Serial-parallel Graphs

```
grammar SerialParallel
   nonterminal  SP(2), S(0);
   terminal     a(2);
   start        S;

   S()     ::= SP(x,y)          [ init     ]
   SP(x,y) ::= a(x,y)           [ edge     ]
           |   SP(x,y) SP(x,y)  [ parallel ]
           |   SP(x,u) SP(u,y)  [ serial   ]
end
```

Note: When describing conflicts, $\circ$ represents a node that has not yet been processed whereas $\bullet$ represents a node that has been processed already, but that is not the value of any current parameter.

Note: States $q_0, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ have conflicts

State $q_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$\mathsf{S}() \quad\quad \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_1)\,\mathsf{SP}(n_1, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_2) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_3)\,\mathsf{SP}(n_3, n_2)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4)\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_5) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, n_5)$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_2(n_0, n_1, \boldsymbol{b})$$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1 = \boldsymbol{b}} \longrightarrow q_3(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1 = \boldsymbol{b}} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

Conflicts:

- shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \circ)$, shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

State $q_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\textbf{.} \quad [edge]$

State $q_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_1) \to \mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_1)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \to \mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_2)\,\mathsf{SP}(n_2, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_3) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4)\,\mathsf{SP}(n_4, n_3)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_5) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_5)\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_5)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_6) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, n_6)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_7) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_8)\,\mathsf{SP}(n_8, n_7)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_9) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_9)\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_9)$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_{10}) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{b}, n_{10})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, n_{11})\,\mathsf{SP}(n_{11}, \boldsymbol{c})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_2(n_0, n_1, \boldsymbol{b})$$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1 = \boldsymbol{b}} \longrightarrow q_4(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{b}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_5(n_0, n_1, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{b}, n_1 = \boldsymbol{c}} \longrightarrow q_6(n_0, n_1, \boldsymbol{a})$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1 = \boldsymbol{b}} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{b}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{b}, n_1 = \boldsymbol{c}} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

Conflicts:

- shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{b}, \circ)$, shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \circ)$

State $q_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	
$\mathsf{S}() \quad\quad \to \mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\textbf{.}$	$[init]$
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_1)\,\mathsf{SP}(n_1, \boldsymbol{b})$	
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_2) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_3)\,\mathsf{SP}(n_3, n_2)$	
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4) \to \textbf{.}\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4)\,\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_4)$	
$\mathsf{SP}(\boldsymbol{a}, n_5) \to \textbf{.}\,\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, n_5)$	

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_2(n_0, n_1, \boldsymbol{b})$$

$$\frac{\mathsf{SP}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1 = \boldsymbol{b}} \longrightarrow q_4(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1\uparrow} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

$$\frac{\mathsf{a}(n_0, n_1)}{n_0 = \boldsymbol{a}, n_1 = \boldsymbol{b}} \longrightarrow q_1(n_0, n_1)$$

Conflicts:

- shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \circ)$, shift $\mathsf{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

State $q_4(a, b)$

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{SP}(a,b) & \to \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \mathsf{SP}(a,b)\, \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.} & [\textit{parallel}] \\
\hline
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,b)\, \mathsf{SP}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_1)\, \mathsf{SP}(n_1,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,n_2) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_3)\, \mathsf{SP}(n_3,n_2) & \\
\mathsf{SP}(a,n_4) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_4)\, \mathsf{SP}(a,n_4) & \\
\mathsf{SP}(a,n_5) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(a,n_5) & \\
\end{array}
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1\uparrow} \; q_2(n_0,n_1,b)
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1 = b} \; q_4(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1\uparrow} \; q_1(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1 = b} \; q_1(n_0,n_1)
$$

Conflicts:

- reduce *parallel*, shift $\mathsf{a}(a,b)$, shift $\mathsf{a}(a,\circ)$

State $q_5(a, b, c, d)$

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{SP}(a,n_1) & \to \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(b,n_1) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,c) & \to \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(b,c) & \\
\mathsf{SP}(d,b) & \to \mathsf{SP}(d,a)\, \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.} & [\textit{serial}] \\
\hline
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,b)\, \mathsf{SP}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_2)\, \mathsf{SP}(n_2,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,n_3) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_4)\, \mathsf{SP}(n_4,n_3) & \\
\mathsf{SP}(a,n_5) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_5)\, \mathsf{SP}(a,n_5) & \\
\mathsf{SP}(a,n_6) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(a,n_6) & \\
\mathsf{SP}(b,n_7) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(b,n_8)\, \mathsf{SP}(n_8,n_7) & \\
\mathsf{SP}(b,n_9) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(b,n_9)\, \mathsf{SP}(b,n_9) & \\
\mathsf{SP}(b,n_{10}) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(b,n_{10}) & \\
\mathsf{SP}(b,c) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(b,n_{11})\, \mathsf{SP}(n_{11},c) & \\
\mathsf{SP}(b,c) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(b,c)\, \mathsf{SP}(b,c) & \\
\mathsf{SP}(b,c) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(b,c) & \\
\end{array}
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1\uparrow} \; q_2(n_0,n_1,b)
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1 = b} \; q_4(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = b,\, n_1\uparrow} \; q_5(n_0,n_1,c,a)
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = b,\, n_1 = c} \; q_6(n_0,n_1,a)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1\uparrow} \; q_1(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1 = b} \; q_1(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = b,\, n_1\uparrow} \; q_1(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = b,\, n_1 = c} \; q_1(n_0,n_1)
$$

Conflicts:

- shift $\mathsf{a}(a,\circ)$, reduce *serial*, shift $\mathsf{a}(b,\circ)$, shift $\mathsf{a}(a,b)$, shift $\mathsf{a}(b,c)$

State $q_6(a, b, c)$

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{SP}(a,b) & \to \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(c,b) & \to \mathsf{SP}(c,a)\, \mathsf{SP}(a,b) \boldsymbol{.} & [\textit{serial}] \\
\hline
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,b)\, \mathsf{SP}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_1)\, \mathsf{SP}(n_1,b) & \\
\mathsf{SP}(a,b) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(a,b) & \\
\mathsf{SP}(a,n_2) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_3)\, \mathsf{SP}(n_3,n_2) & \\
\mathsf{SP}(a,n_4) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{SP}(a,n_4)\, \mathsf{SP}(a,n_4) & \\
\mathsf{SP}(a,n_5) & \to \boldsymbol{.}\, \mathsf{a}(a,n_5) & \\
\end{array}
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1\uparrow} \; q_2(n_0,n_1,b)
$$

$$
\frac{\mathsf{SP}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1 = b} \; q_4(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1\uparrow} \; q_1(n_0,n_1)
$$

$$
\frac{\mathsf{a}(n_0,n_1)}{n_0 = a,\, n_1 = b} \; q_1(n_0,n_1)
$$

Conflicts:

- shift $\mathsf{a}(a,b)$, shift $\mathsf{a}(a,\circ)$