Berechenbare Funktionalanalysis und probabilistische Berechenbarkeitsbegriffe

Volker Bosserhoff

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik und Mathematik

18. Dezember 2008

Rechnen mit endlichen Objekten

- Klassischerweise:
  "Berechenbarkeit"
  = "Berechenbarkeit von Funktionen $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$"
- Modell: Turing-Maschine (1936)
- Über Codierungen: Berechenbarkeit von Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- Ähnlich für $\mathbb{Q}$, endliche Graphen etc.

Universität der Bundeswehr München

Rechnen mit reellen Zahlen?

- Berechenbarkeit von Funktionen mit Definitions- und/oder Bildbereich $\mathbb{R}$?
- Problem: Es existiert keine surjektive Abbildung $\{0,1\}^* \to \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow \mathbb{R}$ kann nicht in Form endlicher Wörter codiert werden

der Bundeswehr Universität München

Berechenbarkeit bezüglich Darstellungen

- Idee: Verwende unendliche “Codewörter”
- Darstellung einer Menge M ist surjektive Abbildung $\delta :\subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to M$
- Beispiel: geeignet codierte Dezimalentwicklung

3	.	1	4	1	5	9	2	6	5	...
`1100`	`0101`	`1000`	`0010`	`1000`	`1010`	`1001`	`0100`	`0110`	`1010`	`...`

- Turing-Maschine berechnet $f :\subseteq M_1 \to M_2$ bzgl. Darstellungen δ_1, δ_2 von M_1, M_2

  $:\Longleftrightarrow$ TM transformiert jeden δ_1-Namen von jedem $x \in \mathrm{dom}(f)$ in einen δ_2-Namen von $f(x)$

Gebräuchliche Darstellungen von $\mathbb{R}$

- Cauchy-Darstellung ρ von $\mathbb{R}$:

  $\rho(p) = x :\Leftrightarrow p$ ist codierte Liste $(q_0, q_1, \ldots)$ rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ und $|q_i - q_j| \leq 2^{-i}$ für $j \geq i$.

- $x \in \mathbb{R}$ berechenbar $:\Leftrightarrow x$ hat berechenbaren ρ-Namen.
- Linksschnitt-Darstellung $\rho_<$ von $\mathbb{R}$:

  $\rho_<(p) = x :\Leftrightarrow p$ ist codierte Aufzählung der Menge $\{q \in \mathbb{Q} \ : \ q < x\}$.

- Rechtsschnitt-Darstellung $\rho_>$ von $\mathbb{R}$:

  $\rho_>(p) = x :\Leftrightarrow p$ ist codierte Aufzählung der Menge $\{q \in \mathbb{Q} \ : \ q > x\}$.

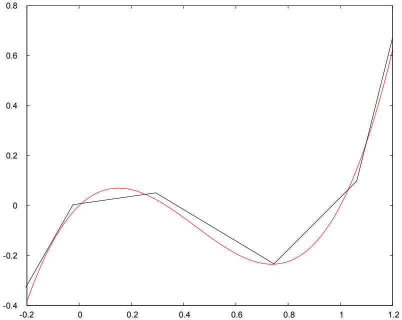
Berechenbare Banachräume

- $(X, \|\cdot\|, e)$ berechenbarer Banachraum $:\Longleftrightarrow$
  $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum,
  $e : \mathbb{N} \to X$ Fundamentalfolge (Spann dicht in X)
  mit gewissen Berechenbarkeitseigenschaften [...]
- Mit berechenbarem Banachraum assoziiert: Cauchy-Darstellung δ_X von X
- $F : X \to Y$ berechenbar $:\Longleftrightarrow$ F (δ_X, δ_Y)-berechenbar
- F berechenbar $\Longrightarrow$ F stetig

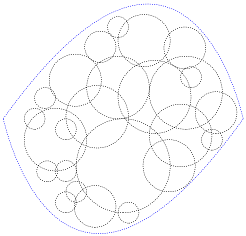
Universität der Bundeswehr München

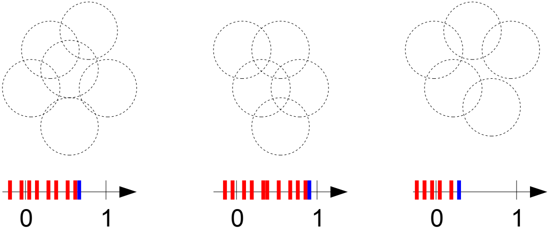
Berechenbare Banachräume

Beispiel: $C[0,1]$ als berechenbarer Banachraum



Darstellung von offenen Mengen und Maßen

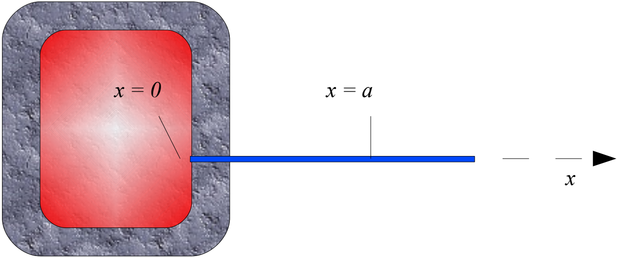




Universität der Bundeswehr München

Kompakte Operatoren – Definition und Beispiel

- Seien X, Y Banachräume, $F : X \to Y$ linear.
- $B_X := \{x \in X \ : \ \|x\| \leq 1\}$.
- F kompakt $:\Longleftrightarrow$ $\overline{F(B_X)}$ kompakte Menge.



Universität der Bundeswehr München

Effektive Theorie kompakter Operatoren

- Es existieren zahlreiche klassische Ergebnisse über kompakte Operatoren
- Brattka und Dillhage (2007) beweisen effektive Versionen vieler dieser Ergebnisse
- Allerdings unter der zusätzlichen Annahme:

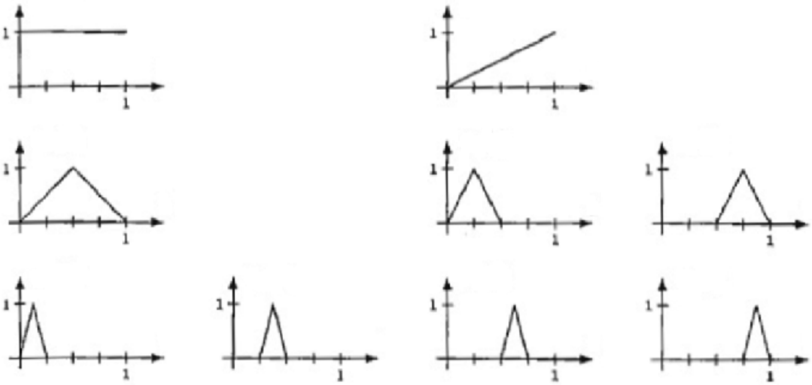
  Definitions- und Bildraum besitzen jeweils berechenbare *Schauder-Basis*
- Folge $(x_i)_i \in X^{\mathbb{N}}$ Schauder-Basis von X $:\Longleftrightarrow$

  zu jedem $x \in X$ existiert eindeutige Folge $(\alpha_i)_i \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$

  mit $\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \right\| = 0$.
- Beispiel: Orthonormalbasis eines separablen Hilbertraumes

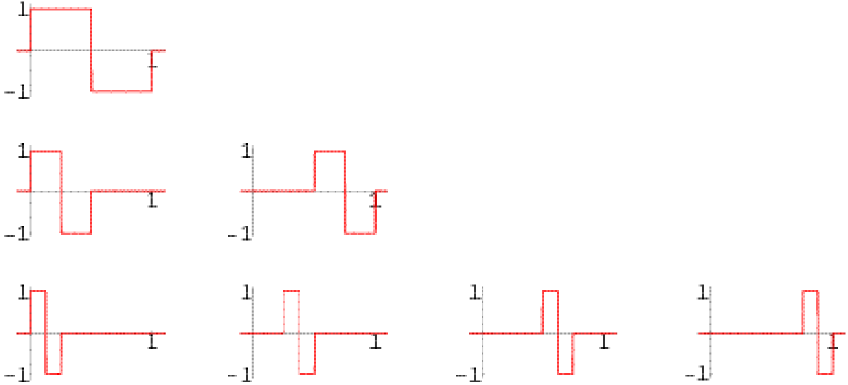
Schauder-Basen – Beispiele

- Schauder-Basis von $C[0,1]$



Schauder-Basen – Beispiele

- Schauder-Basis von $L_p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$



Universität der Bundeswehr München

Frage zur Berechenbarkeit von Schauder-Basen

- Frage:

  $(X, \|\cdot\|, e)$ bb. Banachraum mit Schauder-Basis

  $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $(X, \|\cdot\|, e)$ hat berechenbare Schauder-Basis
- Antwort für den Spezialfall "$(X, \|\cdot\|)$ Hilbertraum":

  Ja. (Brattka und Yoshikawa (2006))
- Antwort im Allgemeinen: Nein!

Stichworte zur Konstruktion des Gegenbeispiels

- Beginne mit berechenbarer Version Z von Enflos Raum (1973) (Z fehlt Grothendiecks *Approximationseigenschaft* [...])
- Betrachte Raum Y der Nullfolgen in Z
- Konstruiere durch Diagonalisierung Teilraum Y_τ von Y ohne berechenbare Schauder-Basis
- Nutze lokale Basisstruktur von Z (Pujara 1975, Szarek 1987), um zu zeigen: Y_τ hat Schauder-Basis

Schlecht gestellte Probleme – Definition

- Sei $F : X \to Y$ stetig und linear
- Numerisches Problem: Berechne aus gegebenen Näherungswerten für $y \in Y$ näherungsweise ein $x \in X$ mit $F(x) = y$
- Hindernis: Problem häufig nicht gut gestellt (Hadamard 1901), d.h.

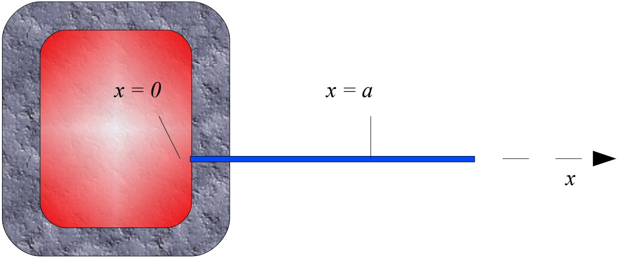
  Lösung x existiert evtl. nicht,

  Lösung x evtl. nicht eindeutig,

  Lösung x hängt evtl. nicht stetig von y ab
- Wir interessieren uns vor allem für die Unstetigkeit
- Allgemeines Problem: Näherungsweise Berechnung unstetiger linearer Abbildungen

Schlecht gestellte Probleme – Beispiel

- Beispiel: F kompakt und injektiv, $\dim(\mathrm{Bild}(F)) = \infty$
  $\Longrightarrow F^{-1} : \mathrm{Bild}(F) \to X$ unstetig



Der *Erste Hauptsatz* von Pour-El und Richards

- Pour-El und Richards (1989): *Unstetige lineare Abbildungen sind nicht berechenbar und bilden typischerweise sogar einige berechenbare auf unberechenbare Punkte ab*
- Angewandt auf den Lösungsoperator der Wellengleichung:

  Es existiert eine 3-dim. skalare Welle $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$, so dass $u(0, \cdot)$ berechenbar, $u(1, \cdot)$ unberechenbar
- Frage (z.B. Penrose): Existiert ein "Wellencomputer", der mächtiger ist als die Turing-Maschine?
- Weihrauch und Zhong (2002) liefern Gegenargumente

Positive Ergebnisse?

- Positive Ergebnisse zur Berechenbarkeit unstetiger Operatoren wurden erzielt, allerdings

  ... auf Grundlage eines anderen Berechenbarkeitsmodells

  ... wenn man nur verlangt, dass der Approximationsfehler im Durchschnitt bzgl. eines Gauß'schen Maßes klein ist

Gauß'sche Maße

- Maß γ auf $\mathbb{R}$ Gauß'sch
  :⇔ γ hat Dichte der Form
  $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right), \ a, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$
- In diesem Fall: $a = \int x\, \gamma(dx)$, $\sigma^2 = \int (x-a)^2\, \gamma(dx)$.
- Maß γ auf Banachraum X Gauß'sch
  :⇔ Bildmaß $\gamma \circ f^{-1}$ Gauß'sch auf $\mathbb{R}$ für alle $f \in X^*$.

Ein Ergebnis von Werschulz

- Satz (Werschulz u.a. 1987-1991):

  Seien X sep. Banachraum, Y sep. Hilbertraum

  γ Gauß'sches Maß auf X

  $D \subseteq X$ messbarer Untervektorraum mit $\gamma(D) = 1$

  $S : D \to Y$ linear und messbar, $\varepsilon > 0$

  $\Longrightarrow$ Es ex. Real-Number-Maschine, die Approximation an S mit Durchschnittsfehler (bzgl. γ) höchstens ε berechnet

Universität der Bundeswehr München

Das Real-Number-Modell

- Im Real-Number-Modell...
  - ... sind Elemente von $\mathbb{R}$, X und Y primitive Objekte
  - ... sind deren algebraische Verknüpfungen atomare Operationen ($\Rightarrow$ Komplexität 1)
  - ... können endlich viele Elemente von $\mathbb{R}$, X und Y in einer Maschine fest eingebaut sein ("vorberechnete Konstanten")
- Referenzen: Traub/Wasilkowski/Woźniakowski (1988), Blum/Shub/Smale (1989), Novak (1995)

Lösbarkeit im Durchschnitt

- Real-Number-Algorithmen werden in der Information-Based Complexity (IBC) akzeptiert
- Werschulz' Ergebnis in Sprache der IBC:
  Schlecht gestellte lineare Probleme sind lösbar im Durchschnitt bzgl. Gauß'scher Maße.
- Kritik:

  "Algorithmus" weder uniform in S noch in ε

  Unklar, wie einige verwendete "vorberechneten Konstanten" i.A. berechnet werden sollen

Berechenbarkeit im Durchschnitt?

- Traub und Werschulz (1998) stellen mit Blick auf Pour-El und Richards' Satz als offenes Problem:

  Is every (measurable) linear operator computable on the average for Gaussian measures?

- Aber was bedeutet "computable on the average"?

1. Vorarbeit: Untersuchung probabilistischer Berechenbarkeitsbegriffe

- Weiterentwicklung von Ideen von Ko (1991), Parker (2003,2005,2006) und Hertling (2005):

  Berechenbarkeit fast überall (AE)

  berechenbare Approximierbarkeit (APP)

  berechenbare Approximierbarkeit fast überall (APP/AE)

  Berechenbarkeit im Mittel (MEAN)

  Berechenbarkeit im Mittel fast überall (MEAN/AE)
- Ergebnisse über wechselseitige Beziehungen, bb. Integration, bb. Abbildung von Maßen etc.

2. Vorarbeit: Charakterisierung bb. Gauß'scher Maße

- Ergebnis (Effektive Mourier-Charakterisierung):
  Für Gauß'sche Maße auf Hilbertraum ist Standarddarstellung äquivalent zu Darstellung über

  Mittelwert $a_\gamma \in \ell_2$

  \+ Kovarianzoperator $K_\gamma : \ell_2 \to \ell_2$

  \+ Rechtsschnitt der Summe der Eigenwerte von K_γ

der Bundeswehr
Universität München

Erste Antwort

- Ergebnis:

  Es existieren berechenbarer injektiver kompakter Operator $F : \ell_2 \to \ell_2$ und Gauß'sches Maß γ von einfacher Struktur auf ℓ_2, so dass F^{-1} nicht APP/AE-bb. ist.

- Anmerkung: APP/AE ist der schwächste der betrachteten probabilistischen Berechenbarkeitsbegriffe

Zweite Antwort

- Ergebnis:

  Aus F, F^*, γ und dem Rechtsschnitt von $\int \|F^{-1}\|^2 \, d\gamma$ lässt sich F^{-1} im Mittel (MEAN) berechnen.
- Also: Berechenbarkeit im Mittel hängt von Verfügbarkeit der Größe $\int \|F^{-1}\|^2 \, d\gamma$ ab
- Algorithmus verwendet Tichonow-Regularisierung [...]

Fazit

Diese Anwendung zeigt: Das Turingmachinen-Modell erlaubt eine realistischere und detailiertere Analyse der Lösbarkeit numerischer Probleme als das Real-Number-Modell

Vielen Dank!