Institut für Mathematik und Bauinformatik

Probleme? Mathematik!

Universität der Bundeswehr München

Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen

Wetten, dass...

...Sie es nicht schaffen, folgendes Fünfzehner-Puzzle zu lösen:

5	12	2	9
8	11		6
1	7	14	3
10	4	15	13

Wir bieten einen beliebigen Geldbetrag,

wenn Sie obiges Puzzle auf die Gestalt

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

bringen, wobei Sie die Zahlen lediglich verschieben dürfen.

Vorgehensweise des Mathematikers

Der Mathematiker formuliert das Problem zunächst in seiner Sprache. Wie auch beim Fünfzehner-Puzzle genügt es oft zu bestimmen, ob ein gegebenes Problem überhaupt eine Lösung hat.

Jeder Anordnung des Puzzles wird eine Permutation P zugeordnet (zeilenweises Abschreiben), in unserem Beispiel:

$$P = (5, 12, 2, 9, 8, 11, 16, 6, 1, 7, 14, 3, 10, 4, 15, 13)$$

Das Leerfeld entspricht dabei der Zahl 16.

Was ist eine Permutation? Eine Permutation ist eine beliebige Anordnung vorgegebener Zahlen, hier der Zahlen $1, \ldots, 16$.

Jeder Permutation wird ihre Charakteristik $C(P)$ zugeordnet.

Wie bestimmt man die Charakteristik? Für jede Zahl der Permutation P zählt man, wieviele kleinere Zahlen hinter ihr stehen. Ist die Summe dieser Anzahlen gerade, dann setzt man $C(P) = 1$, anderenfalls $C(P) = -1$.

Vertauscht man zwei beliebige Zahlen in einer Permutation, dann ändert die zugehörige Charakteristik ihr Vorzeichen.

Bei einem Spielzug wird die Zahl 16 (das Leerfeld) mit einer anderen Zahl vertauscht; die Charakteristik ändert also nach jedem Spielzug ihr Vorzeichen.

Dem Leerfeld wird nach dem Schachbrettmuster

1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	-1
-1	1	-1	1

eine Parität $L(P)$ zugeordnet.

Genau wie die Charakteristik, ändert die Zahl $L(P)$ nach jedem Spielzug ihr Vorzeichen. Das Produkt $C(P) \cdot L(P)$ bleibt also für alle Spielzüge konstant.

Für das Anfangsproblem ist $C(P) = 1$ und $L(P) = -1$.
Für die Lösung jedoch ist $C(P) = 1$ und $L(P) = 1$.

Also ist das Puzzle unlösbar.

Kontakt

Prof. Thomas Apel
thomas.apel@unibw.de
Tel. (089) 6004 3405

Dipl.-Tech. Math. Thomas Flaig
thomas.flaig@unibw.de
Tel. (089) 6004 4403

Dipl.-Tech. Math. Johannes Pfefferer
johannes.pfefferer@unibw.de
Tel. (089) 6004 3408

Dipl.-Tech. Math. Dieter Sirch
dieter.sirch@unibw.de
Tel. (089) 6004 4403

Zur Lösbarkeit des Fünfzehner-Puzzles

Die Idee

Mathematiker beschäftigen sich häufig mit der Frage, ob ein Problem *überhaupt* lösbar ist. Die eigentliche Lösung interessiert dabei nicht. Das Fünfzehner-Puzzle ist ein Beispiel dafür, dass solche Herangehensweisen sehr nützlich sein können.

Jede Position des Puzzles entspricht einer **Permutation** (Anordnung) der Zahlen $1, \ldots, 16$, wobei dem Leerfeld die Zahl 16 zugeordnet wird. Für jede dieser Permutationen P kann man die zughörige **Charakterisitk** $C(P)$ und die Kennziffer $L(P)$ des Leerfeldes bestimmen.
Man kann zeigen, dass für alle Spielzüge das Produkt $C(P) \cdot L(P)$ konstant 1 oder konstant -1 bleibt.

Beweisskizze: Für zwei nebeneinander stehende Zahlen ist dies leicht einzusehen. Vertauscht man in

$$(5, 12, 2, 9, 8, 11, 16, 6, 1, 7, 14, 3, 10, 4, 15, 13)$$

zum Beispiel die 5 und die 12, dann vergrößert sich nur die entsprechende Anzahl der zu 12 kleineren Zahlen um 1. Also vergrößert sich auch die Summe der einzelnen Anzahlen um 1, und damit ändert die Charakteristik $C(P)$ das Vorzeichen.

Will man nun zwei beliebige Zahlen vertauschen, so erreicht man das durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen nebeneinanderliegender Zahlen. Die 16 und die 14 kann man zum Beispiel durch 7 Einzelvertauschungen vertauschen:

$$\begin{aligned}
& (5, 12, 2, 9, 8, 11, \mathbf{16}, 6, 1, 7, \mathbf{14}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, 6, \mathbf{16}, 1, 7, \mathbf{14}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, 6, 1, \mathbf{16}, 7, \mathbf{14}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, 6, 1, 7, \mathbf{16}, \mathbf{14}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, 6, 1, 7, \mathbf{14}, \mathbf{16}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, 6, 1, \mathbf{14}, 7, \mathbf{16}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, 6, \mathbf{14}, 1, 7, \mathbf{16}, 3, 10, 4, 15, 13) \\
\rightarrow\ & (5, 12, 2, 9, 8, 11, \mathbf{14}, 6, 1, 7, \mathbf{16}, 3, 10, 4, 15, 13)
\end{aligned}$$

Folglich ändert $C(P)$ bei einer beliebigen Vertauschung eine ungerade Anzahl mal das Vorzeichen, so dass insgesamt ein Vorzeichenwechsel eintritt.
Bei einem Spielzug, z.B.

5	12	2	9
8	11		6
1	7	14	3
10	4	15	13

$\longrightarrow$

5	12	2	9
8	11	14	6
1	7		3
10	4	15	13

wird die Zahl 16 (das Leerfeld) mit einer anderen Zahl vertauscht, wobei sowohl $C(P)$ als auch $L(P)$ das Vorzeichen ändert. Folglich bleibt das Produkt $C(P) \cdot L(P)$ konstant. $\square$

Lösungsalgorithmus

Für das gelöste Puzzle

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

kann man nachrechnen, dass

$$C(P) \cdot L(P) = 1$$

ist. Also sind die **Hälfte aller Fünfzehner-Puzzle**, nämlich die mit $C(P) \cdot L(P) = -1$, **nicht lösbar**.

Anhand des folgenden Lösungsalgorithmus kann jedes Ausgangs-Puzzle mit $C(P) \cdot L(P) = 1$ auf die gesuchte Gestalt gebracht werden.

Es sollte kein Problem sein, die folgende Stellung zu erreichen und dann über die weiteren Stationen die 1. Zeile zu ordnen:

1	2	3	X
	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

2	3	4	X
1	X		X
X	X	X	X
X	X	X	X

1	2	3	4
	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

Dabei bedeutet X=beliebiger Spielstein.
Zugrichtung des Leerfeldes: $\uparrow\rightarrow\rightarrow\downarrow$ und $\rightarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow$

Analog kann man die 2. Zeile ordnen. Bei der 3. Zeile gibt es das Problem, dass der Platz knapp wird. Wir geben das Beispiel der Einordnung der letzten Zahl, das Prinzip lässt sich auf die vorhergehenden übertragen. Im schlimmsten Fall steht die 12 in der 4. Zeile vorn:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	X
12		X	X

1	2	3	4
5	6	7	8
11	X	X	12
10	9	X	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
	X	X	X

Zugrichtung des Leerfeldes:

$$\leftarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow\downarrow \quad \leftarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\downarrow$$

Wegen $C(P) \cdot L(P) = 1$ sind in der letzten Zeile nur folgende Anordnungen der Zahlen $13, 14, 15$ möglich:

- 13, 14, 15 - welch ein Glück, wir sind bereits fertig;
- 14, 15, 13 - wird gleich gezeigt;
- 15, 13, 14 - ähnlich wie Fall 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
14	15	13	

1	2	3	4
5	6	7	8
11	12		15
10	9	13	14

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Zugrichtung des Leerfeldes:

$$\leftarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\uparrow \quad \leftarrow\leftarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$$