

Berechenbare Funktionalanalysis und kompakte Operatoren

Volker Bosserhoff

Institut für Theoretische Informatik und Mathematik

Oberseminar der Fakultät für Informatik, 22. Juli 2008

Rechnen mit endlichen Objekten

- ▶ $\Sigma := \{0, 1\}$.
- ▶ $f : \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ **berechenbar**
:⇔ es gibt TM, die auf jedem $w \in \text{dom}(f)$ hält
und $f(w)$ ausgibt.
- ▶ Elemente von \mathbb{N} , \mathbb{Q} etc. lassen sich codieren:
- ▶ ν **Notation** von M :⇔ $\nu : \subseteq \Sigma^* \rightarrow M$ surjektiv

Rechnen mit endlichen Objekten

- $g : \subseteq M_1 \rightarrow M_2$ (ν_1, ν_2) -**berechenbar**
 : \Leftrightarrow es gibt berechenbares $f : \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit
 $g(\nu_1(w)) = \nu_2(f(w))$ für jedes $w \in \nu_1^{-1}(\text{dom}(g))$.

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 \\
 \uparrow \nu_1 & & \uparrow \nu_2 \\
 \Sigma^* & \xrightarrow{f} & \Sigma^*
 \end{array}$$

Rechnen mit unendlichen Objekten

- ▶ Es gibt kein surjektives $\nu : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ \Rightarrow Benutze unendliche Codewörter (Elemente von Σ^ω).
- ▶ $f : \subseteq \Sigma^\omega \rightarrow \Sigma^\omega$ **berechenbar**
: \Leftrightarrow es gibt TM, die bei Eingabe $p \in \text{dom}(f)$
in unendlicher Zeit $f(p)$ ausgibt
- ▶ δ **Darstellung** von M
: $\Leftrightarrow \delta : \subseteq \Sigma^\omega \rightarrow M$ surjektiv

Rechnen mit unendlichen Objekten

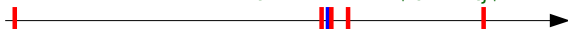
- $g : \subseteq M_1 \rightarrow M_2$ ist (δ_1, δ_2) -berechenbar
:⇔ es gibt berechenbares $f : \subseteq \Sigma^\omega \rightarrow \Sigma^\omega$ mit
 $g(\delta_1(p)) = \delta_2(f(p))$ für jedes $p \in \delta_1^{-1}(\text{dom}(g))$.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 \\ \uparrow \delta_1 & & \uparrow \delta_2 \\ \Sigma^\omega & \xrightarrow{f} & \Sigma^\omega \end{array}$$

Standarddarstellung von \mathbb{R}

- ▶ **Cauchy-Darstellung** ρ von \mathbb{R} :

$\rho(p) = x \Leftrightarrow p$ ist codierte Liste (q_0, q_1, \dots) rationaler Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ und $|q_i - q_j| \leq 2^{-i}$ für $j \geq i$.



- ▶ $x \in \mathbb{R}$ **berechenbar** $\Leftrightarrow x$ hat berechenbaren ρ -Namen.

Weitere Darstellungen von \mathbb{R}

- ▶ **Linksschnitt-Darstellung** $\rho_{<}$ von \mathbb{R} :

$\rho_{<}(p) = x \Leftrightarrow p$ ist codierte Aufzählung der Menge $\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$.



- ▶ **Rechtsschnitt-Darstellung** $\rho_{>}$ von \mathbb{R} :

$\rho_{>}(p) = x \Leftrightarrow p$ ist codierte Aufzählung der Menge $\{q \in \mathbb{Q} : q > x\}$.



Berechenbare Banachräume

- ▶ Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum (über \mathbb{R}).
- ▶ Sei $e : \mathbb{N} \rightarrow X$ Folge, deren Spann dicht in X ist (*Fundamentalfolge*).
- ▶ \mathcal{D}_e rationaler Spann von e
- ▶ α_e kanonische Notation von \mathcal{D}_e .
- ▶ $(X, \|\cdot\|, e)$ **berechenbarer Banachraum** $:\Leftrightarrow$
 $\|\cdot\|$ eingeschränkt auf \mathcal{D}_e ist (α_e, ρ) -berechenbar.

Cauchy-Darstellung

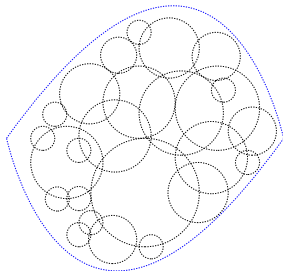
- ▶ Sei $(X, \|\cdot\|_X, e)$ berechenbarer Banachraum.
- ▶ **Cauchy-Darstellung** δ_X von X :
Codiert x als Folge in \mathcal{D}_e ,
die schnell gegen x konvergiert.
- ▶ Sei $(Y, \|\cdot\|_Y, h)$ weiterer berechenbarer Banachraum.
- ▶ $f : X \rightarrow Y$ (δ_X, δ_Y) -berechenbar
 $\Rightarrow f$ stetig.

Berechenbare Banachräume – Beispiele

- ▶ $X = \mathbb{R}^n$,
 e kanon. Aufzählung von \mathbb{Q}^n .
- ▶ $X = \mathbb{C}^n$,
 e kanon. Aufzählung von $(\mathbb{Q}[\sqrt{-1}])^n$.
- ▶ $X = C[0, 1]$,
 e kanon. Aufzählung aller Polynome mit Koeffizienten in \mathbb{Q} .
- ▶ $X = L_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$),
 e kanon. Aufzählung aller charakteristischen Funktionen von Intervallen $[a, b] \subseteq [0, 1]$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

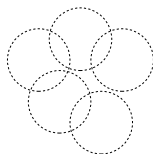
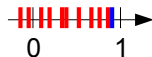
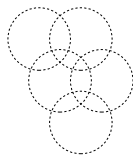
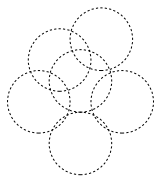
Darstellung offener Mengen in Banachräumen

- ▶ $B(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}$
- ▶ $B(a, q)$ **rationale Kugel** $:\Leftrightarrow a \in \mathcal{D}_e, q \in \mathbb{Q}$.
- ▶ Darstellung $\delta_{\mathcal{O}}$ offener Mengen:
Codiert offenes $\mathcal{O} \subseteq X$ als Folge
rationaler Kugeln, die \mathcal{O} ausschöpfen.



Darstellung von Maßen auf Banachräumen

- ▶ Darstellung $\delta_{\mathcal{M}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen:
 Name von μ enthält für jedes Tupel (B_1, \dots, B_n)
 rationaler Kugeln einen $\rho_{<}$ -Namen der Zahl
 $\mu(B_1 \cup \dots \cup B_n)$.



Kompakte Operatoren – Definition und Beispiel

- ▶ Seien X, Y Banachräume, $F : X \rightarrow Y$ linear.
- ▶ $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.
- ▶ F **kompakt** $\Leftrightarrow \overline{F(B_X)}$ kompakte Menge.
- ▶ Beobachtung: Kompakte Operatoren sind stetig.
- ▶ Beispiel: $X = Y = L_2[0, 1]$, $k \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$,

$$F(f)(x) := \int_{[0,1]} k(x, t)f(t) \lambda(dt).$$

Kompakte Operatoren – Eigenschaften

- ▶ Satz (Schauder (1930)):

$F : X \rightarrow Y$ kompakt $\Leftrightarrow F^* : Y^* \rightarrow X^*$ kompakt.

($F^*(g)(x) := g(F(x))$.)

- ▶ Satz (Grothendieck (1955)):

Operatoren $x \mapsto \sum_{i=1}^n y_i f_i(x)$, $y_i \in Y$, $f_i \in X^*$,

von endlichem Rang sind dicht (bzgl. Operatornorm)
in den kompakten Operatoren

\Leftrightarrow

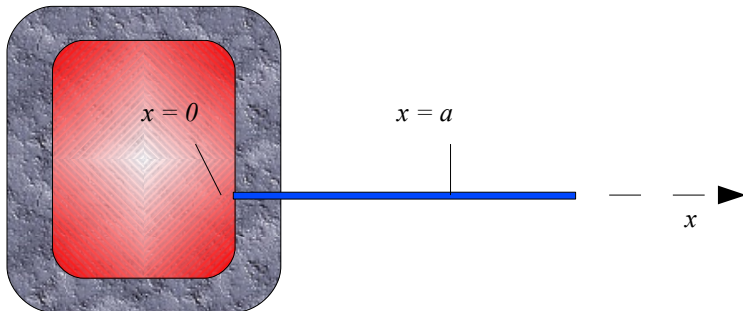
Y hat die **Approximationseigenschaft**.

Inverse kompakter Operatoren

- ▶ Sei $F : X \rightarrow Y$ kompakt und injektiv.
- ▶ $F^{-1} : \subseteq Y \rightarrow X$ stetig $\Leftrightarrow F$ von endlichem Rang.
- ▶ Problem: Numerische Berechnung von unstetigem F^{-1} .
- ▶ Allgemeines Problem: Numerische Berechnung eines unstetigen linearen Operators.
- ▶ “Schlecht gestelltes Problem” (Hadamard (1902))

Inverse kompakter Operatoren – Beispiel

► Indirekte Temperaturmessung



Effektive Sätze über kompakte Operatoren

- ▶ Brattka und Dillhage (2007):
Effektive Versionen u.a. der Sätze von Schauder und Grothendieck.
- ▶ Allerdings zusätzliche Annahme:
Definitions- und Bildraum besitzen jeweils berechenbare *Schauder-Basis*.

Schauder-Basen – Definition und Beispiele

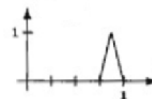
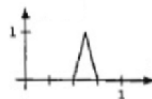
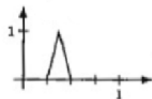
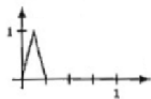
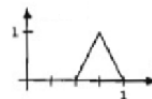
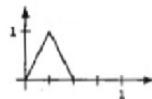
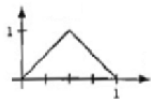
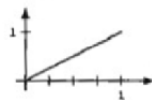
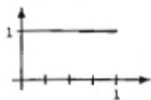
- ▶ Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banach-Raum.
- ▶ Falls X endl.-dim.: Schauder-Basis \cong herkömmliche Basis.
- ▶ Sonst: Folge $(x_i)_i \in X^{\mathbb{N}}$ **Schauder-Basis** von X : \Leftrightarrow
zu jedem $x \in X$ existiert eindeutige Folge $(\alpha_j)_j \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \right\| = 0.$$

- ▶ Beispiel:
Orthonormalbasis eines separablen Hilbertraumes.

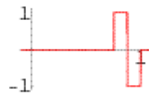
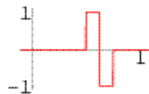
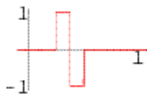
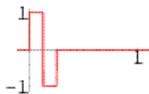
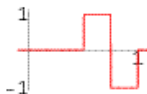
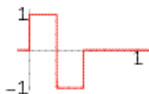
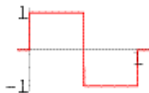
Schauder-Basen – Beispiele

► Schauder-Basis von $C[0, 1]$



Schauder-Basen – Beispiele

- Schauder-Basis von $L_p([0, 1])$, $1 \leq p < \infty$



Frage zur Berechenbarkeit von Schauder-Basen

- ▶ Frage:
 $(X, \|\cdot\|, e)$ bb. Banachraum mit Schauder-Basis
 $\stackrel{?}{\implies} (X, \|\cdot\|, e)$ hat bb. Schauder-Basis.
- ▶ Antwort für den Spezialfall “ $(X, \|\cdot\|)$ Hilbertraum”:
Ja. (Brattka und Yoshikawa (2006))

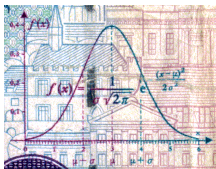
Intuition zur Konstruktion eines Gegenbeispiels

- ▶ Allgemeine Intuition:
Objekt A hat Eigenschaft E ,
aber hat Eigenschaft E nicht effektiv;
dann ist A “nah dran”, Eigenschaft E nicht zu haben.
- ▶ Führt auf **Banachs Basis-Problem** (1932):
Existiert ein (separabler) Banachraum ohne
Schauder-Basis?
- ▶ Erstes Beispiel gab Enflo (1973).

Konstruktion eines Gegenbeispiels

- ▶ Sei Z Enflös Raum.
- ▶ $Y := (Z \times Z \times \cdots)_{c_0}$ (Raum der Nullfolgen in Z).
- ▶ $Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots$ gewisse endl.-dim. Teilräume von Z mit $\text{cls}(\bigcup_i Z_i) = Z$.
- ▶ Gegenbeispiel X hat die Form $(Z_{\tau(0)} \times Z_{\tau(1)} \times \cdots)_{c_0} \subseteq Y$, $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- ▶ Die Z_i haben jeweils “gutartige” Basen (Ausnutzung der **lokalen Basisstruktur** von Z Pujara (1975), Szarek (1987))
 $\Rightarrow X$ hat Basis für jede Wahl von τ .
- ▶ τ kann so berechnet werden, dass X keine bb. Basis hat (**Diagonalisierung**)

Gauß'sche Maße



- ▶ Maß γ auf \mathbb{R} **Gauß'sch**

: \Leftrightarrow γ hat Dichte der Form

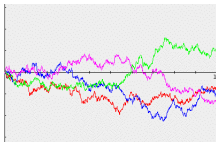
$$t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad a, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

- ▶ In diesem Fall: $a = \int x \gamma(dx)$, $\sigma^2 = \int (x-a)^2 \gamma(dx)$.

- ▶ Maß γ auf Banachraum X **Gauß'sch**

: \Leftrightarrow Bildmaß $\gamma \circ f^{-1}$ Gauß'sch für alle $f \in X^*$.

- ▶ Beispiel: Brown'sche Bewegung



Gauß'sche Maße und unbeschränkte Operatoren

- ▶ Satz (Werschulz u.a. (1987-1991)):
Seien X sep. Banachraum, Y sep. Hilbertraum,
 γ Gauß'sches Maß auf X ,
 $D \subseteq X$ messbarer Untervektorraum mit $\gamma(D) = 1$,
 $S : D \rightarrow Y$ linear und messbar, $\varepsilon > 0$.
Dann ex. $x_1, \dots, x_n \in X$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$ mit

$$\int_D \left\| S(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) S(x_i) \right\|^2 \gamma(dx) < \varepsilon.$$

Das Real-Number-Modell

$$\int_D \left\| S(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) S(x_i) \right\|^2 \gamma(dx) < \varepsilon$$

- ▶ Liefert diese Formel einen Algorithmus, der S im (quadratischen) Mittel näherungsweise berechnet?
- ▶ Ja, im **Real-Number-Modell**.
(Traub, Wasilkowski, Woźniakowski (1988))
(Blum, Shub, Smale (1989))

Das Real-Number-Modell

- ▶ Im Real-Number-Modell ...
 - ▶ ... sind Elemente von \mathbb{R} , X und Y primitive Objekte.
 - ▶ ... sind deren algebraische Verknüpfungen atomare Operationen (\Rightarrow Komplexität 1).
 - ▶ ... können endlich viele Elemente von \mathbb{R} , X und Y in einer Maschine fest eingebaut sein (“vorberechnete Konstanten”).
 - ▶ ... können endlich viele Elemente von X^* in einer Maschine fest eingebaut sein (“funktionale Orakel”).
- ▶ $x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) S(x_i)$ kann von Real-Number-Maschine berechnet werden.

Lösbarkeit im Durchschnitt

- ▶ Real-Number-Algorithmen werden in der **Information-Based Complexity** akzeptiert.
- ▶ Werschulz' Ergebnis in Sprache der IBC:
Schlecht gestellte lineare Probleme sind lösbar im Durchschnitt bzgl. Gauß'scher Maße.
- ▶ Kritik:
 - ▶ "Algorithmus" weder uniform in S noch in ε .
 - ▶ Unklar, wie die "vorberechneten Konstanten" $S(x_i)$ i.A. berechnet werden sollen.

Berechenbarkeit im Durchschnitt?

- ▶ Traub und Werschulz (1998) fragen:

Open Problem: Is every (measurable) linear operator computable on the average for Gaussian measures?

- ▶ Aber was bedeutet “computable on the average”?

Der punktweise Fehler

- ▶ Seien $(X, \|\cdot\|_X, e)$, $(Y, \|\cdot\|_Y, h)$ bb. Banachräume.
- ▶ Sei $g : X \rightarrow Y$ Funktion.
- ▶ Sei $f : \text{dom}(\delta_X) \rightarrow \text{dom}(\alpha_h)$ Funktion.
- ▶ Definiere für jedes $x \in X$ den **punktweisen Fehler**
$$\text{err}(x, f) := \sup_{\delta_X(p)=x} \|\alpha_h(f(p)) - g(x)\|_Y.$$
- ▶ Beobachtung:
 g (δ_X, δ_Y) -berechenbar \Leftrightarrow
es ex. berechenbare Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit
 $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X) \text{err}(x, f_n) \leq 2^{-n}.$

Berechenbare Approximation

- ▶ Sei μ Maß auf X .
- ▶ g berechenbar approximierbar bzgl. $\mu : \Leftrightarrow$
es ex. berechenbare Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \mu(\{x \in X : \text{err}(x, f_n) > 2^{-n}\}) \leq 2^{-n}$.
- ▶ Für $X = Y = \mathbb{R}$ eingeführt von Ko (1991), untersucht von
Parker (2003,2005,2006).
- ▶ f berechenbar approximierbar f
 $\Rightarrow f$ μ -messbar.

Berechenbarkeit im Durchschnitt

- ▶ **g berechenbar im Durchschnitt** bzgl. μ : \Leftrightarrow
es ex. berechenbare Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \int_X \text{err}(x, f_n) \mu(dx) \leq 2^{-n}$.
- ▶ Beruht auf Idee von Hertling (2005).
- ▶ **f berechenbar im Durchschnitt** bzgl. μ
 $\Rightarrow f$ lokal integrierbar
und berechenbar approximierbar bzgl. μ .

Einige Ergebnisse

- ▶ Sei μ $\delta_{\mathcal{M}}$ -berechenbar und f berechenbar im Durchschnitt bzgl. μ .
Dann ist $\int_X f \mu(dx) \in Y$ berechenbar, falls
 - ▶ f beschränkt ist, oder
 - ▶ f einen berechenbar kompakten Träger hat, oder
 - ▶ $\int_X \|f\| \mu(dx) \rho_{>}$ -berechenbar ist.
- ▶ μ berechenbar, f berechenbar approximierbar
 $\Rightarrow \mu \circ f^{-1}$ berechenbar.

Interpretation der Frage von Traub und Werschulz

- ▶ Beschränkung auf S von der Form T^{-1} mit T berechenbar.
(Für die Praxis bei weitem am wichtigsten).
- ▶ Beschränkung auf Hilberträume X, Y .
- ▶ Konkrete Frage:
Sei $T : X \rightarrow Y$ berechenbar injektiv,
 γ berechenbares Gauß'sches Maß auf Y
mit $\gamma(\text{Bild}(T)) = 1$.
Ist T^{-1} berechenbar im Durchschnitt bzgl. γ ?
- ▶ Antwort: Nicht unbedingt!
Es ex. Gegenbeispiel mit γ und T
von einfacher Struktur.

Beweisidee

- ▶ Zuerst Herleitung effektiver Version der **Mourier-Prokhorov-Charakterisierung** Gauß'scher Maße auf separablen Hilberträumen:
- ▶ Darstellung $\delta_{\mathcal{M}}$ hier äquivalent zu Darstellung, die folgende Informationen über γ codiert:
 - ▶ Das Element $a \in X$ mit $\langle x, a \rangle = \int \langle x, \omega \rangle \gamma(d\omega)$ für alle $x \in X$.
 - ▶ Den Operator $R : X \rightarrow X$ mit $\langle Rx, y \rangle = \int \langle x, \omega - a \rangle \langle y, \omega - a \rangle \gamma(d\omega)$ für alle $x, y \in X$.
 - ▶ Den Rechtsschnitt der Zahl $\int \|\omega\|^2 \gamma(d\omega)$.

Beweisidee

- ▶ Wenn T^{-1} bb. im Durchschnitt bzgl. γ , dann ist $\gamma \circ T$ $\delta_{\mathcal{M}}$ -berechenbar.
- ▶ Außerdem ist $\gamma \circ T$ Gauß'sch.
- ▶ $\Rightarrow \int \|T^{-1}\|^2 d\gamma$ rechts-berechenbar.
- ▶ Konstruiere berechenbare T und γ , so dass $\int \|T^{-1}\|^2 d\gamma$ nicht rechts-berechenbar.

Eine positive Aussage

- ▶ Aus T, T^*, γ ,
dem Rechtsschnitt von $\int \|T^{-1}\|^2 d\gamma$ und ε
lassen sich $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, y_1, \dots, y_n \in Y$
berechnen,

$$\text{so dass } \int \|T^{-1}(y) - \sum_{i=1}^n \langle y_i, y \rangle x_i\|^2 \gamma(dy) < \varepsilon.$$

(Dies impliziert insb. Berechenbarkeit im Durchschnitt.)

Beweisidee

- ▶ Zuerst Herleitung einer effektiven Version der **Tichonow-Regularisierung**.
- ▶ Kombiniere dies mit Werschulz' Ergebnis.

Vielen Dank!