Unter der Ableitung $f'(x)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ einer Funktion einer Veränderlichen an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ versteht man den Grenzwert

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Def 7.14 *Unter der partiellen Ableitung (1. Ordnung)* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ *der Funktion* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *an der Stelle* $\vec{x} \in D$ *nach der Variablen* x_i *versteht man den Grenzwert*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h},$$

d. h. die gewöhnliche Ableitung derjenigen Funktion von x_i*, die entsteht, wenn man alle Variablen außer* x_i *als konstant betrachtet.*

Man schreibt oft auch kurz $f_{,x_i}(\vec{x})$ *oder* $f_{,i}(\vec{x})$ *für die partielle Ableitung nach* x_i*. Die Kommakonvention erlaubt eine kompaktere Schreibweise und ist in einigen Zweigen der Mechanik sehr verbreitet.*

Bsp 7.15 Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x \sin xy$ lauten

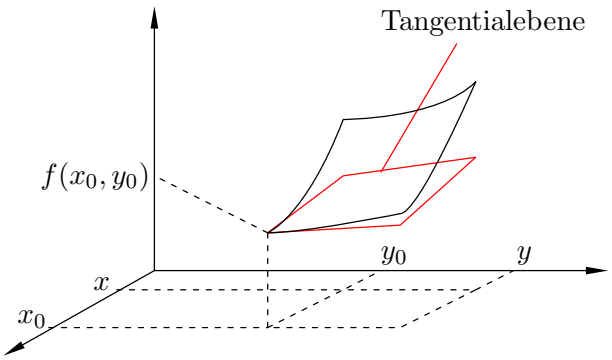
$$\begin{aligned} f_{,x}(x, y) &= \sin xy + xy \cos xy, \\ f_{,y}(x, y) &= x^2 \cos xy. \end{aligned}$$

Bem 7.16 (Geometrische Deutung)
Sei durch $z = f(x, y)$ eine Fläche im Raum beschrieben. Dann ist

- $f_{,x}(x_0, y_0)$ der Anstieg der Tangente an die Fläche im Punkt $[x_0, y_0]^T$ in x-Richtung,
- $f_{,y}(x_0, y_0)$ der Anstieg der Tangente an die Fläche im Punkt $[x_0, y_0]^T$ in y-Richtung.

Die Tangentialebene, die die durch $z = f(x, y)$ definierte Fläche im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ berührt, hat folglich die Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + f_{,x}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{,y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Weitere Beispiele und Illustrationen sind in [Pap2, IV.2.1] zu finden.

Def 7.17 *Sei $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion, wobei die unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ kartesische Koordinaten eines Punktes im Raum sind. Der Gradient der Funktion f ist der Vektor, dessen Komponenten aus den partiellen Ableitungen von f bestehen,*

$$\operatorname{grad} f := \nabla f := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ \vdots \\ f_{,n} \end{bmatrix}.$$

Da die partielle Ableitung einer Funktion mehrerer Variabler wiederum eine Funktion derselben Variablen ist, kann man analog zur Definition von partiellen Ableitungen 1. Ordnung auch *partielle Ableitungen höherer Ordnung* definieren, zum Beispiel Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := f_{,x_i x_j} := f_{,ij} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Bsp 7.18 Im Beispiel 7.15 haben wir die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y) = x \sin xy$ berechnet. In diesem Beispiel betrachten wir einige Ableitungen höherer Ordnung.

$$\begin{aligned}
f_{,xx}(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\sin xy + xy\cos xy) = y\cos xy + y\cos xy - xy^2 \sin xy \\
f_{,xy}(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy\cos xy) = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y \sin xy \\
f_{,yx}(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial x}(x^2\cos xy) = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy = f_{,xy}(x,y) \\
f_{,yy}(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial y}(x^2\cos xy) = -x^3 \sin xy \\
f_{,yyx}(x,y) &= \tfrac{\partial}{\partial x}(-x^3\sin xy) = -3x^2\sin xy - x^3 y\cos xy
\end{aligned}$$

Man kann noch beliebig viele partielle Ableitungen höherer Ordnung berechnen. Doch dies wird dem Leser zur eigenen Übung überlassen.

Satz 7.19 (Satz von Schwarz) *Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung ist die Reihenfolge der Differentationsschritte vertauschbar, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetige Funktionen sind.*

Weitere Beispiele zu partiellen Ableitungen und dem Satz von Schwarz findet man in [Pap2, IV.2.2].

Def 7.20 *Die Hesse-Matrix $H = \nabla^2 f$ einer Funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist die Matrix der Ordnung n, deren Elemente aus Ableitungen 2. Ordnung bestehen,*

$$H = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{,x_1x_1} & f_{,x_1x_2} & \cdots & f_{,x_1x_n} \\ f_{,x_2x_1} & f_{,x_2x_2} & \cdots & f_{,x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,x_nx_1} & f_{,x_nx_2} & \cdots & f_{,x_nx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{,11} & f_{,12} & \cdots & f_{,1n} \\ f_{,21} & f_{,22} & \cdots & f_{,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,n1} & f_{,n2} & \cdots & f_{,nn} \end{bmatrix}$$

Folgerung 7.21 (aus dem Satz von Schwarz) *Sind die 2. Ableitungen stetig, ist die Hesse-Matrix symmetrisch.*

7.2 Vektorfunktionen

Literatur: [MV1, §7.4]

Def 7.22 *Vektorwertige Funktionen* oder kurz *Vektorfunktionen*

$$\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

weisen jedem Punkt $\vec{x}$ des Definitionsgebiets $D \subset \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zu,

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Bsp 7.23 Wir haben bereits einige Vektorfunktionen kennen gelernt.

1. Der Gradient $\operatorname{grad} f$ einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Vektorfunktion, die aus dem Raum $\mathbb{R}^n$ in den Raum $\mathbb{R}^n$ abbildet.

2. Eine Gerade in Parameterdarstellung,

$$\vec{x}(t) = \vec{p} + t\vec{r},$$

   ist eine Vektorfunktion, die aus dem Raum $\mathbb{R}$ in den Raum $\mathbb{R}^n$ abbildet, wobei je nach Betrachtungsweise $n = 2$ oder $n = 3$ ist. Genauer müsste man sagen, die Gerade ist das Bild der Vektorfunktion $\vec{x}(t)$.

3. Die Verallgemeinerung der Geraden sind Kurven. Eine *Kurve* C ist das Bild einer Vektorfunktion $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_a, t_b].$$

   In einem späteren Kapitel werden wir uns detaillierter mit Kurven beschäftigen.

4. Im Prinzip sind die skalaren Funktionen Spezialfälle von Vektorfunktionen, bei denen $m = 1$ ist.

Die folgenden Begriffe werden analog zum Fall von skalaren Funktionen eingeführt.

Def 7.24

1. *Der Grenzwert und die partielle Differentiation sind komponentenweise definiert,*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) := \begin{bmatrix} \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_m(\vec{x}) \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} f_{1,i} \\ \vdots \\ f_{m,i} \end{bmatrix},$$

   $i = 1, \ldots, n.$

2. *Eine Vektorfunktion ist stetig bzw. partiell differenzierbar, wenn jede ihrer Komponenten stetig bzw. partiell differenzierbar ist.*

3. *Die Verallgemeinerung des Gradienten ist die Jacobi-Matrix* $J_{\vec{f}}$

$$\nabla \vec{f} := J_{\vec{f}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Bem 7.25 Die Spalten der Jacobi-Matrix sind die partiellen Ableitungen des Spaltenvektors $\vec{f}$. Die Zeilen der Jacobi-Matrix sind die Gradienten der Komponenten von $\vec{f}$, die transponiert (als Zeilenvektoren geschrieben) werden,

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} | & & | \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(\vec{x})^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\vec{x})^T \end{bmatrix}.$$

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Grundlagen

Literatur: [Pap2, Kap. V.1] [MV2, §9.1]

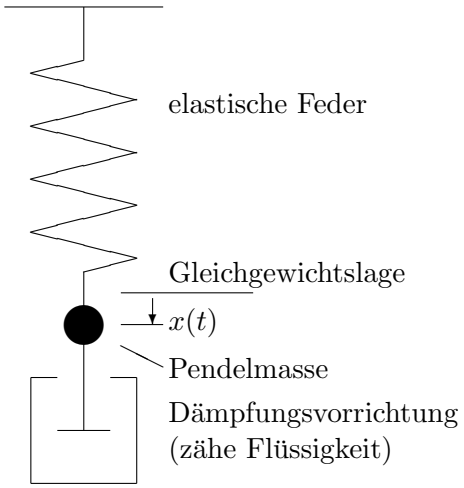
Def 8.1 *Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur n-ten Ableitung auftreten, heißt gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. Partielle Differentialgleichungen enthalten partielle Ableitungen einer unbekannten Funktion mehrerer Veränderlicher.*

Bsp 8.2 (Radioaktiver Zerfall) Bezeichne $y(t)$ die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Atomkerne, dann ist $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ die Geschwindigkeit der zeitlichen Änderung der Anzahl, also die Zerfallsrate. Die Physik besagt, dass die Zerfallsrate proportional zur Anzahl der vorhandenen Atomkerne ist,

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t),$$

wobei λ die Zerfallskonstante bezeichnet. Die Funktion $y(t)$ genügt also der angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung.

Bsp 8.3 (Gedämpfte Schwingung) [Pap2, Abschnitt V.4.4.1]



$x(t)$	...	Auslenkung
$\dot{x}(t)$	...	Geschwindigkeit
$\ddot{x}(t)$	...	Beschleunigung

Zur mathematischen Modellierung dieses Systems betrachten wir die Kräfte, die auf die Masse m wirken. Nach dem Hookeschen Gesetz gilt $F_1 = -cx$ für die Rückstellkraft der Feder mit der Federkonstanten c. Die Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit, also wirkt eine Kraft $F_2 = -b\dot{x}$. Zusätzlich kann noch eine äußere Kraft $F_3 = F(t)$ wirken. Nach dem Newtonschen Gesetz gilt folglich

$$m\ddot{x} = F_1 + F_2 + F_3 = -cx - b\dot{x} + F(t),$$

also die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

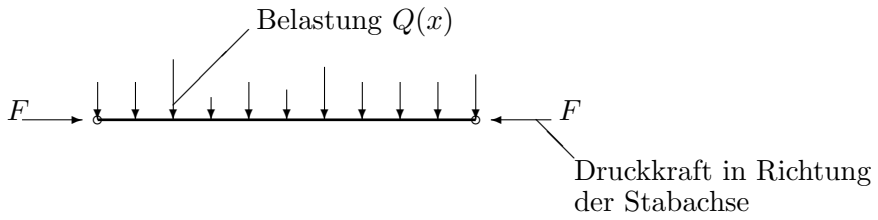
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t).$$

Dabei sind die Sonderfälle

- freie Schwingung: $F(t) = 0$
- ungedämpfte Schwingung: $b = 0$

eingeschlossen.

Bsp 8.4 (Biegelinie) Wir betrachten einen beidseitig gelenkig gelagerten Stab der Länge l, auf den die im Bild angegebene Kräfte wirken.



Sei $y(x)$ die Durchbiegung des Stabs, dann ist die Gleichung der Biegelinie,

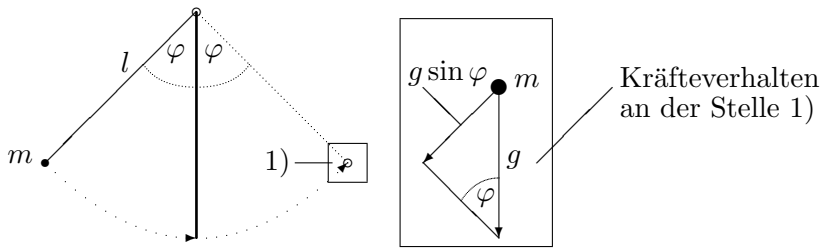
$$EIy^{(4)}(x) + Fy''(x) = Q(x),$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung. Dabei bezeichnet EI die Biegesteifigkeit des Stabs. Zur vollständigen Beschreibung des Systems gehören noch die Randbedingungen

$$y(0) = y(l) = 0, \qquad y''(0) = y''(l) = 0,$$

die die gelenkige Lagerung modellieren.

Bsp 8.5 (Fadenpendel mit großer Auslenkung)



Bezeichnet man mit t die Zeit, mit l die Fadenlänge und mit g die Erdbeschleunigung, dann erfüllt der Auslenkwinkel $\varphi(t)$ (gegenüber der Vertikalen) das Kräftegleichgewicht

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0.$$

Die Masse m ist offenbar unerheblich, sie kann herausgekürzt werden,

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Für kleine Auslenkungen kann man $\sin \varphi \approx \varphi$ annehmen und damit die Differentialgleichung weiter vereinfachen.

Bem 8.6 In den Beispielen ist die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösbar, d. h., sie ist in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

darstellbar. Man sagt, diese Differentialgleichung ist in *expliziter Form* gegeben.

Ist hingegen die Differentialgleichung

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

nicht nach der höchsten Ableitung auflösbar, ist sie in *impliziter Form* gegeben. Dieser Fall ist meist schwieriger handhabbar.

Def 8.7 *Eine Funktion $y = y(x)$ heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung für alle interessierenden x erfüllt.*

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n voneinander unabhängige Parameter (Integrationskonstanten). Ordnet man den freien Parametern der allgemeinen Lösung feste Zahlenwerte zu, so spricht man von einer speziellen oder partikulären Lösung.

Bem 8.8 Es wird nicht behauptet, dass alle Lösungen einer Differentialgleichung aus der allgemeinen Lösung gewonnen werden können. Für lineare Differentialgleichungen kann man dies zeigen, bei nichtlinearen Differentialgleichungen können jedoch zusätzlich auch *singuläre Lösungen* auftreten.

Bsp 8.9 Die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = 2x$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$y(x) = \int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C.$$

Bsp 8.10 Die Form der allgemeinen Lösung ist oft nicht eindeutig. So kann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \omega_0 > 0,$$

sowohl in der Form

$$x(t) = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t$$

mit den Parametern a und b als auch in der Form

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit den Parametern A und φ dargestellt werden. Überlegen Sie sich, dass damit die gleichen Lösungsmengen beschrieben werden.

Bem 8.11 (Ziele dieses Kapitels) Man kann nicht für jede Differentialgleichung die allgemeine Lösung angeben. Ziel dieses Kapitels ist es, drei wichtige Klassen von Differentialgleichungen kennenzulernen, für die dies möglich ist: (1) Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen, (2) lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und (3) lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Def 8.12 *Man spricht von einem Anfangswertproblem (AWP), wenn man bei einer gegebenen Differentialgleichung n-ter Ordnung eine spezielle Lösung $y(x)$ dadurch festlegt, dass man n Anfangswerte*

$$y(x_0), \; y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$$

an einer bestimmten Anfangsstelle x_0 vorschreibt. Diese Bedingungen bezeichnet man als Anfangsbedingungen (AB).

Bem 8.13 Bei Anfangswertproblemen spielt die unabhängige Variable i. Allg. die Rolle der Zeit. Die Lösung wird dann ab einem Anfangszeitpunkt gesucht. Die Beispiele 8.2, 8.3 und 8.5 beschreiben Anfangswertprobleme.

Bsp 8.14 Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt man zunächst die allgemeine Lösung,

$$y(x) = x^2 + C.$$

Durch Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Anfangsbedingung wird der freie Parameter berechnet,

$$y(0) = C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Damit lautet die gesuchte spezielle Lösung

$$y(x) = x^2 + 1.$$

Bsp 8.15 (Freie ungedämpfte Schwingung) Bei der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

bedeuten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

die Vorgabe einer Anfangsauslenkung und einer Anfangsgeschwindigkeit. Durch Einsetzen der allgemeinen Lösung

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

in die Anfangsbedingungen werden die freien Parameter berechnet. Unter Berücksichtigung von $\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x(0) &= A\sin\varphi \stackrel{!}{=} x_0 \\ \dot{x}(0) &= A\omega_0 \cos\varphi \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Aus der zweiten Gleichung erhält man zunächst die beiden Lösungen

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

für φ. Im ersten Fall, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, erhält man aus der ersten Gleichung $A_1 = x_0$, also die Lösung

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Im zweiten Fall, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, erhält man $A_2 = -x_0$, also

$$x(t) = -x_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Beide Funktionen sind gleich. Man gibt meist die Gleichung mit positiver Amplitude an. Im vorliegenden Fall könnte man die Lösung auch über die Kosinusfunktion ausdrücken: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.

Def 8.16 *Wird die Lösung einer Differentialgleichung für ein bestimmtes Intervall $[a, b]$ gesucht, und sind Funktions- bzw. Ableitungswerte an den Intervallrändern a und b vorgeschrieben (Randbedingungen, RB), so spricht man von einem Randwertproblem (RWP).*

Bsp 8.17 (Biegelinie) Wir lösen das Randwertproblem aus Beispiel 8.4,

$$\begin{aligned} EIy^{(4)}(x) + Fy''(x) &= Q(x) \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) &= 0 \end{aligned}$$

für den Fall $F = 0$, $Q(x) = q = \text{const}$. Aus der sich dadurch vereinfachenden Differentialgleichung bestimmt man durch viermaliges Integrieren die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} EIy^{(4)}(x) &= q, \\ y^{(3)}(x) &= \frac{q}{EI}(x+a), \\ y''(x) &= \frac{q}{EI}\left(\frac{x^2}{2} + ax + b\right), \\ y'(x) &= \frac{q}{EI}\left(\frac{x^3}{6} + a\frac{x^2}{2} + bx + c\right), \\ y(x) &= \frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} + a\frac{x^3}{6} + b\frac{x^2}{2} + cx + d\right). \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen werden nun sukzessive die Parameter bestimmt. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} y''(0) &= \frac{q}{EI}b &\overset{!}{=} 0 &\Rightarrow b = 0, \\ y''(l) &= \frac{q}{EI}\left(\frac{l^2}{2} + al\right) &\overset{!}{=} 0 &\Rightarrow a = -\frac{l}{2}, \end{aligned}$$

Damit erhält man als Zwischenlösung

$$y(x) = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{l}{2}\frac{x^3}{6} + cx + d\right).$$

Mit den anderen beiden Randbedingungen gilt

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{q}{EI}d &\overset{!}{=} 0 &\Rightarrow d = 0, \\ y(l) &= \frac{q}{EI}\left(\frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{12} + cl\right) &\overset{!}{=} 0 &\Rightarrow c = \frac{l^3}{24}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Man erhält die eindeutige Lösung

$$y(x) = \frac{q}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{l}{12}x^3 + \frac{l^3}{24}x\right).$$

8.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Literatur: [Pap2, Kap. V.2] [MV2, §9.2, §9.4]

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Anfangswertaufgaben in der expliziten Form

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

beschäftigen. Es gibt keine analytische Methode zur Lösung aller Anfangswertprobleme dieser Art. Für Spezialfälle kann die Lösung jedoch berechnet werden. Hier wollen wir uns anhand einiger Beispiele mit einer wichtigen Methode beschäftigen, der *Trennung der Veränderlichen*. Zuvor sei jedoch ein Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung angegeben.

8.2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Satz 8.18 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz) *Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig auf dem Streifen*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Die partielle Ableitung $f_{,y}$ sei auf S beschränkt. Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in S$ genau eine auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ definierte Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Bem 8.19 Die Bedingung, dass die partielle Ableitung $f_{,y}$ auf S beschränkt sein soll, kann noch abgeschwächt werden. Auf die Definition der Lipschitzbedingung sei hier aber verzichtet.

Bsp 8.20 (Existenz einer eindeutigen Lösung) Die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sin y, \quad y(x_0) = y_0,$$

besitzt für beliebige Anfangswerte y_0 und für ein beliebiges Intervall $[a, b] \ni x_0$ eine eindeutige Lösung, da $|f_{,y}| = |\cos y| \leq 1$ gilt.

Bsp 8.21 (Nichtanwendbarkeit des Satzes, I) Die Anfangswertaufgabe

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0,$$

besitzt die Lösung

$$y = \frac{y_0}{1 - xy_0},$$

die nur für $x < 1/y_0$ definiert ist. Der Satz ist nicht anwendbar, da $f_{,y} = 2y$ im Streifen S nicht beschränkt ist, egal, wie a und b gewählt werden.

Bsp 8.22 (Nichtanwendbarkeit des Satzes, II) Die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0,$$

besitzt mehr als eine Lösung, z. B. $y_1(x) \equiv 0$ und

$$y_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Der Satz ist nicht anwendbar, da $f_{,y} = |y|^{-1/2}$ für $y \to 0$ unbeschränkt ist.

8.2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Für das Differential gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= y'\,\mathrm{d}x = f(x)g(y)\,\mathrm{d}x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Durch unbestimmte Integration erhalten wir die allgemeine Lösung in Form einer impliziten Gleichung: Sei $F_1(y)$ eine Stammfunktion der Funktion $1/g(y)$ und sei $F_2(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt

$$F_1(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F_2(x) + C.$$

Lässt sich diese nach y auflösen, erhalten wir die allgemeine Lösung in expliziter Form $y = y(x)$. Die gesuchte spezielle Lösung erhält man durch Einsetzen der Anfangsbedingung.

Bsp 8.23 Zu lösen sei das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + 1, \qquad y(0) = \sqrt{3}.$$

Es hat sich bewährt, in folgenden Schritten vorzugehen:

Trennung der Veränderlichen:	$\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2+1}$	$=$	$\mathrm{d}x$
unbestimmte Integration:	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}$	$=$	$\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x$
	$\arctan y$	$=$	$x + C$
Auflösen nach y:	$y(x)$	$=$	$\tan(x + C)$
Bestimmung des Parameters:	$y(0)$	$=$	$\tan C = \sqrt{3}, \quad C = \frac{\pi}{3}$
gesuchte Lösung:	$y(x)$	$=$	$\tan(x + \frac{\pi}{3})$
Probe:	$y'(x)$	$=$	$1 + \tan^2(x + \frac{\pi}{3}) = 1 + y^2 \quad \surd$
	$y(0)$	$=$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \surd$

Bsp 8.24 Zu lösen sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2 - y, \qquad y(0) = 3.$$

Wir gehen wieder wie oben vor:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Trennung der Veränderlichen:} & \dfrac{\mathrm{d}y}{2-y} & = & \mathrm{d}x \\
\text{unbestimmte Integration:} & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{2-y} & = & \displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x \\
& -\ln|2-y| & = & x + C \\
\text{Auflösen nach } y\text{:} & |2-y| & = & \mathrm{e}^{-x-C} = C_1\mathrm{e}^{-x}, \quad C_1 = \mathrm{e}^{-C} > 0 \\
& 2-y & = & C_2\mathrm{e}^{-x}, \quad C_2 = \pm C_1 \in \mathbb{R} \\
& y & = & 2 - C_2\mathrm{e}^{-x}, \quad C_2 \in \mathbb{R} \\
\text{Bestimmung des Parameters:} & y(0) & = & 2 - C_2 = 3, \quad C_2 = -1 \\
\text{gesuchte Lösung:} & y(x) & = & 2 + \mathrm{e}^{-x} \\
\text{Probe:} & y'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} = 2 - y(x) \quad \surd \\
& y(0) & = & 3 \quad \surd
\end{array}$$

Der aufmerksame Leser bemerkt, dass wir bei der Division durch $(y-2)$ den Fall $y = 2$ ausgeschlossen haben. Einsetzen in die Differentialgleichung zeigt, dass wir dadurch zunächst tatsächlich eine Lösung verloren haben.

Man bemerkt weiter, dass wir beim Übergang von $C_1 > 0$ zu $C_2 = \pm C_1$ zunächst $C_2 \neq 0$ hätten schreiben müssen. Indem wir das unterlassen haben, haben wir stillschweigend gerade die Lösung $u \equiv 2$ wieder eingefangen. Zur vollständigen Lösung gehört diese Betrachtung dazu.

8.2.3 Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Durch Substitution lässt sich diese Differentialgleichung auf den in Abschnitt 8.2.2 behandelten Fall zurückführen: Wir suchen statt $y(x)$ die Funktion

$$u(x) = ax + by(x) + c. \tag{9}$$

Für $u(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
u'(x) &= a + by'(x) \\
&= a + bf(ax + by + c) \\
&= a + bf(u).
\end{aligned}$$

Diese neue Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= a + bf(u) \\
\frac{\mathrm{d}u}{a + bf(u)} &= \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nach Berechnung von $u(x)$ erhält man die gesuchte Funktion $y(x)$ durch Rücksubstitution aus der Gleichung (9).

Bsp 8.25 Die Differentialgleichung

$$y' = 2x - y$$

wird nach dem vorgeschlagenen Schema gelöst:

Substitutionsgleichung:	$u(x)$	$=$	$2x - y(x)$
neue Gleichung:	$u'(x)$	$=$	$2 - y'(x) = 2 - u$
Lösung (vgl. Bsp. 8.24):	$u(x)$	$=$	$2 - C_2 \mathrm{e}^{-x}$
Rücksubstitution:	$y(x)$	$=$	$2x - u(x) = 2x - 2 + C_2 \mathrm{e}^{-x}$
Probe:	$y'(x)$	$=$	$2 - C_2 \mathrm{e}^{-x}$
	$2x - y(x)$	$=$	$2x - (2x - 2 + C_2 \mathrm{e}^{-x})$
		$=$	$2 - C_2 \mathrm{e}^{-x} = y'(x) \quad \surd$

8.2.4 Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$

Man substituiert $y(x) = x \cdot u(x)$ und erhält für die neue Funktion $u(x)$ die Differentialgleichung

$$f(u) = y'(x) = u + x \cdot u'.$$

Diese kann wieder mit Trennung der Veränderlichen gelöst werden, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(u) - u &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} x, \\ \frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Man muss jetzt unbestimmt integrieren und rücksubstituieren.

Bsp 8.26 Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + 2y}{x} = 1 + 2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)$$

wird nach dem vorgeschlagenen Schema gelöst:

Substitutionsgleichung:	$u(x)$	$=$	$\frac{y}{x}$
	$y(x)$	$=$	$x \cdot u(x)$
neue Gleichung:	$1 + 2u$	$=$	$u'x + u$
	$1 + u$	$=$	$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} x$
Trennung der Veränderlichen:	$\frac{\mathrm{d}u}{u + 1}$	$=$	$\frac{\mathrm{d}x}{x}$
	$\ln\lvert u + 1\rvert$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + \ln\lvert C\rvert = \ln\lvert Cx\rvert$
	$u + 1$	$=$	Cx
	$u(x)$	$=$	$Cx - 1$
Rücksubstitution:	$y(x)$	$=$	$u(x) \cdot x = Cx^2 - x$
Probe:	$y'(x)$	$=$	$2Cx - 1$
	$\frac{x + 2y}{x}$	$=$	$\frac{x + 2Cx^2 - 2x}{x} = 2Cx - 1 \quad \surd$

8.2.5 Bemerkungen zur numerischen Lösung

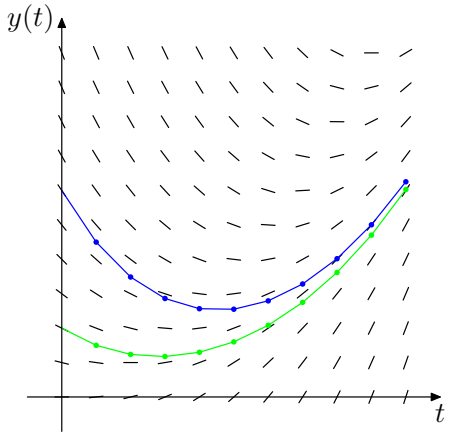
[Pap2, Kap. V.6] [MV2, §9.5]

Jedem Punkt (x, y) des Definitionsbereiches G von f ist durch

$$\tan\alpha = y' = f(x, y)$$

eine bestimmte Richtung zugeordnet, nämlich die Richtung der Tangente an eine der Lösungskurven, die durch (x, y) geht.

Zur geometrischen Veranschaulichung wird die Richtung der Tangente durch eine kleine Strecke gekennzeichnet, die als *Linienelement* bezeichnet wird.



Das dem Punkt (x, y) zugeordnete Linienelement wird durch das Tripel (x, y, y') eindeutig bestimmt. Die Gesamtheit aller Linienelemente bildet das *Richtungsfeld*. Eine Lösungskurve muss in jedem ihrer Punkte die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung (Anstieg) aufweisen. Es gibt unendlich viele solcher Kurven, die durch die allgemeine Lösung repräsentiert werden.

Durch diese geometrische Betrachtung wird das folgende numerische Verfahren motiviert:

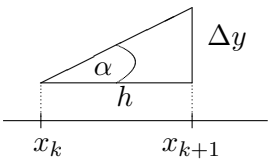
- Starte im Punkt (x_0, y_0), also bei der Anfangsbedingung. Setze $k = 0$.
- Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ Gehe von (x_k, y_k) aus einen Schritt in die durch das Richtungsfeld vorgegebenen Richtung. Bezeichne den neuen Punkt mit (x_{k+1}, y_{k+1}), wobei

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h, \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Das Verfahren heißt *Eulersches Polygonzugverfahren* und ist das einfachste Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Beziehung für y_{k+1} ist sinnvoll, weil

$$y_{k+1} - y_k = \Delta y = h\tan\alpha = hy'(x_k, y_k) = hf(x_k, y_k)$$

gilt.



8.2.6 Tricks für weitere Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bsp 8.27 (Bernoulli-Differentialgleichung) Die nichtlineare Differentialgleichung

$$y' + ay = by^\alpha$$

mit stetigen Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ sowie einer reellen Zahl $\alpha \notin \{0, 1\}$ geht nach Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ und der Substitution $z = y^{1-\alpha}$ wegen $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ über in die lineare Differentialgleichung

$$z' + (1-\alpha)az = (1-\alpha)b.$$

Man bestimmt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung und macht die Substitution rückgängig.

Eine solche Differentialgleichung tritt z. B. auf bei der Beschreibung eines harmonischen Oszillators mit Luftreibung (Turbulenzdämpfung), siehe [MV2, Kap. 9, §2.5, Bsp. 4].

Bsp 8.28 (Riccati-Differentialgleichung) Die Differentialgleichung

$$y' = ay + by^2 + f \tag{11}$$

besitzt eine allgemeine Lösung der Gestalt

$$y = y_0 + v^{-1},$$

wobei y_0 eine partikuläre Lösung von (11) und v die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' + (a + 2y_0 b)v + b = 0.$$

ist. Für weiterführende Erläuterungen sei auf die Literatur verwiesen, z. B. [MV2, Kap. 9, §2.5(d)].

8.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Literatur: [Pap2, Kap. V.5], [MV2, §9.8.4, §9.9]

Def 8.29 *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0\, y(x) = f(x) \tag{12}$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. Die Koeffizienten können zunächst Funktionen von x sein.

Wenn $f(x) \equiv 0$ ist, bezeichnet die Differentialgleichung als homogen, andernfalls als inhomogen.

Der Operator L

$$y \longmapsto y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y$$

heißt Differentialoperator n-ter Ordnung. Mit dessen Hilfe kann die Differentialgleichung (12) als

$$Ly = f$$

geschrieben werden.

8.3.1 Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen.

Satz 8.30 *Der Differentialoperator L ist linear, d. h., es gilt*

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2$$

für alle n-mal stetig differenzierbaren Funktionen y_1, y_2 und alle reellen Zahlen α_1, α_2.

Beweis

$$\begin{aligned}
&L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \\
&\quad = \quad (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{(n)} + a_{n-1}\,(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_0\,(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\
&\quad = \quad \alpha_1 ({y_1}^{(n)} + a_{n-1}\, {y_1}^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y_1) \\
&\qquad\quad +\alpha_2 ({y_2}^{(n)} + a_{n-1}\, {y_2}^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y_2) \\
&\quad = \quad \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2
\end{aligned}$$

q.e.d.

Folgerung 8.31 *Sind $y_1, \ldots, y_m$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung*

$$Ly_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

dann ist jede Linearkombination

$$y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m$$

ebenfalls Lösung der homogenen Differentialgleichung; es gilt $Ly = 0$.

Beweis

$$Ly = L\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot L y_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

q.e.d.

Bem 8.32 Ziel ist es also, n unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der homogenen Differentialgleichung zu finden, denn dann können wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung angeben:

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k.$$

Wir haben dann n freie Konstanten, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Diese Feststellung formulieren wir als Satz 8.35. Vorher müssen wir uns darüber klar werden, was es bedeutet, dass $y_1, \ldots, y_n$ unabhängig sind.

Def 8.33 *Die Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ heißen linear abhängig im Intervall (a, b), wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ gibt, die nicht alle gleichzeitig Null sind, so dass die Gleichung*

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \tag{13}$$

gilt.

Folgt jedoch aus der Identität (13), dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, so heißen die Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig.

Ü 8.34 *Sei $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Man untersuche folgende Paare von Funktionen auf lineare Unabhängigkeit.*

(a) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 3x$,

(b) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$,

(c) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x + 1$.

Satz 8.35 (Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung) *Es gibt genau n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y = 0. \tag{14}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung hat die Darstellung

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x), \tag{15}$$

wobei die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ frei wählbare Konstanten sind.

Bem 8.36 Der Satz besagt, dass eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung genau n linear unabhängige Lösungen besitzt. Hat man mit beliebigen Methoden n Lösungen gefunden, dann ist man fertig, wenn diese linear unabhängig sind.

Die lineare Unabhängigkeit von Lösungen kann elegant mit Hilfe der *Wronski-Determinante* überprüft werden. Mit Hilfe der Wronski-Determinante kann auch Satz 8.35 bewiesen werden. Der interessierte Leser sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen.

Def 8.37 *Man bezeichnet eine Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linear unabhängiger Lösungen von (14) als Fundamentalsystem.*

Alle bisherigen Überlegungen wären auch für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit *variablen* Koeffizienten gültig gewesen. Ab jetzt werden wir uns aber auf den Fall konstanter Koeffizienten beschränken. In diesem Fall kann die homogene Gleichung $Ly = 0$ stets mit dem Ansatz

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

gelöst werden, wobei die komplexe Zahl λ zunächst noch unbekannt ist. Wegen

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

gilt

$$Ly = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

das heißt, $Ly = 0$ gilt genau dann für alle x, wenn λ eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$p_n(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

ist. Umgekehrt gilt, dass jede Nullstelle λ_k des charakteristischen Polynoms auf eine Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ führt. Das charakteristische Polynom besitzt genau n Nullstellen, diese führen zum Fundamentalsystem.

Die Nullstellen können reell sein oder als konjugiert komplexes Paar auftreten. Desweiteren kann es sich um einfache oder mehrfache Nullstellen handeln. Wir wollen diese Fälle diskutieren:

Fall 1: Es treten nur einfache reelle Nullstellen auf. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einfache reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms, dann bilden die Funktionen

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ y_n(x) = \mathrm{e}^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem.

Bsp 8.38

Differentialgleichung:	$y''' - 4y'' - y' + 4y = 0$
Charakteristisches Polynom:	$p_3(\lambda) := \lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4$
Nullstellen von $p_3(\lambda)$:	$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 4$
Fundamentalsystem:	$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \ y_2(x) = \mathrm{e}^{x}, \ y_3(x) = \mathrm{e}^{4x}$
Allgemeine Lösung:	$y(x) = \alpha_1\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\mathrm{e}^{x} + \alpha_3\mathrm{e}^{4x}$

Fall 2: Es treten auch mehrfache reelle Nullstellen auf. Sei λ_0 eine k-fache reelle Nullstelle, dann sind die Funktionen

$$\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \ x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung $Ly = 0$ und tragen somit zum Fundamentalsystem bei.

Bsp 8.39

Differentialgleichung:	$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
Charakteristisches Polynom:	$p_3(\lambda) := \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$
Nullstellen von $p_3(\lambda)$:	$\lambda_{1,2,3} = -1$
Fundamentalsystem:	$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x},\ y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-x},\ y_3(x) = x^2\,e^{-x}$
Allgemeine Lösung:	$y(x) = \alpha_1 \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2 x\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_3 x^2\,e^{-x}$
	$= (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)\,e^{-x}$

Fall 3: Es treten Paare konjugiert komplexer Nullstellen auf. Seien $\lambda_0 = a + \mathrm{i}b$ und $\bar{\lambda}_0 = a - \mathrm{i}b$ zwei einfache konjugiert komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Analog zu Fall 1 sind die Funktionen

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \mathrm{e}^{\lambda_0 x} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx), \\ z_2(x) &= \mathrm{e}^{\bar{\lambda}_0 x} = \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx - \mathrm{i}\sin bx) \end{aligned}$$

zwei linear unabhängige komplexe Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Ly = 0$. Als Fundamentallösungen verwendet man aber besser die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2}(z_1(x) + z_2(x)) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, \\ y_2(x) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z_1(x) - z_2(x)) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx, \end{aligned}$$

denn diese sind reelle Funktionen.

Sind $\lambda_0 = a + \mathrm{i}b$ und $\bar{\lambda}_0 = a - \mathrm{i}b$ zwei k-fache konjugiert komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms, dann verwendet man in Analogie zu Fall 2 die $2k$ Funktionen

$$x^j \mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ x^j \mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ j = 0, \ldots, k-1.$$

Bsp 8.40

Differentialgleichung:	$y'' + 2y' + 5y = 0$
Charakteristisches Polynom:	$p_2(\lambda) := \lambda^2 + 2\lambda + 5$
Nullstellen von $p_2(\lambda)$:	$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\,\mathrm{i}$
Fundamentalsystem:	$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x$
Allgemeine Lösung:	$y(x) = \mathrm{e}^{-x}(\alpha_1 \cos 2x + \alpha_2 \sin 2x)$

8.3.2 Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

Satz 8.41 (Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung) *Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x) \tag{16}$$

lässt sich in der Form

$$y = y_* + y_0$$

darstellen. Dabei bezeichnen y_* eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (d. h., es gilt $Ly_* = f$) und

$$y_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \tag{17}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (14) (d. h. $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ist ein Fundamentalsystem, $Ly_k = 0$).

Folgerung 8.42 *Zur vollständigen Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung müssen wir*

(a) ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung und

(b) eine einzige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

berechnen. In einem dritten Schritt (c) können dann die freien Parameter durch Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt werden.

Bem 8.43 Zur Bestimmung der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung hat man verschiedene Möglichkeiten. Eine wird als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Hat man ein Fundamentalsystem $\{y_1, \ldots, y_n\}$ gefunden, dann sucht man die spezielle Lösung in der Form

$$y_*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x),$$

wodurch sich auch der Name der Methode erklärt.

Eine zweite Möglichkeit kann man als qualifiziertes Raten bezeichnen: Aufgrund der Struktur der rechten Seite und der (tabellierten) Erfahrung macht man einen Ansatz, in dem noch ein oder mehrere Parameter vorkommen. Diesen Ansatz setzt man in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhält Gleichungen für den/die freien Parameter. Kann man die Parameter so wählen, dass alle Gleichungen erfüllt sind, hat man die spezielle Lösung gefunden. Wir kommen in Bemerkung 8.49 darauf zurück.

Eine dritte Möglichkeit besteht in der Anwendung von Integraltransformationen, siehe Kap. 8.5.

Alg 8.44 (Variation der Konstanten) *Sei $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (14).*

Schritt 1 *Man löse das (vom Parameter x abhängige) lineare Gleichungssystem*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

z. B. mit dem Gauß-Algorithmus.

Schritt 2 *Man integriere die in Schritt 1 gefundenen Funktionen:*

$$C_k(x) = \int C_k'(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Die Integrationskonstante kann beliebig gewählt werden, zum Beispiel gleich Null.

Schritt 3 *Man gebe die spezielle Lösung an,*

$$y_*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x). \tag{19}$$

Satz 8.45 *Das lineare Gleichungssystem (18) ist eindeutig lösbar. Die Funktion (19) ist spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Ly = f$.*

Beweis Wir zeigen nur den zweiten Teil. Dazu differenzieren wir die Funktion (19) und beachten, dass jeweils die Summe mit den Ableitungen $C_k'(x)$ entweder verschwindet oder gleich $f(x)$ ist, da sie die linke Seite einer Gleichung aus (18) bildet:

$$\begin{aligned}
y_*'(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k'(x) \\
y_*''(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k''(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k''(x) \\
&\vdots \\
y_*^{(n-1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n-1)}(x) \\
y_*^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}(x) = f + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$Ly_* = f + \sum_{k=1}^{n} C_k L y_k = f,$$

da $Ly_k = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. q.e.d.

Bsp 8.46 Gesucht ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - y = x^2.$$

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - y = 0$:

Charakteristisches Polynom:	$p_2(\lambda) := \lambda^2 - 1$
Nullstellen von $p_3(\lambda)$:	$\lambda_{1,2} = \pm 1$
Fundamentalsystem:	$y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$
Allgemeine Lösung:	$y_0(x) = \alpha_1 \mathrm{e}^x + \alpha_2 \mathrm{e}^{-x}$

(b) Variation der Konstanten, um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden:

Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$C_1'(x) = \frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-x}, \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^x$$

Unbestimmte Integration:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{2} \int x^2 \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \mathrm{e}^{-x} \\ C_2(x) &= -\frac{1}{2} \int x^2 \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{d}x = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right) \mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Angabe der speziellen Lösung:

$$y_*(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^x + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right) \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = -x^2 - 2$$

Damit ist die allgemeine Lösung unserer inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = -x^2 - 2 + \alpha_1 \mathrm{e}^x + \alpha_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Bsp 8.47 Variation der Konstanten funktioniert übrigens auch bei linearen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. Wir betrachten

$$y' - \frac{2}{x} y = -2.$$

Trennung der Veränderlichen funktioniert für die inhomogene Gleichung leider nicht, aber für die homogene Gleichung $y' - \frac{2}{x} y = 0$:

Trennung der Veränderlichen:	$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{2}{x}\, \mathrm{d}x$
unbestimmte Integration:	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2 \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$
	$\ln\lvert y\rvert = 2 \ln\lvert x\rvert + \ln\lvert\alpha\rvert$
	$= \ln\lvert\alpha x^2\rvert$
Auflösen nach y:	$y(x) = \alpha x^2$

Variation der Konstanten ist hier leicht, da das Gleichungssystem nur eine Gleichung mit einer Unbekannten ist:

Gleichungssystem:	$x^2 \cdot C_1'(x)$	$=$	-2
Lösung:	$C_1'(x)$	$=$	$-2x^{-2}$
unbestimmte Integration:	$C_1(x)$	$=$	$2x^{-1}$
Angabe der speziellen Lösung:	$y_*(x)$	$=$	$2x^{-1} \cdot x^2 = 2x$

Damit ist die allgemeine Lösung unserer inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = 2x + \alpha x^2.$$

Ü 8.48 *Rechnen Sie nach, dass man mit diesem Vorgehen auch eine Lösungsdarstellung für die allgemeine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

erhält. Ist $A(x)$ eine Stammfunktion zu $a(x)$, dann ist

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$$

die Fundamentallösung. Variation der Konstanten führt auf

$$C_1(x) = \int f(x)\mathrm{e}^{A(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der Gleichung $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$

$$y(x) = \left[\int f(x)\mathrm{e}^{A(x)}\,\mathrm{d}x + \alpha\right]\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

Bem 8.49 (Lösungsansätze für die spezielle Lösung) Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lässt sich in vielen Fällen das recht aufwändige Prinzip der Variation der Konstanten vermeiden. Stattdessen setzt man die spezielle Lösung geschickt an und bestimmt noch unbekannte Koeffizienten.

- Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grade m, dann setzt man

  $$y_*(x) = x^r(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$$

  an. Dabei ist r die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = 0$ des charakteristischen Polynoms ($r = 0$, wenn $\lambda = 0$ keine Nullstelle ist).

- Ist $f(x)$ ein Vielfaches von $\mathrm{e}^{\alpha x}$, dann setzt man

  $$y_*(x) = Ax^r\mathrm{e}^{\alpha x}$$

  an. Dabei ist r die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = \alpha$ des charakteristischen Polynoms.

- Ist $f(x)$ ein Vielfaches von $\sin \alpha x$ oder $\cos \alpha x$, dann setzt man

$$y_*(x) = x^r (A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x)$$

an. Dabei ist r die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = \mathrm{i}\alpha$ des charakteristischen Polynoms.

Weitere Anätze findet man in der Literatur. Hilfreich ist noch der folgende Satz.

Satz 8.50 (Superpositionsprinzip) *Ist $f(x) = \sum_i f_i(x)$ und gilt $Ly_{*,i} = f_i$, dann ist $L\left(\sum_i y_{*,i}\right) = f$.*

Wir können also für jeden Summanden f_i von f eine spezielle Lösung $y_{*,i}$ von $Ly = f_i$ suchen und die gefundenen speziellen Lösungen addieren, $y_* = \sum_i y_{*,i}$.

Bsp 8.51 Gesucht ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x + 3e^{2x}.$$

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$:

Charakteristisches Polynom:	$p_3(\lambda) := \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$
Nullstellen von $p_3(\lambda)$:	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2$
Fundamentalsystem:	$y_1(x) = \mathrm{e}^x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{2x},\ y_3(x) = x\mathrm{e}^{2x}$
Allgemeine Lösung:	$y_0(x) = \alpha_1 \mathrm{e}^x + \alpha_2 \mathrm{e}^{2x} + \alpha_3 x \mathrm{e}^{2x}$

(b1) Spezielle Lösung für $f_1(x) = x$:

Ansatz:

$$y_{*,1}(x) = A_0 + A_1 x$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned} y'_{*,1}(x) &= A_1 \\ y''_{*,1}(x) = y'''_{*,1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in $Ly = f_1$:

$$\begin{aligned} 0 - 5 \cdot 0 + 8 \cdot A_1 - 4 \cdot (A_0 + A_1 x) &= x \\ -4A_1 x + (8A_1 - 4A_0) &= x \end{aligned}$$

Bestimmen der Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} x^1: &\quad 1 = -4A_1 &&\Rightarrow\ A_1 = -\tfrac{1}{4} \\ x^0: &\quad 0 = 8A_1 - 4A_0 = -2 - 4A_0 &&\Rightarrow\ A_0 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Erster Summand der speziellen Lösung:

$$y_{*,1}(x) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x$$

(b2) Spezielle Lösung für $f_2(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$:

Ansatz unter Beachtung, dass $\alpha = 2$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist:

$$y_{*,2}(x) = Ax^2\mathrm{e}^{2x}$$

Differenzieren:

$$\begin{aligned}
y'_{*,2}(x) &= A(2x\mathrm{e}^{2x} + x^2 \cdot 2\mathrm{e}^{2x}) \\
&= 2A\mathrm{e}^{2x}(x^2 + x) \\
y''_{*,2}(x) &= 2A\left[2\mathrm{e}^{2x}(x^2 + x) + \mathrm{e}^{2x}(2x + 1)\right] \\
&= 2A\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 4x + 1) \\
y'''_{*,2}(x) &= 2A\left[2\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 4x + 1) + \mathrm{e}^{2x}(4x + 4)\right] \\
&= 4A\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 6x + 3)
\end{aligned}$$

Einsetzen in $Ly = f_2$:

$$\begin{aligned}
3\mathrm{e}^{2x} &= 4A\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 6x + 3) - 5 \cdot 2A\mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 4x + 1) \\
&\quad +8 \cdot 2A\mathrm{e}^{2x}(x^2 + x) - 4Ax^2\mathrm{e}^{2x} \\
&= A\mathrm{e}^{2x}\left[(8 - 20 + 16 - 4)x^2 + (24 - 40 + 16)x + (12 - 10)\right] \\
&= 2A\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

Bestimmen des Koeffizienten:

$$A = \tfrac{3}{2}$$

Zweiter Summand der speziellen Lösung:

$$y_{*,2}(x) = \tfrac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} + \alpha_1\mathrm{e}^x + \alpha_2\mathrm{e}^{2x} + \alpha_3 x\mathrm{e}^{2x}.$$

8.3.3 Anwendungen I: Schwingungen

Literatur: [Pap2, Abschnitt V.4.1]

In Beispiel 8.3 haben wir die Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$$

hergeleitet. Wir dividieren durch m und erhalten mit $2\delta = b/m \geq 0$, $\omega_0^2 = c/m$ und $f(t) = F(t)/m$ die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Die zur homogenen Gleichung gehörende charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Den einfachsten Fall der freien ungedämpften Schwingung, $\delta = 0$, haben wir bereits in Beispiel 8.15 besprochen. Wir wollen uns weiteren interessanten Fällen zuwenden, wobei wir $\delta > 0$ voraussetzen.

Bsp 8.52 (Freie gedämpfte Schwingung: schwache Dämpfung) Ist $\delta < \omega_0$, dann erhalten wir mit Hilfe des Parameters $\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{i}\omega_d.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (freie Schwingung) lautet also

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}[C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)].$$

Gegenüber der ungedämpften Schwingung verkleinert sich die Kreisfrequenz, denn es ist $\omega_d < \omega_0$. Außerdem verkleinert sich die Amplitude der Schwingung im Laufe der Zeit.

Die Konstanten C_1 und C_2 können aus den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{20}$$

bestimmt werden. Man erhält $C_1 = (v_0 + \delta x_0)/\omega_d$ und $C_2 = x_0$. Die rote Kurve in Abbildung 3 stellt die Lösung im Fall $\omega_0 = 1$, $\delta = 0.2$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ dar.

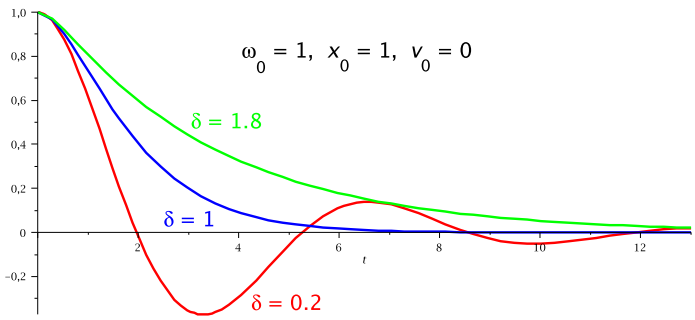


Abbildung 3: Freie gedämpfte Schwingungen

Bsp 8.53 (Freie gedämpfte Schwingung: Kriechfall) Bei starker Dämpfung, $\delta > \omega_0$, erhalten wir zwei negative reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung,

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist dann eine Linerkombination zweier monoton fallender Exponentialfunktionen,

$$x_0(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

Das mechanische System ist infolge zu starker Dämpfung (Reibung) zu keiner echten Schwingung mehr fähig.

Die Konstanten C_1 und C_2 können wieder aus den Anfangsbedingungen (20) bestimmt werden. Man erhält als Lösung

$$x(t) = \frac{(v_0 - x_0\lambda_2)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - (v_0 - x_0\lambda_1)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Die grüne Kurve in Abbildung 3 stellt die Lösung im Fall $\omega_0 = 1$, $\delta = 1.8$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ dar.

Die Lösung ist nicht in jedem Fall monoton fallend. Sei $\lambda_1 > \lambda_2$. Dann ist $v_0 - x_0\lambda_1 < v_0 - x_0\lambda_2$. Damit gilt

$$\frac{v_0 - x_0\lambda_1}{v_0 - x_0\lambda_2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 - x_0\lambda_2 < 0.$$

Die Bedingung $v_0 - x_0\lambda_2 < 0$ ist folglich äquivalent zur Existenz einer Zahl $t > 0$ für die

$$\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = \frac{v_0 - x_0\lambda_1}{v_0 - x_0\lambda_2}$$

und damit äquivalent zur Existenz einer Nullstelle von $x(t)$. Speziell für $\delta = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $x_0 = 1$ gilt $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Die Lösung $x(t)$ besitzt genau dann eine Nullstelle, wenn $v_0 < -\frac{3}{2}$. Die grüne Kurve in Abbildung 4 zeigt die Lösung in diesem Fall.

Im Fall $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ wächst die Lösung zunächst monoton. Es existiert ein lokales Maximum. Dieser Fall ist mit der blauen Kurve illustriert.

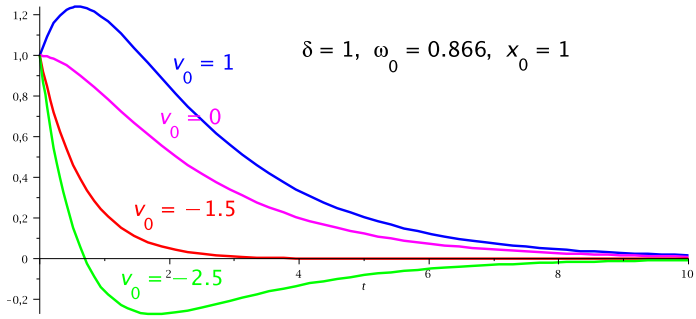


Abbildung 4: Kriechfall: verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten

Bsp 8.54 (Freie gedämpfte Schwingung: aperiodischer Grenzfall) Im Grenzfall $\delta = \omega_0$ erhalten wir zwei gleiche negative reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung,

$$\lambda_{1,2} = -\delta < 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung besitzt somit die Form

$$x_0(t) = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Das mechanische System verhält sich ähnlich zum Kriechfall, wie die blaue Kurve in Abbildung 3 illustriert. Bei stärkerer Dämpfung, $\delta > \omega_0$, klingt die Lösung langsamer ab, bei geringerer Dämpfung, $\delta < \omega_0$, kommt es zum Durchschwingen.

Bestimmt man die Konstanten C_1 und C_2 aus den Anfangsbedingungen (20), erhält man die Lösung

$$x(t) = (x_0 + v_0 t + \delta x_0 t)\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Diese Lösung hat eine Nullstelle, wenn $v_0 < -\delta x_0$. Wie im Fall der Kriechschwingung wächst die Lösung zunächst monoton, wenn $v_0 > 0$.

Bsp 8.55 (Erzwungene Schwingung) Erzwungene Schwingungen entstehen durch eine mit einer Erregerfrequenz ω periodisch wirkende Kraft, die in der rechten Seite der Differentialgleichung modelliert wird,

$$f(t) = K_0 \sin(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung $x(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich als Summe der allgemeinen Lösung $x_0(t)$ der homogenen Differentialgleichung (siehe die vorangegangenen Beispiele) und einer speziellen Lösung $x_*(t)$ der inhomogenen Gleichung. Letztere hat die Form einer ungedämpften Schwingung mit der Erregerfrequenz ω,

$$x_*(t) = A \sin(\omega t - \phi),$$

wobei die Amplitude A zu

$$A = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

berechnet werden kann (Übung).

Der Lösungsanteil $x_0(t)$ klingt mit der Zeit ab, so dass das mechanische System nach einer Einschwingphase ungedämpft schwingt. Dabei wird die von der Erregerfrequenz ω abhängige Amplitude A besonders groß (d. h. maximal), wenn ω gleich der Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{21}$$

ist (Übung). Diesen Sonderfall bezeichnet man als Resonanzfall, die Schwingungsamplitude A beträgt dann

$$A = \frac{K_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Bei kleiner Dämpfung, $\delta \ll 1$, kommt es bei einer Erregung mit der Resonanzfrequenz des Systems, $\omega = \omega_r \approx \omega_0$, zu riesigen Amplituden, der Resonanzkatastrophe. Diese kann zur Zerstörung des Systems führen.

Ü 8.56 *Bei welcher Erregerfrequenz nimmt die Amplitude*

$$A(\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

den größten Wert an?

Um $A(\omega)$ zu maximieren, genügt es,

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$$

zu minimieren. Die Ableitung

$$f'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2\omega = 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)$$

besitzt nur eine positive Nulltelle, nämlich

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

8.3.4 Anwendungen II: Bestimmung der Eulerschen Knicklast

Bsp 8.57 Wir betrachten noch einmal den beidseitig gelenkig gelagerten Stab der Länge l aus Beispiel 8.4,

$$\begin{aligned} EIy^{(4)}(x) + Fy''(x) &= Q(x) \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) &= 0, \end{aligned}$$

diesmal für den Fall einer ausschließlichen Belastung in Stabrichtung, d. h. $Q(x) \equiv 0$. Offenbar ist die *triviale Lösung* $y \equiv 0$ stets Lösung dieser Aufgabe. Wir wollen untersuchen, ob es Kräfte F gibt, die auch nicht-triviale Lösungen erlauben, also zu Verformungen des Stabs führen. Man bezeichnet diese Kräfte als *Eulersche Knickkräfte* oder *Eulersche Knicklasten*.

Mit der Abkürzung $\mu^2 = F/EI$ erhalten wir die Biegegleichung in der Form

$$y^{(4)}(x) + \mu^2 y''(x) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + \mu^2\lambda^2 = 0$$

hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = 0$ und $\lambda_{3,4} = \pm\mu\,\mathrm{i}$. Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(\mu x) + C_4 \cos(\mu x).$$

Mit den benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_2 + C_3\mu\cos(\mu x) - C_4\mu\sin(\mu x) \\ y''(x) &= -C_3\mu^2\sin(\mu x) - C_4\mu^2\cos(\mu x) \end{aligned}$$

erhalten wir aus den Randbedingungen $y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0$ vier Bestimmungsgleichungen für die Konstanten C_1 bis C_4.

- Aus $0 = y''(0) = -C_4\mu^2$ folgt sofort $C_4 = 0$.
- Aus $0 = y(0) = C_1 + C_4$ erhält man dann $C_1 = 0$, so dass sich das Gleichungssystem auf die beiden Gleichungen

  $$\begin{aligned} C_2 l + C_3\sin(\mu l) &= 0 \\ -C_3\mu^2\sin(\mu l) &= 0 \end{aligned}$$

  reduziert.
- Dividiert man die zweite Gleichung durch μ^2 und addiert sie zur ersten Gleichung, erhält man $C_2 l = 0$ und somit $C_2 = 0$. Es bleibt nur noch eine Bestimmungsgleichung, nämlich

  $$C_3\sin(\mu l) = 0.$$
- Unser Problem hat nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn $C_3 \neq 0$ ist. Also muss μl ein Vielfaches von π sein.

Für die *Eigenwerte*

$$\mu_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

erhält man die zugehörigen nichttrivialen Lösungen

$$y_n(x) = C_3 \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

wobei C_3 eine beliebige Konstante ist. Aus der Substitutionsgleichung $\mu^2 = F/EI$ erhält man die Eulerschen Knicklasten

$$F_n = EI \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Damit haben wir mathematisch hergeleitet, warum sich ein Stab bei stetig steigender Last zunächst nicht verformt, bei einer bestimmten Last aber plötzlich einknickt.

Die Konstante C_3 ist hier zunächst beliebig. Man muss jedoch beachten, dass das lineare Modell nur bei kleinen Auslenkungen gültig ist, vgl. auch [MV2, §9.11.4].

8.4 Lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Literatur: [Pap2, Kap. V.7], [Wes2, Kap. XI.2], [MV2, §9.8.3 §9.9]

8.4.1 Einführung

In diesem Abschnitt betrachten wir Gleichungssysteme der Form

$$\begin{array}{rcl} y_1'(x) &=& a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) + f_1(x) \\ y_2'(x) &=& a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) + f_2(x) \\ \vdots & & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_n'(x) &=& a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) + f_n(x) \end{array} \tag{22}$$

Durch Einführen einer Matrix und zweier *Vektorfunktionen*,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \vec{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},$$

lässt sich das Gleichungssystem (22) kurz als

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x) \tag{23}$$

schreiben.

Def 8.58 *Ein Gleichungssystem der Form (22) oder (23) heißt lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.*

Ist $\vec{f}(x) \equiv 0$, spricht man von einem homogenen System, ansonsten von einem inhomogenen System. Jede Vektorfunktion $\vec{y}(x)$, die (22) oder (23) genügt, heißt Lösung oder Lösungsvektor.

Bem 8.59 Der Zusatz 1. Ordnung in obiger Definition bezieht sich darauf, dass jede Differentialgleichung des Systems nur von 1. Ordnung ist. Hingegen versteht man unter der Ordnung des Systems die Summe der Ordnungen der einzelnen Differentialgleichungen. Wir haben es hier also mit einem System n-ter Ordnung zu tun.

Ü 8.60 *Man zeige, dass jede Linearkombination von Lösungen des homogenen Systems wieder Lösung des homogenen Systems ist.*

Diese Erkenntnnis führt uns wieder auf die Aufgabe, die Unabhängigkeit von Lösungen zu beschreiben.

Def 8.61 *Die Vektorfunktionen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ sind linear unabhängig, wenn die Vektoren $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ für jedes x linear unabhängig sind.*

Unter einem Fundamentalsystem des Systems (22) oder (23) versteht man eine Menge von n linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Satz 8.62 *Für n verschiedene Lösungen $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ des homogenen Systems gilt: Die Vektorfunktionen $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ für ein x_0 linear unabhängig sind. [Wes2, Kap. XI.2.2, Satz 2]*

Satz 8.63 *Für Lösungen linearer Systeme aus n Differentialgleichungen 1. Ordnung gelten analoge Eigenschaften wie für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung.*

- *Die allgemeine Lösung des homogenen Systems hat die Darstellung*

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i(x) = \alpha_1 \vec{y}_1(x) + \ldots + \alpha_n \vec{y}_n(x)$$

  mit frei wählbaren Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, wobei die Funktionen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ ein Fundamentalsystem bilden.

- *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems setzt sich aus einer speziellen Lösung $\vec{y}_*$ des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung $\vec{y}_0$ des homogenen Systems zusammen,*

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_*(x) + \vec{y}_0(x) = \vec{y}_*(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{y}_i(x).$$

8.4.2 Lösung homogener Systeme

Mit dem Lösungsansatz

$$\vec{y}(x) = \vec{v}\, \mathrm{e}^{\lambda x} \tag{24}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{v}$ und einer Konstanten λ kann man die Fundamentallösungen bestimmen. Man erhält aus (23) und (24) die Gleichung

$$\vec{v}\, \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} = A \vec{v}\, \mathrm{e}^{\lambda x}$$

bzw.

$$(A - \lambda I)\, \vec{v} = \vec{0},$$

d. h. ein Eigenwertproblem.

Satz 8.64 *Ist λ_k ein Eigenwert der Matrix A mit dem zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}_k$, dann ist*

$$\vec{y}_k(x) = \vec{v}_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}$$

eine Fundamentallösung.

Die lineare Unabhängigkeit der Fundamentallösungen ergibt sich aus der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren. Dazu setzt man speziell $x = 0$ ein.

Ü 8.65 *Erinnern Sie sich, dass die Eigenwerte der Matrix A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms*

$$p_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

sind. Wiederholen Sie die Begriffe algebraische Vielfachheit *und* geometrische Vielfachheit *eines Eigenwerts.*

Wir werden hier nur den Fall betrachten, dass für alle Eigenwerte der Matrix A algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Fall 1: Alle Eigenwerte sind reell und einfach. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einfache reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms und sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ die zugehörigen Eigenvektoren, dann bilden die Funktionen

$$\vec{y}_1(x) = \vec{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ \vec{y}_n(x) = \vec{v}_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem.

Bsp 8.66 Gesucht ist die Lösung des homogenen Systems

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wir lösen zunächst das Eigenwertproblem $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -2,$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Damit lautet das Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{x}, \quad \vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2x}, \quad \vec{y}_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2x},$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\vec{y}(x) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{x} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2x} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2x}.$$

Fall 2: Es treten auch mehrfache reelle Eigenwerte auf. Sei λ_0 eine k-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Unter der Annahme, dass algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, existieren k linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Die Funktionen

$$\vec{y}_1(x) = \vec{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \ldots, \vec{y}_k(x) = \vec{v}_k \mathrm{e}^{\lambda_0 x}$$

sind somit linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems und tragen zum Fundamentalsystem bei.

Fall 3: Es treten Paare konjugiert komplexer Eigenwerte auf. Seien $\lambda_0 = a + \mathrm{i}b$ und $\bar{\lambda}_0 = a - \mathrm{i}b$ zwei einfache konjugiert komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wenn $\vec{v}_0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_0 ist, dann ist $\bar{\vec{v}}_0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}_0$, und die Funktionen

$$\begin{aligned} \vec{z}_1(x) &= \vec{v}_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 x} = \vec{v}_0 \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx), \\ \vec{z}_2(x) &= \bar{\vec{v}}_0 \mathrm{e}^{\bar{\lambda}_0 x} = \bar{\vec{v}}_0 \mathrm{e}^{ax}(\cos bx - \mathrm{i}\sin bx) = \bar{\vec{z}}_1 \end{aligned}$$

sind zwei linear unabhängige komplexe Lösungsvektoren. Als Fundamentallösungen verwendet man aber besser die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \vec{y}_1(x) &= \tfrac{1}{2}(\vec{z}_1(x) + \vec{z}_2(x)) = \tfrac{1}{2}(\vec{z}_1(x) + \bar{\vec{z}}_1) = \operatorname{Re}\vec{z}_1(x), \\ \vec{y}_2(x) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\vec{z}_1(x) - \vec{z}_2(x)) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\vec{z}_1(x) - \bar{\vec{z}}_1) = \operatorname{Im}\vec{z}_1(x), \end{aligned}$$

denn diese sind reelle Funktionen.

Mehrfache komplexe Eigenwerte werden analog zu Fall 2 behandelt.

Bsp 8.67 Gesucht ist die Lösung des homogenen Systems

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir lösen zunächst das Eigenwertproblem $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}, \quad \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit lautet das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \vec{z}_1(x) &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) e^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \cos x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \sin x\right) + \mathrm{i}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \sin x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \cos x\right) \\ \vec{z}_2(x) &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) e^x(\cos x - \mathrm{i}\sin x) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \cos x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \sin x\right) - \mathrm{i}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \sin x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \cos x\right) \end{aligned}$$

bzw. unter Umgehung der komplexen Zahlen

$$\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \cos x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \sin x, \qquad \vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \sin x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \cos x$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= \alpha_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \cos x - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \sin x\right) + \alpha_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x \sin x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \cos x\right) \\ &= e^x \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x \\ -\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

8.4.3 Lösung inhomogener Systeme

Satz 8.68 (Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems) *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems*

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{f}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung $\vec{y}_0$ des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ und einer speziellen Lösung $\vec{y}_*$ des inhomogenen Systems. Diese lässt sich wieder durch Variation der Konstanten ermitteln.

Alg 8.69 (Variation der Konstanten) *Bereits berechnet seien die Fundamentallösungen*

$$\vec{y}_k = \begin{bmatrix} y_{k,1} \\ \vdots \\ y_{k,n} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Schritt 1 *Man löse das (vom Parameter x abhängige) lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\vec{y}_k(x) = \vec{f}(x), \tag{25}$$

ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1,n} & \cdots & y_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Schritt 2 *Man integriere die in Schritt 1 gefundenen Funktionen:*

$$C_k(x) = \int C_k'(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Die Integrationskonstante kann beliebig gewählt werden, zum Beispiel gleich Null.

Schritt 3 *Man gebe die spezielle Lösung an,*

$$\vec{y}_*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\vec{y}_k(x) = C_1(x)\,\vec{y}_1(x) + \ldots + C_n(x)\,\vec{y}_n(x). \tag{27}$$

Satz 8.70 *Das lineare Gleichungssystem (26) ist eindeutig lösbar. Die Funktion (27) ist spezielle Lösung.*

Beweis Wir beweisen nur den 2. Teil. Dazu rechnen wir nach, dass die Funktion (27) eine spezielle Lösung ist. Mit

$$\vec{y}_*'(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k'(x)\vec{y}_k(x) + C_k(x)\vec{y}_k'(x)\right)$$

folgt

$$\vec{y}_*' - A\vec{y}_* = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k'\vec{y}_k + C_k\vec{y}_k' - C_kA\vec{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k'\vec{y}_k = \vec{f}.$$

Dabei haben wir zunächst ausgenutzt, dass $\vec{y}_k$ Lösung des homogenen Systems ist, $\vec{y}_k' - A\vec{y}_k = \vec{0}$. Im letzten Schritt haben wir die Definitiongleichung (25) für die Funktionen C_k' benutzt. q.e.d.

Bsp 8.71 Man löse das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 3x-1 \\ -3x+2 \end{bmatrix}.$$

(a) Lösung der homogenen Systems: Die Eigenpaare der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

sind

$$\lambda_1 = -1, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_2 = -3, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Damit lautet das Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-x}, \quad \vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3x},$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\vec{y}(x) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3x} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3x} \\ -\mathrm{e}^{-3x} \end{bmatrix}.$$

(b) Zur Bestimmung der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung schreiben wir zunächst den Ansatz für die Variation der Konstanten auf:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 0 & -\mathrm{e}^{-3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-1 \\ -3x+2 \end{bmatrix}.$$

Dieses ist schnell gelöst, da die Matrix bereits Dreiecksgestalt hat:

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= -\mathrm{e}^{3x}(-3x+2), \\ C_1'(x) &= \mathrm{e}^{x}[(3x-1) - \mathrm{e}^{-3x}(-\mathrm{e}^{3x}(-3x+2))] \\ &= \mathrm{e}^{x}[(3x-1) + (-3x+2)] = \mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen werden nun unbestimmt integriert,

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x}, \\ C_2(x) &= -\int (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^{3x}, \end{aligned}$$

so dass die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} \vec{y}_*(x) &= \mathrm{e}^{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-x} + (x-1)\mathrm{e}^{3x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3x} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (x-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lautet.

Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{y}(x) = \begin{bmatrix} x \\ -x+1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3x}.$$

8.4.4 Äquivalenz einer Differentialgleichung n-ter Ordnung zu einem System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Satz 8.72 *Die Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f \tag{28}$$

mit i. Allg. variablen Koeffizienten ist äquivalent zum linearen System

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}, \tag{29}$$

wobei

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}. \tag{30}$$

Beweis „$\Rightarrow$“: Ist $y = y_1$ eine Lösung von (28), dann definieren die ersten $n-1$ Gleichungen des Systems (29) die Funktionen $y_2, \ldots, y_n$. Rekursiv ergibt sich $y_2 = y_1' = y'$, $y_3 = y_2' = y''$, $\ldots$, $y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)}$, so dass wegen (28) auch die letzte Gleichung von (29) erfüllt ist.

„$\Leftarrow$“: Ist $[y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$ eine Lösung von (29), dann gelten mit $y = y_1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} y' &= y_1' &&= y_2, \\ y'' &= y_2' &&= y_3, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= y_{n-1}' &&= y_n, \\ y^{(n)} &= y_n' &&= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1} y_n + f \\ & &&= -a_0 y - a_1 y' - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} + f, \end{aligned}$$

d. h., die Differentialgleichung (28) ist erfüllt. q.e.d.

Satz 8.73 *Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}$ konstante Koeffizienten. Dann sind das charakteristische Polynom der Gleichung (28) und das charakteristische Polynom der Matrix im System (29) bis auf den Faktor $(-1)^n$ gleich.*

Beweis Wir berechnen das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ der Matrix A im System (29), indem wir die Determinante nach der letzten Zeile entwickeln:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ & -\lambda & 1 & & & \\ & & -\lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad (-1)^{n+2}(-a_1) \begin{vmatrix} -\lambda & & & & \\ & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad (-1)^{n+3}(-a_2) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + \ldots + \\
&\quad (-1)^{2n-1}(-a_{n-2}) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ & -\lambda & 1 & & & \\ & & -\lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda & 0 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} + \\
&\quad (-1)^{2n}(-a_{n-1} - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ & -\lambda & 1 & & & \\ & & -\lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ & & & & & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-a_0) \cdot 1 + (-1)^{n+2}(-a_1) \cdot (-\lambda) + (-1)^{n+3}(-a_2) \cdot (-\lambda)^2 + \\
&\quad + \ldots + (-1)^{2n-1}(-a_{n-2}) \cdot (-\lambda)^{n-2} + (-1)^{2n}(-a_{n-1} - \lambda) \cdot (-\lambda)^{n-1} \\
&= (-1)^n [a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + (a_{n-1} + \lambda)\lambda^{n-1}]
\end{aligned}
$$

Das ist aber genau das charakteristische Polynom der Gleichung (28). q.e.d.

8.4.5 Hauptvektoren

Bisher haben wir den Fall ausgeklammert, in dem die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte kleiner als deren algebraische Vielfachheit ist. Das bedeutet, dass eine $n \times n$-Matrix A keine n linear unabhängigen Eigenvektoren besitzt. Damit kann das Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

nicht ausschließlich durch Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden. Wir benötigen Hauptvektoren.

Def 8.74 *Ein Vektor $\vec{v}$ heißt Hauptvektor der Stufe ℓ zum Eigenwert λ der Matrix A, wenn*

$$(A - \lambda I)^{\ell}\vec{v} = \vec{0} \quad \text{und} \quad (A - \lambda I)^{\ell-1}\vec{v} \neq \vec{0}$$

gilt.

Bsp 8.75 Jeder Eigenvektor von A ist Hauptvektor der Stufe 1.

Ü 8.76 *Sei*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) *Man prüfe nach, dass $\lambda = 1$ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1 ist.*

(b) *Man prüfe nach, dass $\vec{e}_2$ Hauptvektor der Stufe 2 ist.*

(c) *Man prüfe nach, dass $\vec{e}_3$ Hauptvektor der Stufe 3 ist.*

Satz 8.77 *[MV2, Satz 9.2] Zu jedem Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit k gibt es k linear unabhängige Hauptvektoren.*

Satz 8.78 *[MV2, Satz 9.3] Hauptvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind linear unabhängig.*

Folgerung 8.79 *Zu jeder $n \times n$-Matrix A gibt es n linear unabhängige Hauptvektoren.*

Satz 8.80 *[MV2, Abschnitt 9.4] Ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe ℓ zum Eigenwert λ der $n \times n$-Matrix A, dann ist*

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= \mathrm{e}^{\lambda x} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{x^k}{k!}(A - \lambda I)^k \vec{v} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x} \left(\vec{v} + x(A - \lambda I)\vec{v} + \frac{x^2}{2}(A - \lambda I)^2\vec{v} + \cdots + \frac{x^{\ell-1}}{\ell - 1}(A - \lambda I)^{\ell-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

Fundamentallösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Bsp 8.81 Zur Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{y} \tag{31}$$

bestimmen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehört der Eigenvektor $\vec{v}_1$, der dreifache Eigenwert $\lambda_2 = 2$ besitzt nur eine zweidimensionalen Eigenraum, der von den Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ aufgespannt wird, wobei

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung eines Hauptvektors 2. Stufe müssen wir das lineare Gleichungssytem $(A - 2I)^2\vec{v}_4 = 0$ lösen, also

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ v_{43} \\ v_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich ein dreidimensionaler Lösungsraum mit $v_{41} = 0$, der den zweidimensionalen Eigenraum, der durch $v_{41} = v_{42} = 0$ beschrieben wird, enthält. Für den gesuchten Hauptvektor 2. Stufe muss also $v_{42} \neq 0$ gelten; man kann zum Beispiel

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

verwenden. Damit besteht das Fundamentalsystem zu (31) aus den Funktionen

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2(x) = e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_3(x) = e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{y}_4(x) &= e^{2x}\left(\vec{v}_4 + x(A - 2I)\vec{v}_4\right) \\ &= e^{2x}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= e^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen, dass $\vec{y}_4$ tatsächlich Lösung von (31) ist.

Bem 8.82 Hauptvektoren treten in Form von *Hauptvektor-Ketten* auf, die auch als *Jordanketten* bezeichnet werden. Man überlege sich, dass folgendes git: Ist $\vec{v}_\ell$ ein Hauptvektor der Stufe ℓ zum Eigenwert λ, dann ist

$$\begin{array}{rcll} \vec{v}_{\ell-1} & = & (A-\lambda I)\vec{v}_\ell & \text{ein Hauptvektor der Stufe } \ell-1, \\ \vec{v}_{\ell-2} & = & (A-\lambda I)\vec{v}_{\ell-1} & \text{ein Hauptvektor der Stufe } \ell-2, \\ & \vdots & & \\ \vec{v}_1 & = & (A-\lambda I)\vec{v}_2 & \text{ein Hauptvektor der Stufe 1, d. h., ein Eigenvektor.} \end{array}$$

Die Berechnung der Kette ist nicht immer einfach, aber wenn man sie gefunden hat, kann man die Fundamentallösungen einfacher angeben, denn es gilt

$$\begin{array}{rcl} \vec{y}_1(x) & = & \mathrm{e}^{\lambda x}\vec{v}_1, \\ \vec{y}_2(x) & = & \mathrm{e}^{\lambda x}\left(\vec{v}_2 + x(A-\lambda I)\vec{v}_2\right) = \mathrm{e}^{\lambda x}(\vec{v}_2 + x\vec{v}_1), \\ & \vdots & \\ \vec{y}_\ell(x) & = & \mathrm{e}^{\lambda x}\left(\vec{v}_\ell + x\vec{v}_{\ell-1} + \ldots + \dfrac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\vec{v}_1\right). \end{array}$$

Folgerung 8.83 *Kennt man einen Hauptvektor $\vec{v}_\ell$ der Stufe ℓ, dann kann man durch fortgesetzte Multiplikation mit der Matrix $A-\lambda I$ auch die zugehörigen Hauptvektoren der Stufen $\ell-1$, $\ell-2$, $\ldots$, 1 bestimmen, also die gesamte Hauptvektor-Kette.*

Praktisch geht das aber nicht. Man kann zwar ℓ bestimmen, indem man $A-\lambda I$ fortlaufend mit sich selbst multipliziert, bis man mit $(A-\lambda I)^{\ell+1}$ die Nullmatrix erhält. Doch mit der Lösung von $(A-\lambda I)^\ell\vec{v} = \vec{0}$ erhält man einen Raum, der alle Vektoren der Kette enthält.

Bsp 8.84 Zur Matrix aus Beispiel 8.81 gibt es eine Hauptvektor-Kette der Länge 2. Den Hauptvektor der Stufe 2 haben wir schon ausgerechnet,

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Den zugehörigen Hauptvektor der Stufe 1 finden wir durch Matrixmultiplikation

$$(A-\lambda I)\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wie erwartet liegt er im von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ aufgespannten Eigenraum. Er stimmt aber weder mit $\vec{v}_2$ noch mit $\vec{v}_3$ überein; das wäre Zufall gewesen.

Zur Lösung der Aufgabe 8.81 war die Berechnung der Hauptvektorkette nicht nötig, denn die Lösung wurde dort auch ohne Kenntnisse über Hauptvektoren angegeben. Die soeben durchgeführte Rechnung war aber bei der Bestimmung von $\vec{y}_4$ auch notwendig geworden.

Folgerung 8.85 *Wenn der Eigenraum eindimensional ist, dann kann man durch Lösen von Gleichungssystemen der Form*

$$(A - \lambda I)\vec{v}_k = \vec{v}_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, \ell,$$

die Vektoren der Kette bestimmen.

Bsp 8.86 Zur Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} \tag{32}$$

bestimmen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren. Mit Hilfe von

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

erhält man den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 sind eindimensional und werden von den Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aufgespannt.

Den fehlenden Hauptvektor $\vec{v}_3$ der Stufe 2 zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ kann man folglich durch Lösen des Gleichungssystems $(A - I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$ bestimmen,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man erhält die Lösung

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diese besitzt die Struktur „spezielle Lösung des inhomogenen Systems plus allgemeine Lösung des homogenen Systems“, wobei die allgemeine Lösung des homogenen Systems gerade der Eigenunterraum ist. Wir können zum Beispiel $t = 0$ wählen, also als Hauptvektor den Vektor

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

verwenden.

Das Fundamentalsystem lautet folglich

$$\vec{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2(x) = \mathrm{e}^{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_3(x) = \mathrm{e}^{x} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

8.5 Integraltransformationen

8.5.1 Uneigentliche Integrale (Auffrischung)

Bem 8.87 Bisher wurde bei der Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

stets vorausgesetzt, dass Integrationsbereich und Integrand beschränkt sind. Bei uneigentlichen Integralen werden diese Voraussetzungen verletzt.

Uneigentliche Integrale spielen bei der Lösung von Differentialgleichungen und in der Statistik eine wichtige Rolle.

Def 8.88 (Unbeschränkter Integrationsbereich) *Es wird definiert:*

(a) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}}\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x.$

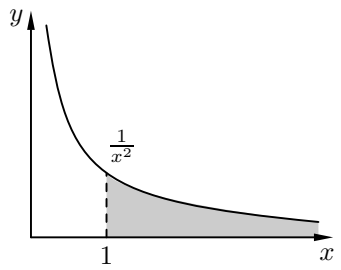
Im letzten Fall streben die Zahlen A und B unabhängig voneinander gegen $-\infty$ bzw. ∞. Falls dieser Grenzwert nicht existiert, aber der Grenzwert

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x,$$

dann nennt man letzteren Hauptwert des uneigentlichen Integrals.

Bsp 8.89 (Unbeschränkter Integrationsbereich)

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{d}x$



Def 8.90 (Polstellen des Integranden)

(a) *Falls $f(a) = \pm\infty$ gilt, aber $f(x)$ in $(a, b]$ stetig ist, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert.

(b) *Falls $f(b) = \pm\infty$ gilt, aber $f(x)$ in $[a, b)$ stetig ist, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert.

(c) *Falls $f(c) = \pm\infty$ in einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$ gilt, aber $f(x)$ in $[a, c)$ und $(c, b]$ stetig ist, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

definiert. Dabei streben die Zahlen ε und δ unabhängig voneinander gegen Null. Existiert die rechte Seite von (33) nicht, und existiert jedoch

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right],$$

dann nennt man diesen Wert den Hauptwert des uneigentlichen Integrals.

Bsp 8.91 (Polstelle des Integranden)

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Bem 8.92 Nicht über singuläre Stellen hinweg integrieren!

Bsp 8.93 (Fehler durch Nichtbeachten singulärer Stellen)

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x-1}\bigg|_0^2 = -1 - 1 = -2$$

Hier kann etwas nicht stimmen, denn der Integrand ist positiv, aber der Integralwert negativ. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{1+\delta}^{2} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{-\varepsilon} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right] + \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{\delta}\right)\right] = \infty.
\end{aligned}$$

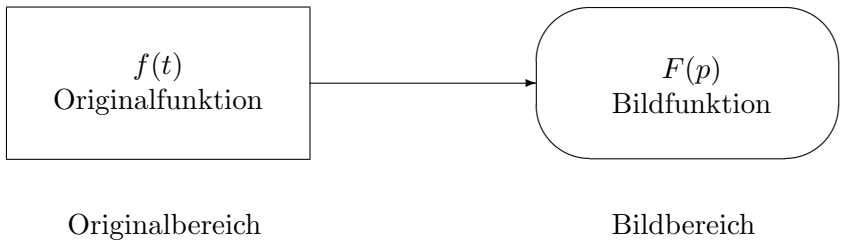
8.5.2 Die Laplace-Transformation

Literatur: [Pap2, Kap. VI], [MV2, §9.6]

Bsp 8.94 Sei $f(t)$ eine gegebene Funktion von t. Dann ist

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{34}$$

eine Funktion von p. Durch die Abbildung (34) wird einer *Originalfunktion* f eine *Bildfunktion* F zugeordnet.



Def 8.95

1. *Die Abbildung $f(t) \mapsto F(p)$,*

$$F(p) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,p)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

heißt Integraltransformation. Die Funktion $K(t,p)$ heißt Kern der Transformation.

2. *Die Funktion*

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{C},$$

heißt Laplace-Transformierte zu $f(t)$, die Abbildung heißt Laplace-Transformation, das Integral Laplace-Integral. Das Integral existiert meist nur für solche p, die einen hinreichend großen Realteil besitzen.

Bsp 8.96 Wir berechnen die Laplace-Transformierte zu $f(t) = \mathrm{e}^{p_0 t}$. Es gilt

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{p_0 t}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{e}^{p_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(p_0-p)t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\mathrm{e}^{(p_0-p)t}}{p_0-p}\right|_0^\infty .$$

Wir überlegen uns den Grenzwert für $t \to \infty$. Es gilt

$$\mathrm{e}^{(p_0-p)t} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(p_0-p)t}\,[\cos(\,\mathrm{Im}(p_0-p)t) + \mathrm{i}\sin(\,\mathrm{Im}(p_0-p)t)] \to 0,$$

falls $\mathrm{Re}(p_0-p) < 0$, d. h., falls $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,p_0$. Andernfalls existiert der Grenzwert nicht.

Also gilt für $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,p_0$

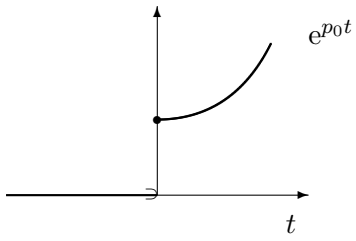
$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{p_0 t}\} = -\frac{1}{p_0-p} = \frac{1}{p-p_0}.$$

Für die inverse Laplace-Transformation gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-p_0}\right\} = \mathrm{e}^{p_0 t}.$$

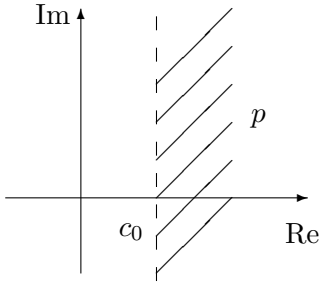
Im Spezialfall $p_0 = 0$ gilt $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$.

Bem 8.97 Das Laplace-Integral integriert nur über $(0,\infty)$. Damit die Eineindeutigkeit der Abbildung $f(t) \leftrightarrow F(p)$ gewährleistet ist, betrachtet man $f(t)$ für $t < 0$ als Null und $f(0) := \lim\limits_{t\to+0} f(t)$.



Bem 8.98 Das uneigentliche Integral existiert unter folgenden *hinreichenden* Bedingungen:

- Die Originalfunktion $f(t)$ ist für $t > 0$ stückweise stetig.
- Die Originalfunktion wächst nicht zu schnell: es existieren reelle Zahlen c_0 und c_1, so dass $|f(t)| \le c_1\mathrm{e}^{c_0 t}$ gilt.
- Die Bildfunktion ist dann für $\mathrm{Re}\,p > c_0$ definiert, vgl. Beispiel 8.96.



Ü 8.99 *Zeigen Sie:*

1. $\mathcal{L}\{at\} = \dfrac{a}{p^2}$,
2. $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n}{p}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ *per Induktion,*
3. $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Hinweis: Suchen Sie die Laplace-Transformationen in ihrem Tabellenwerk. Bringen Sie Ihr Tabellenwerk zur Übung mit.

Bem 8.100 (Tabelle spezieller Laplace-Transformationen) Die nachfolgende Tabelle, vgl. [Pap2, VI.4.2], enthält einige besonders häufig auftretende Funktionspaare. Umfassende Sammlungen von Funktionenspaaren der Laplace-Transformation findet man in Formelsammlungen, Tabellenwerken und in Spezialliteratur.

Bildfunktion $F(p)$	Originalfunktion $f(t)$
$\dfrac{1}{p}$	1 (Sprungfunktion)
$\dfrac{1}{p-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	$t \cdot \mathrm{e}^{at}$
$\dfrac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$
$\dfrac{1}{p^2+a^2}$	$\dfrac{\sin(at)}{a}$
$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\dfrac{(\sin b)\cdot p + a\cos b}{p^2+a^2}$	$\sin(at+b)$
$\dfrac{(\cos b)\cdot p - a\cdot \sin b}{p^2+a^2}$	$\cos(at+b)$
$\dfrac{1}{p^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh(at)}{a}$
$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\cosh(at)$

Bem 8.101 MATLAB stellt die Routinen `laplace` für die Laplace-Transformation und `ilaplace` für die inverse Laplace-Transformation zur Verfügung, siehe [Duffy, S. 285]. Probieren Sie das folgende Demo-Beispiel selbst aus:

```
>> syms a n s t
>> laplace(1,t,s)

     ans = 1/s

>> laplace(exp(a*t),t,s)

     ans = 1/(s-a)

>> ilaplace(4/s^3, s,t)

     ans = 2 * t^2
```

Mit `help laplace` erhalten Sie weitere Infomationen und Beispiele.

Auch in MAPLE kann man die Laplace-Transformation und die inverse Laplace-Transformation berechnen lassen.

```
> with(inttrans);
> laplace(t*exp(3*t),t,s);
```

$$\frac{1}{(s-3)^2}$$

```
> invlaplace(4/s^3,s,t);
```

$$2t^2$$

Satz 8.102 (Eigenschaften der Laplace-Transformation) *(vgl. [Pap2, VI.2])* *Im Folgenden sei $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $f(t)$ erfülle die in Bemerkung 8.98 beschriebenen hinreichenden Bedingungen. Es gelten:*

Linearität (Additionssatz)

$$\mathcal{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\} = \lambda_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \lambda_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad \text{wobei } a > 0,$$

Verschiebung nach rechts

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-ap} F(p), \quad \text{wobei } a > 0,$$

Verschiebung nach links

$$\mathcal{L}\{f(t+a)\} = \mathrm{e}^{ap} \left[F(p) - \int_0^a f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t \right], \quad \text{wobei } a > 0,$$

Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at} f(t)\} = F(p+a),$$

Ableitungssatz für die Originalfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= pF(p) - f(0), \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0), \end{aligned}$$

Ableitungssatz für die Bildfunktion (auch Multiplikationssatz)

$$\begin{aligned} F^{(n)}(p) &= \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}, \\ \mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n F^{(n)}(p), \end{aligned}$$

Integralsatz für die Originalfunktion

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(u)\, \mathrm{d}u \right\} = \frac{F(p)}{p},$$

Integralsatz für die Bildfunktion (auch Divisionssatz)

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_p^\infty F(q)\, \mathrm{d}q.$$

Beweis Linearität, Ähnlichkeitssatz, Verschiebung nach rechts und links sowie Dämpfungssatz sind zur Übung selbst zu beweisen.

Den Ableitungssatz für die Originalfunktion beweist man durch partielle Integration. Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{u'} \underbrace{\mathrm{e}^{-pt}}_{v} \,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{f(t)}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{-pt}}_{v} |_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{f(t)}_{u} \underbrace{(-p\mathrm{e}^{-pt})}_{v'} \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} - f(0) + pF(p)
\end{aligned}$$

Der Grenzwert verschwindet, weil $|f(t)| < c_1 \mathrm{e}^{c_0 t}$ und $\operatorname{Re} p > c_0$.

Der Beweis für den Ableitungssatz für Bildfunktion erfolgt durch Differenzieren. Sei $n = 1$, dann gilt

$$F'(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (-t) f(t) \mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\{(-t)f(t)\}.$$

Der Integralsatz für die Originalfunktion kann über die Faltung mit der Heavisidefunktion bewiesen werden; das soll hier nicht dargestellt werden.

Schließlich wollen wir den Integralsatz für die Bildfunktion beweisen. Sei $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = G(p)$. Dann gilt

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{t \cdot \frac{f(t)}{t}\right\} = -G'(p),$$

wobei wir den Ableitungssatz für die Bildfunktion benutzt haben. Durch Integrieren erhalten wir die Behauptung:

$$\int_p^\infty F(q) \,\mathrm{d}q = -\int_p^\infty G'(q) \,\mathrm{d}q = -\lim_{q\to\infty} G(q) + G(p) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\},$$

weil $\lim\limits_{q\to\infty} G(q) = 0$. q.e.d.

Bsp 8.103 (zum Ähnlichkeitssatz) Mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes erhalten wir aus

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$$

die Formel

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(\frac{p}{\omega})^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Bem 8.104 (Anwendung zur Lösung von Differentialgleichungen) Mit Hilfe der Laplace-Transformation lassen sich Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten elegant lösen. Die allgemeine Vorgehensweise umfasst die folgenden drei Schritte.

1. Die Laplace-Transformation der Aufgabe überführt diese in eine algebraische Gleichung im Bildbereich.
2. Diese wird gelöst. Als Ergebnis hat man die Lösung im Bildbereich.
3. Durch Rücktransformation erhält man die gesuchte Lösung im Originalbereich.

Der Vorteil liegt darin, dass die Rechenoperationen im Bildbereich meist einfacher sind.

Die Schwierigkeit besteht oft in der Rücktransformation. Anwender vor allem aus der Elektrotechnik haben es gelernt, aus der Lösung im Bildbereich bereits ihre Schlüsse zu ziehen.

Bsp 8.105 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\dot{u}(t) = au(t), \quad u(0) = u_0.$$

Linke und rechte Seite werden Laplace-transformiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} &= pU(p) - u_0, \\ \mathcal{L}\{au(t)\} &= aU(p), \end{aligned}$$

woraus man die Gleichung

$$pU(p) - u_0 = aU(p)$$

erhält. Diese wird im Bildraum gelöst:

$$\begin{aligned} (p-a)U(p) &= u_0, \\ U(p) &= \frac{u_0}{p-a}. \end{aligned}$$

Die Rücktransformation liefert

$$u(t) = u_0 \mathrm{e}^{at}.$$

Bem 8.106 (Möglichkeiten der Rücktransformation) Die Rücktransformation kann erfolgen

1. mit MAPLE oder MATLAB,
2. mit der Korrespondenztabelle und den Sätzen, bei gebrochen rationalen Funktionen über Partialbruchzerlegung (siehe Beispiel 8.107),
3. durch Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \ldots, \\ f(t) &= a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \ldots, \end{aligned}$$

4. mit Hilfe der komplexen Funktionentheorie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = \sum_{\nu} \operatorname*{Res}_{p=p_\nu} \{F(p)\mathrm{e}^{pt}\},$$

wobei $\sigma > c_0$ eine Zahl ist und p_ν die Polstellen von $F(p)$ sind.

Bsp 8.107 Zu lösen sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\dot{y} + y &= 2\sin 2t - 11\cos 2t, \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir gehen wieder entsprechend der 3 Schritte aus Bemerkung 8.104 vor.

1. Laplace-Transformation des Problems

$$[p^2Y(p) - p\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{\dot{y}(0)}_{0}] + 2[pY(p) - \underbrace{y(0)}_{1}] + Y(p) = 2 \cdot \frac{2}{p^2+4} - 11\frac{p}{p^2+4}$$

2. Lösung im Bildbereich

$$\begin{aligned} (p^2+2p+1)Y(p) - (p+2) &= \frac{4-11p}{p^2+4} \\ (p+1)^2Y(p) &= \frac{4-11p}{p^2+4} + p + 2 \\ Y(p) &= \frac{4-11p}{(p^2+4)(p+1)^2} + \frac{p+2}{(p+1)^2} \end{aligned}$$

3. Rücktransformation

   Ansatz der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4-11p}{(p^2+4)(p+1)^2} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p+1}$$

   Koeffizientenvergleich liefert $C = 3$, $A = 1$, $B = -4$, $D = -1$. Weiterhin gilt

$$\frac{p+2}{(p+1)^2} = \frac{p+1+1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

   Somit erhalten wir eine Form von $Y(p)$, die sich mit der Tabelle transformieren lässt:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p-4}{p^2+4} + \frac{3+1}{(p+1)^2} + \underbrace{\frac{-1+1}{p+1}}_{=0} \\ &= \frac{p}{p^2+4} - \frac{4}{p^2+4} + \frac{4}{(p+1)^2}. \end{aligned}$$

   Die Lösung ist folglich

$$y(t) = \cos 2t - 2\sin 2t + 4t\mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Bsp 8.108 Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) + 2y(x) &= r(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir beobachten zunächst, dass die Differentialgleichung nicht mit einer Funktion $y(x)$ erfüllbar ist, die zweimal stetig differenzierbar ist. Deshalb ist die Aufgabe so zu verstehen, dass die Differentialgleichung nur in $(0,1) \cup (1,\infty)$ gelten soll. Für $x = 1$ fordert man die Stetigkeit von y und y'. Wir werden aber sehen, dass das mit unserer Methode von allein herauskommt:

1. Laplace-Transformation des Problems: Mit

   $$\mathcal{L}\{r(x)\} = \int_0^\infty r(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p}$$

   erhält man

   $$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 2Y(p) = \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p}.$$

2. Lösung im Bildbereich: Unter Nutzung der Anfangsbedingungen ergibt sich

   $$\begin{aligned} (p^2+2)Y(p) &= \frac{1}{p} - \mathrm{e}^{-p}\frac{1}{p} \\ Y(p) &= \frac{1}{p\,(p^2+2)} - \mathrm{e}^{-p}\frac{1}{p\,(p^2+2)}. \end{aligned}$$

3. Rücktransformation: Mit der Partialbruchzerlegung

   $$\frac{1}{p\,(p^2+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2}$$

   erhält man

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p\,(p^2+2)}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+2}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}x).$$

   Wir bezeichnen diese Funktion mit $f(x)$,

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}x) & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

   Mit der Verschiebung nach links folgt daraus

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-p}\,\frac{p}{p^2+2}\right\} = f(x-1) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}(x-1)) & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

   Damit erhalten wir die Lösung

   $$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{2}(x-1) - \cos(\sqrt{2}x)\right) & \text{für } x \geq 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}(x-1)) & \text{für } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Man kann nachprüfen, dass y und y' stetig sind und nur y'' bei $x = 1$ eine Sprungstelle besitzt.

Für weitere Beispiele studiere man [Pap2, Kap. VI.5]

8.5.3 Die Fourier-Transformation

Literatur: [MV2, §11.6]

Def 8.109 *Die Fourier-Transformation ist ebenfalls eine Integraltransformation. Sie ist durch*

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

definiert.

Satz 8.110 (Umkehrung der Fourier-Transformation) *Es gilt*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Satz 8.111 (Eigenschaften der Fourier-Transformation) *Die Fourier-Transformation besitzt ähnliche Eigenschaften wie die Laplace-Transformation. Insbesondere gilt:*

Linearität: $\mathcal{F}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$,

Verschiebung: $\mathcal{F}[f(t-a)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}F(\omega), \quad a \in \mathbb{R}$ *beliebig,*

Ähnlichkeit: $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a}), \quad a \in \mathbb{R}$ *beliebig,*

Ableitungen: $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$,

Modulation: $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t)] = F(\omega - \omega_0)$.

Bem 8.112 Man kann die Fourier-Transformation zur Lösung von Differentialgleichungen anwenden und erhält eine Partikulärlösung. Die Lösung von Anfangswertproblemen ist aber nicht so elegant wie bei der Laplace-Transformation möglich.

Bsp 8.113 Man berechne eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir gehen wieder in den bekannten drei Schritten vor.

1. Fourier-Transformation der Differentialgleichung:

$$\mathrm{i}\,\omega Y(\omega) + Y(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}.$$

2. Lösung im Bildraum:

$$Y(\omega) = \frac{1}{(\omega^2+1)(1+\mathrm{i}\,\omega)}.$$

3. Rücktransformation:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}}{(\omega^2+1)(1+\mathrm{i}\omega)} \, \mathrm{d}\omega.$$

Mit Hilfe der komplexen Funktionentheorie erhält man

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{4}\,(2t+1) & \text{für } t \geq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{t} & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Literatur

[Duffy] Duffy, D. G.: *Advanced Engineering Mathematics with MATLAB*. Chapmal & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[MV1] Meyberg, K. und P. Vachenauer: *Höhere Mathematik*, Band 1. Springer, Berlin, ..., 1999, 2001, 2003.

[MV2] Meyberg, K. und P. Vachenauer: *Höhere Mathematik*, Band 2. Springer, Berlin, 1991, 1997, 1999, 2001.

[Pap1] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 1. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, ..., 1998, 2000, 2001.

[Pap2] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, ..., 1997, 2000, 2001.

[Wes1] Westermann, Th.: *Mathematik für Ingenieure*, Band 1. Springer, Berlin, 1996, 2002, 2005.

[Wes2] Westermann, Th.: *Mathematik für Ingenieure*, Band 2. Springer, Berlin, 1997, 2001.