

Ein Spiel mit drei Würfeln

oder wie man (fast) immer gewinnt.

Die drei Efronschen Würfel tragen je zweimal die Zahlen.

| | | | |
|----------|---|---|---|
| Würfel 1 | 1 | 6 | 8 |
| Würfel 2 | 3 | 5 | 7 |
| Würfel 3 | 2 | 4 | 9 |

Das Spiel verläuft nach folgenden Regeln: Sie wählen einen der drei Würfel, im Anschluss wählen wir einen der beiden verbleibenden Würfel.

Anschließend wird 11 mal gewürfelt.

Wer zuerst sechsmal die höhere Zahl würfelt hat den Einsatz gewonnen!

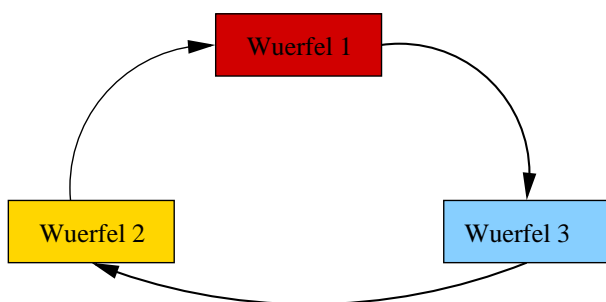
Die möglichen Spielverläufe stellen sich so dar:

| | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|----------------|---|---|----------------|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | 7 | | 2 | 4 | 9 | | 2 | 4 | 9 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 6 | 1 | 1 | 2 | 6 | 1 | 1 | 3 | 5 | 2 | 2 | 3 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 8 | 1 | 1 | 3 | 7 | 2 | 2 | 3 |
| Würfel 1 und 2 | | | Würfel 2 und 3 | | | Würfel 1 und 3 | | | | | |

Durch geeignete Wahl des Würfels gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{15}{27} = \frac{5}{9} \approx 55,56\%$ (bei einem Wurf).
Wenn man viele Spiele beobachtet, wird man feststellen:

Rot schlägt öfter Gelb, als umgekehrt,
Gelb schlägt öfter Blau, als umgekehrt,
Blau schlägt öfter Rot, als umgekehrt.

Auch wenn der Einzelfall natürlich anders ausgehen kann. Graphisch kann man sich das wie folgt verdeutlichen:



Bei zwei beliebig ausgewählten Würfeln ist immer einer besser als der andere. Trotzdem kann man die drei Würfel nicht ordnen, es gibt keinen besten Würfel.

Ein Spiel mit vier Würfeln

Genug von den drei Efronsche Würfel? Wir können auch noch andere Würfel anbieten.

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| Würfel 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Würfel 2 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Würfel 3 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| Würfel 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 6 |

Wieder gelten dieselben Spielregeln: Sie wählen einen der drei Würfel, anschließend wählen wir einen der beiden verbleibenden Würfel.

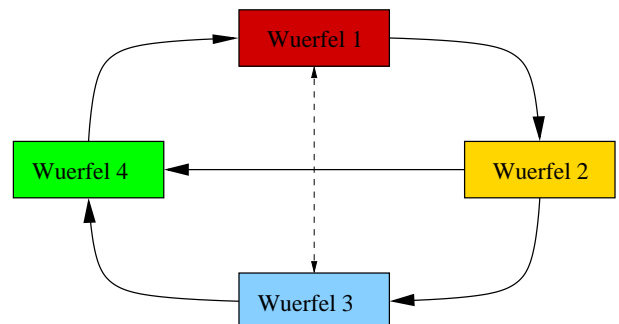
Anschließend wird 11 mal gewürfelt.

Wer zuerst sechsmal die höhere Zahl würfelt hat den Einsatz gewonnen!

Die möglichen Spielverläufe stellen sich wie folgt dar:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 6 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Insgesamt ergibt sich hier folgendes Bild:



(←----> bedeutet „faires Spiel“)

Kontakt

Beispiele für nichttransitive Relationen

Bei den Efronschen Würfeln haben wir es mit nichttransitiven Relationen zu tun, die manchem paradox erscheinen. Aber sie treten öfter auf, als man denkt.

“Paula, wohin gehen wir heute Abend essen? Zum Chinesen, zum Griechen oder zum Italiener?” “Einer von den dreien hat doch bestimmt Ruhetag heute. Nur wenn ich weiß wer, kann ich Dir eine eindeutige Antwort geben.” “Kannst Du nicht eine Reihenfolge angeben, in der wir die Lokale aufsuchen?” “Nein, wenn der Italiener zu hat, möchte ich zum Chinesen. Wenn der Chinese Urlaub macht, möchte ich zum Griechen, und wenn der Grieche Ruhetag hat, gehen wir zum Italiener. Das ist doch logisch.” “Was ist daran logisch: Du gehst lieber zum Chinesen als zum Griechen, lieber zum Griechen als zum Italiener und lieber zum Italiener als zum Chinesen. Also ist der Chinese besser als der Chinesen!”

Jedes Restaurant hat seine Vorzüge. Paula sind Geschmack, Ambiente und Reichhaltigkeit des Essens gleichermaßen wichtig. Dabei ergibt sich ihre Einschätzung der drei Restaurants aus folgender Tabelle:

| | Platz 1 | Platz 2 | Platz 3 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Geschmack | Italiener | Chinesen | Griechen |
| Ambiente | Griechen | Italiener | Chinesen |
| Menge | Chinesen | Griechen | Italiener |

Wenn der Italiener Ruhetag hat, ist der Chinese in 2 Kriterien besser als der Griechen, nämlich in Geschmack und Menge. Macht der Chinese Pause, dann ist der Griechen in Ambiente und Menge besser als der Italiener. Und wenn der Griechen die Küche kalt lässt, liegt der Italiener in Geschmack und Ambiente vor dem Chinesen.

In eine ähnlich vertrackte Situation kann eine junge Dame geraten, wenn sie drei Heiratsanträge gleichzeitig erhält und ihr Charakter, Aussehen und Einkommen des Liebhabers gleichermaßen wichtig sind:

| | Platz 1 | Platz 2 | Platz 3 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Charakter | Alfred | Bernd | Christoph |
| Aussehen | Christoph | Alfred | Bernd |
| Einkommen | Bernd | Christoph | Alfred |

Die meisten kennen die Situation vom Schnick-Schnack-Schnuck: Stein schleift Schere, Schere schneidet Papier, und Papier wickelt den Stein ein.

Eine ähnliche zyklische Präferenz kann auftreten, wenn drei Gäste ihr Lieblingsgetränk auswählen sollen.

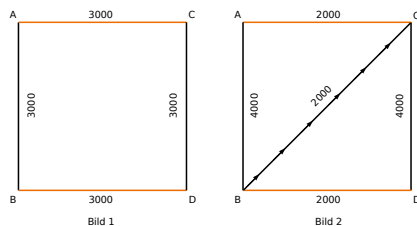
| | Platz 1 | Platz 2 | Platz 3 |
|---------|---------|---------|---------|
| 1. Gast | Brause | Wein | Bier |
| 2. Gast | Bier | Brause | Wein |
| 3. Gast | Wein | Bier | Brause |

Der Bau einer zusätzlichen Straße kann dazu führen, dass sich bei gleich bleibendem Verkehrsaufkommen die Fahrtdauer für alle Autofahrer erhöht.

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel: Vier Städte A, B, C und D sind mit vier Straßen verbunden, vgl. Bild 1. Die orangefarbenen Linien stellen gut ausgebauten Autobahnen dar, die schwarzen Linien kennzeichnen eher holprige Landstraßen. Für die Autobahnpassagen von A nach C und von B nach D beträgt die Fahrzeit pro Fahrer in Abhängigkeit von der Verkehrsdichte x

$$t_{AC}(x) = t_{BD}(x) = 50 + x \text{ Minuten.}$$

Auf den Landstraßen von A nach B und von C nach D muss man mit einer Zeit von



Hier ein Tipp: Wenn Sie Ihre Gäste zum Bier überreden wollen, fragen Sie zuerst “Brause oder Wein”? Brause gewinnt mit 2:1 Stimmen. Dann fragen Sie “Bier oder Brause” und erhalten mit einem weiteren 2:1 das gewünschte Ergebnis, obwohl sie gar nicht mit abgestimmt haben.

Kenneth Arrow aus Stanford hat sich mit Wahlsystemen auseinandergesetzt und gezeigt, dass keines perfekt ist und man mit allen sehr paradoxe Ergebnisse erzielen kann. Dafür erhielt er 1972 den Wirtschafts-Nobelpreis.

Arrow ging davon aus, dass jeder Wähler den Kandidaten einen Rang in der eigenen Wunschliste zuordnen kann. Nehmen wir als Beispiel, dass 15 Personen aus den drei Kandidaten Alfred, Bernd und Christoph einen Vorsitzenden wählen sollen. Die persönlichen Ranglisten der 15 Wähler sind

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| Alfred – Bernd – Christoph | Christoph – Bernd – Alfred |
| Alfred – Bernd – Christoph | Christoph – Bernd – Alfred |
| Alfred – Bernd – Christoph | Christoph – Bernd – Alfred |
| Alfred – Bernd – Christoph | Christoph – Bernd – Alfred |
| Alfred – Bernd – Christoph | Christoph – Bernd – Alfred |
| Alfred – Bernd – Christoph | Christoph – Bernd – Alfred |

| |
|----------------------------|
| Bernd – Christoph – Alfred |
| Bernd – Christoph – Alfred |
| Bernd – Christoph – Alfred |
| Bernd – Christoph – Alfred |

Das Ergebnis der Wahl hängt vom Wahlsystem ab:

Mehrheitswahl Alfred erhält mit 6 Stimmen die Mehrheit, zum Schrecken von 60% der Wähler, bei denen Alfred auf dem letzten Platz steht.

Stichwahl Platz 1 und 2 der Mehrheitswahl (Alfred und Christoph) sollen in einer zweiten Abstimmung gegeneinander antreten. Damit gewinnt Christoph mit 9 von 15 Stimmen, obwohl 10 Wähler Bernd lieber als Christoph zum Vorsitzenden gewählt hätten. Bernd war allerdings in der ersten Runde ausgeschieden.

Borda-Zählverfahren Bernd hätte im Verfahren nach Borda gewonnen: Jeder Wähler darf Punkte vergeben: 3 für seinen Platz 1, 2 für Platz 2 und einen für Platz 3. Auf diese Art erhält Alfred 27 Punkte, Christoph 29 Punkte und Bernd ist mit 34 Punkten der Sieger.

Es gibt kein perfektes Wahlverfahren! Das Borda-Zählverfahren wird manchmal favorisiert, aber hier ist schon die Annahme fraglich, dass jeder Wähler die Kandidaten in eine Rangfolge bringen kann, wie wir oben gesehen haben.

Quelle: H.-H. Dubben, H.-P. Beck-Bornholdt: Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit – Logisches Denken und Zufall. Rowohlt, Hamburg, 2005.

Ein weiteres Paradoxon: das Braess-Paradoxon

$$t_{AB}(x) = t_{CD}(x) = 10 \cdot x \text{ Minuten}$$

rechnen.

Angenommen alle Fahrer wollen von A nach D und jeder Fahrer wählt den für sich schnellsten Weg, dann wird sich ein sogenanntes Nash-Gleichgewicht einstellen. Bei einer Verkehrsdichte von 6000 Fahrzeugen bedeutet dies einen stündlichen Durchsatz von 3000 Autos pro Strecke. Die Fahrtdauer für jeden Fahrer beträgt somit 83 Minuten.

In einem zweiten Beispiel sind die Städte B und C mit einer zusätzlichen Landstraße verbunden, die nur in Richtung von B nach C befahren werden kann, vgl. Bild 2. Für die Fahrtdauer auf dieser Strecke soll gelten

$$t_{BC}(x) = (10 + x) \text{ Minuten.}$$

Auch hier wird sich ein Gleichgewicht einstellen, bei dem die Fahrtzeiten auf allen Strecken gleich sind. Der stündliche Durchsatz pro Strecke ist in Bild 2 angegeben. Die Fahrzeit pro Fahrer beträgt entsprechend 92 Minuten. Die zusätzliche Landstraße verlängert somit die Fahrt um 9 Minuten.

Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Braess-Paradoxon>